Solution de l'équation de Laplace en coordonnées sphéroïdales allongées (prolate spheroidal) ou applaties (oblate spheroidal) à trois dimensions avec conditions aux limites Dirichlet, Neumann ou Robin par la méthode de séparation des variables, passage à deux dimensions

Le système de coordonnées sphéroïdales allongées (prolate spheroidal)

Le système de coordonnées sphéroïdales allongées (prolate spheroidal) est défini par le changement de variable :

$$\begin{aligned} x &= c\,Sinh(\eta)\,Sin(\vartheta)Cos(\varphi) \\ y &= c\,Sinh(\eta)\,Sin(\vartheta)Sin(\varphi) \\ z &= c\,Cosh(\eta)\,Cos(\vartheta) \end{aligned}$$

Typiquement nous recherchons la solution du problème aux limites intérieur en coordonnées sphéroïdales allongées sur un espace bornée dans les limites $\eta \in [0,+\infty]$; $\vartheta \in [0,\pi]$; $\varphi \in [0,2\pi]$ *soit* $\eta \in [\eta_1,\eta_2]$; $\vartheta \in [\vartheta_1,\vartheta_2]$; $\varphi \in [\varphi_1,\varphi_2]$

Le Jacobien en coordonnées sphéroïdales allongées et la métrique sont :

$$J = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \vartheta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \vartheta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} cCosh(\eta)Sin(\vartheta)Cos(\varphi) & cSinh(\eta)Cos(\vartheta)Cos(\varphi) & -cSinh(\eta)Sin(\vartheta)Sin(\varphi) \\ cCosh(\eta)Sin(\vartheta)Sin(\varphi) & cSinh(\eta)Cos(\vartheta)Sin(\varphi) & cSinh(\eta)Sin(\vartheta)Cos(\varphi) \\ cSinh(\eta)Cos(\vartheta) & -cCosh(\eta)Sin(\vartheta) & 0 \end{pmatrix}$$

$$= c^3 \det\begin{pmatrix} Cosh(\eta)Sin(\vartheta)Cos(\varphi) & Sinh(\eta)Cos(\vartheta)Cos(\varphi) & -Sinh(\eta)Sin(\vartheta)Sin(\varphi) \\ Cosh(\eta)Sin(\vartheta)Sin(\varphi) & Sinh(\eta)Cos(\vartheta)Sin(\varphi) & Sinh(\eta)Sin(\vartheta)Cos(\varphi) \\ Sinh(\eta)Cos(\vartheta) & -Cosh(\eta)Sin(\vartheta) & 0 \end{pmatrix}$$

$$= c^3\,\mathrm{Sin}[\vartheta]\mathrm{Sinh}[\eta](\mathrm{Cosh}^2[\eta]\mathrm{Sin}^2[\vartheta] + \mathrm{Cos}^2[\vartheta]\mathrm{Sinh}^2[\eta])$$

$$= c^3\,\mathrm{Sin}[\vartheta]\mathrm{Sinh}[\eta](\mathrm{Cosh}^2[\eta]\mathrm{Sin}^2[\vartheta] + (1-\mathrm{Sin}^2[\vartheta])\mathrm{Sinh}^2[\eta])$$

$$J = c^3\,\mathrm{Sin}[\vartheta]\mathrm{Sinh}[\eta](\mathrm{Sinh}^2[\eta] + \left(\mathrm{Cosh}^2[\eta] - \mathrm{Sinh}^2[\eta]\right)\mathrm{Sin}^2[\vartheta])$$

$$J = c^3\,\mathrm{Sin}[\vartheta]\mathrm{Sinh}[\eta](\mathrm{Sinh}^2[\eta] + \mathrm{Sin}^2[\vartheta])$$

$$ds^2 = c^2\left(Sinh^2(\eta) + Sin^2(\theta)\right)(d\eta^2 + d\theta^2) + c^2 Sinh^2(\eta)Sin^2(\theta)d\varphi^2$$

L'équation de Laplace en coordonnées sphéroïdales allongées 3D (η,θ,ϕ) s'écrit sous la forme :

$$\frac{1}{c^2\left(Sinh^2(\eta)+Sin^2(\theta)\right)}\left(\frac{\partial^2 T(\eta,\theta,\varphi)}{\partial \eta^2} + Cotanh(\eta)\frac{\partial T(\eta,\theta,\varphi)}{\partial \eta} + \frac{\partial^2 T(\eta,\theta,\varphi)}{\partial \theta^2} + Cotan(\theta)\frac{\partial T(\eta,\theta,\varphi)}{\partial \theta}\right)$$

$$+\frac{1}{ca^2 Sinh^2(\eta)Sin^2(\theta)}\frac{\partial^2 T(\eta,\theta,\varphi)}{\partial \varphi^2} = 0 \qquad Cotanh(\eta) = \frac{Cosh(\eta)}{Sinh(\eta)} \quad Cotan(\theta) = \frac{Cos(\theta)}{Sin(\theta)}$$

Le gradient dans ce système de coordonnées prenant la forme :

$$\overrightarrow{Grad\left(T(\eta,\theta,\phi)\right)} =$$

$$\frac{1}{c\sqrt{\left(Sinh^2(\eta)+Sin^2(\theta)\right)}}\left(\left(\frac{\partial T(\eta,\theta,\phi)}{\partial \eta}\right)\mathbf{I}_\eta + \left(\frac{\partial T(\eta,\theta,\phi)}{\partial \theta}\right)\mathbf{I}_\theta\right) + \frac{1}{c\,Sinh(\eta)Sin(\theta)}\left(\frac{\partial T(\eta,\theta,\phi)}{\partial \phi}\right)\mathbf{I}_\phi$$

Les conditions mixtes de Robin sur une iso-surface η=*Cste ou ϑ=Cste prennent alors la forme :*

$$Iso-surface\ \eta = Cste$$

$$C.L.\quad \alpha \frac{1}{\sqrt{\left(Sinh^2(\eta)+Sin^2(\theta)\right)}} \frac{\partial T(\eta,\vartheta,\varphi)}{\partial \eta} + \beta\, T(\eta,\vartheta,\varphi)\Bigg|_{\eta=\eta_0} = f_{\partial\Omega}(\vartheta,\varphi)$$

$$Iso-surface\ \vartheta = Cste$$

$$C.L.\quad \alpha \frac{1}{\sqrt{\left(Sinh^2(\eta)+Sin^2(\theta)\right)}} \frac{\partial T(\eta,\vartheta,\varphi)}{\partial \vartheta} + \beta\, T(\eta,\vartheta,\varphi)\Bigg|_{\vartheta=\vartheta_0} = f_{\partial\Omega}(\eta,\varphi)$$

Si les conditions sont homogènes, et dans le cadre de la méthode de séparation des variables, il vient :

$$Séparation\ des\ variables \Rightarrow T(\eta,\vartheta,\varphi) = R(\eta)\Theta(\vartheta)\Phi(\varphi)$$

$$\begin{cases} Iso-surface\ \eta = Cste \\ C.L.\quad \alpha \dfrac{1}{\sqrt{\left(Sinh^2(\eta)+Sin^2(\theta)\right)}} \dfrac{\partial R(\eta)}{\partial \eta} + \beta\, R(\eta)\Bigg|_{\eta=\eta_0} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} Iso-surface\ \vartheta = Cste \\ C.L.\quad \alpha \dfrac{1}{\sqrt{\left(Sinh^2(\eta)+Sin^2(\theta)\right)}} \dfrac{\partial \Theta(\vartheta)}{\partial \vartheta} + \beta\, \Theta(\vartheta)\Bigg|_{\vartheta=\vartheta_0} \end{cases}$$

La variabilité radiale et angulaire de la condition aux limites introduit donc une difficulté de résolution supplémentaire puisque le système de valeur propre et fonction propre radiale ou angulaire dépendrait alors de sa position sur l'iso-surface (en clair cela m'est insurmontable). Dans ce cas de figure on simplifie le problème en supposant, de manière <u>tout à fait académique et certainement irréaliste</u>, que la condition aux limites mixte possède des coefficients indépendant de l'espace. En conclusion des solutions sont exhibées volontairement avec des conditions mixtes fixes, comme suit :

$$\begin{cases} Iso-surface\ \eta = Cste \\ C.L.\quad \alpha \dfrac{\partial R(\eta)}{\partial \eta} + \beta\, R(\eta)\Bigg|_{\eta=\eta_0} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} Iso-surface\ \vartheta = Cste \\ C.L.\quad \alpha \dfrac{\partial \Theta(\vartheta)}{\partial \vartheta} + \beta\, \Theta(\vartheta)\Bigg|_{\vartheta=\vartheta_0} = 0 \end{cases}.$$

ce qui permet d'ailleurs de condenser en une seule formule, les deux cas limites Dirichlet et Neumann. En revanche les problèmes avec condition de Neumann ou de Dirichlet sont eux susceptible d'être résolus entièrement par la méthode de séparation des variables.

<u>*Iso-surfaces du système de coordonnées*</u>

Les iso-surfaces η=Ctse, sont des ellipsoïdes de révolution données par la formule implicite :

$$\frac{x^2+y^2}{c^2\, Sinh^2(\eta)} + \frac{z^2}{c^2\, Cosh^2(\eta)} = 1.$$

Les iso-surfaces θ=Ctse, sont des hyperboloïdes de révolution à deux nappes données par la formule implicite : $\dfrac{z^2}{c^2\, Cos^2(\theta)} - \dfrac{x^2+y^2}{c^2\, Sin^2(\theta)} = 1$

Les iso-surfaces φ=Ctse, sont des plans $Tan(\varphi) = \dfrac{y}{x}$

Transformation du système de coordonnées sphéroidales allongés au système cylindrique

$$\left.\begin{cases} x = c\,Sinh(\eta)\,Sin(\vartheta)Cos(\varphi) \\ y = c\,Sinh(\eta)\,Sin(\vartheta)Sin(\varphi) \\ z = c\,Cosh(\eta)\,Cos(\vartheta) \end{cases}\right\} \quad \left.\rho = c\,Sinh(\eta)\,Sin(\vartheta)\right\} \quad \frac{\rho^2}{Sinh^2(\eta)} + \frac{z^2}{Cosh^2(\eta)} = c^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left(1+Sinh^2(\eta)\right)\rho^2 + z^2 Sinh^2(\eta) = c^2 Sinh^2(\eta)\left(1+Sinh^2(\eta)\right) \\ Cosh^2(\eta)\rho^2 + z^2\left(Cosh^2(\eta)-1\right) = c^2\left(Cosh^2(\eta)-1\right)Cosh^2(\eta) \end{cases}$$

$$Comme \quad \sqrt{\left(z^2+\rho^2+c^2\right)^2 - 4c^2z^2} = \sqrt{z^4+\rho^4+c^4+2z^2\rho^2-2c^2z^2+2\rho^2c^2} = \sqrt{\left(z^2+\rho^2-c^2\right)^2+4c^2\rho^2}$$

$$\lambda = Sinh^2(\eta) \Rightarrow c^2\lambda^2 + \lambda\left(c^2-\rho^2-z^2\right) - \rho^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \dfrac{z^2+\rho^2-c^2-\sqrt{\left(z^2+\rho^2-c^2\right)^2+4c^2\rho^2}}{2c^2} < 0 \\ \lambda_2 = \dfrac{z^2+\rho^2-c^2+\sqrt{\left(z^2+\rho^2-c^2\right)^2+4c^2\rho^2}}{2c^2} > 0 \end{cases}$$

$$\lambda = Cosh^2(\eta) \Rightarrow c^2\lambda^2 - \lambda\left(c^2+\rho^2+z^2\right) + z^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} 0 < \lambda_1 = \dfrac{z^2+\rho^2+c^2-\sqrt{\left(z^2+\rho^2+c^2\right)^2-4c^2z^2}}{2c^2} < 1 \\ \lambda_2 = \dfrac{z^2+\rho^2+c^2+\sqrt{\left(z^2+\rho^2+c^2\right)^2-4c^2z^2}}{2c^2} > 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Sinh(\eta) = \sqrt{\dfrac{z^2+\rho^2-c^2+\sqrt{\left(z^2+\rho^2-c^2\right)^2+4c^2\rho^2}}{2c^2}} \\ Cosh(\eta) = \sqrt{\dfrac{z^2+\rho^2+c^2+\sqrt{\left(z^2+\rho^2-c^2\right)^2+4c^2\rho^2}}{2c^2}} \end{cases}$$

D'autres formules de passage sont équivalentes :

$$\left.\begin{aligned} d_1{}^2 &= (z+c)^2+\rho^2 \\ d_2{}^2 &= (z-c)^2+\rho^2 \end{aligned}\right\} \quad Cosh(\eta) = \frac{d_1+d_2}{2c} = \frac{\sqrt{(z+c)^2+\rho^2}+\sqrt{(z-c)^2+\rho^2}}{2c} \Rightarrow Sinh^2(\eta) = \frac{d_1{}^2+d_2{}^2+2d_1d_2-4c^2}{4c^2}$$

$$\Rightarrow d_1d_2 = \sqrt{(z+c)^2+\rho^2}\sqrt{(z-c)^2+\rho^2} = \sqrt{\left(\rho^2+c^2+z^2+2cz\right)\left(\rho^2+c^2+z^2-2cz\right)}$$

$$= \sqrt{\left(z^2+\rho^2+c^2\right)^2-4c^2z^2} = \sqrt{\left(z^2+\rho^2-c^2\right)^2+4c^2\rho^2} = \sqrt{z^4+\rho^4+c^4+2\rho^2z^2+2c^2\rho^2-2c^2z^2}$$

$$\frac{d_1{}^2+d_2{}^2}{2} = \frac{(z+c)^2+(z-c)^2+2\rho^2}{2} = z^2+c^2+\rho^2 \Rightarrow Sinh^2(\eta) = \frac{z^2+\rho^2-c^2+\sqrt{\left(z^2+\rho^2-c^2\right)^2+4c^2\rho^2}}{2c^2}$$

.

Pour la variable angulaire :

$$\frac{z^2}{Cos^2(\vartheta)}-\frac{\rho^2}{Sin^2(\vartheta)}=c^2 \Rightarrow z^2Sin^2(\vartheta)-\rho^2Cos^2(\vartheta)=c^2Sin^2(\vartheta)Cos^2(\vartheta)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c^2Cos^2(\vartheta)\left(1-Cos^2(\vartheta)\right)=z^2\left(1-Cos^2(\vartheta)\right)-\rho^2Cos^2(\vartheta) \\ c^2Sin^2(\vartheta)\left(1-Sin^2(\vartheta)\right)=z^2Sin^2(\vartheta)-\rho^2\left(1-Sin^2(\vartheta)\right) \end{cases} \quad Or\ \sqrt{\left(z^2+\rho^2+c^2\right)^2-4c^2z^2}=\sqrt{\left(z^2+\rho^2-c^2\right)^2+4c^2\rho^2}$$

$$\lambda=Cos^2(\vartheta)\Rightarrow c^2\lambda(1-\lambda)=z^2(1-\lambda)-\rho^2\lambda \Rightarrow \begin{cases} 0<\lambda_1=\dfrac{2c^2+z^2+\rho^2-c^2-\sqrt{\left(z^2+\rho^2-c^2\right)^2+4c^2\rho^2}}{2c^2}<1 \\ \lambda_2=\dfrac{2c^2+z^2+\rho^2-c^2+\sqrt{\left(z^2+\rho^2-c^2\right)^2+4c^2\rho^2}}{2c^2}>1 \end{cases}$$

$$\lambda=Sin^2(\vartheta)\Rightarrow c^2\lambda(1-\lambda)=z^2\lambda-\rho^2(1-\lambda)\Rightarrow \begin{cases} 0<\lambda_1=\dfrac{\sqrt{\left(z^2+\rho^2-c^2\right)^2+4c^2\rho^2}-\left(z^2+\rho^2-c^2\right)}{2c^2}<1 \\ \lambda_2=\dfrac{-\sqrt{\left(z^2+\rho^2-c^2\right)^2+4c^2\rho^2}-\left(z^2+\rho^2-c^2\right)}{2c^2}<0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Cos^2(\vartheta)=\dfrac{c^2+z^2+\rho^2-\sqrt{\left(z^2+\rho^2+c^2\right)^2-4c^2z^2}}{2c^2} \\ Sin^2(\vartheta)=\dfrac{\sqrt{\left(z^2+\rho^2-c^2\right)^2+4c^2\rho^2}-\left(z^2+\rho^2-c^2\right)}{2c^2} \end{cases}$$

$$Cos^2(\vartheta)=\frac{c^2+z^2+\rho^2-\sqrt{\left(z^2+\rho^2+c^2\right)^2-4c^2z^2}}{2c^2}=\frac{\frac{{d_1}^2+{d_2}^2}{2}-d_1d_2}{2c^2}=\frac{(d_1-d_2)^2}{4c^2}\Rightarrow Cos(\vartheta)=\frac{d_1-d_2}{2c}$$

.

Singularité du système de coordonnées sphéroïdales allongées et régularité du gradient

Dans le cas où le domaine d'étude de la solution de l'équation de Laplace comporte le point η=*0 et la ligne ϑ=0,π (axe z), alors l*e système *de coordonnées sphéroïdales allongées comporte une singularité en* η=*0 et ϑ=0,π. Cela se traduit par l'annulation du Jacobien sur cette ligne ou ce point et la singularité "apparente" du Gradient de toute fonction solution de l'équation de Laplace. La solution doit donc neutraliser la singularité apparente du gradient en assurant une valeur bornée à ce dernier soit :*

$$(\eta,\theta,\phi)\in\Omega \; et \; (0,0,z)\in\Omega \; ou \; (0,\pi,z)\in\Omega$$

$$\overrightarrow{Grad\big(T(\eta,\theta,\phi)\big)}=$$

$$\frac{1}{c\sqrt{\left(Sinh^2(\eta)+Sin^2(\theta)\right)}}\left(\left(\frac{\partial T(\eta,\theta,\phi)}{\partial\eta}\right)\mathbf{I}_\eta+\left(\frac{\partial T(\eta,\theta,\phi)}{\partial\theta}\right)\mathbf{I}_\theta\right)+\frac{1}{c\,Sinh(\eta)Sin(\theta)}\left(\frac{\partial T(\eta,\theta,\phi)}{\partial\phi}\right)\mathbf{I}_\phi$$

$$Grad\big(T(\eta,\theta,\phi)\big)^2=$$

$$\frac{1}{c^2\left(Sinh^2(\eta)+Sin^2(\theta)\right)}\left(\left(\frac{\partial T(\eta,\theta,\phi)}{\partial\eta}\right)^2+\left(\frac{\partial T(\eta,\theta,\phi)}{\partial\theta}\right)^2\right)+\frac{1}{c^2Sinh(\eta)^2Sin(\theta)^2}\left(\frac{\partial T(\eta,\theta,\phi)}{\partial\phi}\right)^2$$

$$Singularité\ du\ Jacobien\quad J\Big|_{\substack{\eta=0\\ \theta=0,\pi}}=a^3Sinh(\eta)Sin(\theta)\left(Sinh^2(\eta)+Sin^2(\theta)\right)=0$$

$$condition\ Grad\big(T(\eta,\theta,\phi)\big)\ reste\ bornée\ \forall\,\eta,\theta$$

$$Soit\quad \frac{1}{c^2\left(Sinh^2(\eta)+Sin^2(\theta)\right)}\left(\left(\frac{\partial T(\eta,\theta,\phi)}{\partial\eta}\right)^2+\left(\frac{\partial T(\eta,\theta,\phi)}{\partial\theta}\right)^2\right)+\frac{1}{c^2Sinh(\eta)^2Sin(\theta)^2}\left(\frac{\partial T(\eta,\theta,\phi)}{\partial\phi}\right)^2\Bigg|_{\substack{\eta=0\\ \theta=0,\pi}}\to Cste$$

$$Soit\ G=\left(\frac{\partial T(\eta,\theta,\phi)}{\partial\eta}\right)^2+\left(\frac{\partial T(\eta,\theta,\phi)}{\partial\theta}\right)^2\Bigg|_{\substack{\eta=0\\ \theta=0,\pi}}\propto Cste\left(Sinh^2(\eta)+Sin^2(\theta)\right)$$

$$et\left(\frac{\partial T(\eta,\theta,\phi)}{\partial\phi}\right)^2\Bigg|_{\substack{\eta=0\\ \theta=0,\pi}}\propto Cste\,Sinh(\eta)^2Sin(\theta)^2$$

Il s'avère qu'en général la seule contrainte du respect d'une solution finie pour l'équation de Laplace suffit à assurer la contrainte de régularité du gradient. Nous verrons par la suite que pour les solutions sur un sphéroïde complet allongée dont les conditions aux limites ne dépendent pas de l'angle ϕ, il faut chercher dans les combinaisons linéaires de polynômes de Legendre :

$$Partie\,radiale\Rightarrow A\,P_n\big(Cosh(\eta)\big)+B\,Q_n\big(Cosh(\eta)\big)$$

$$Partie\,radiale\Rightarrow A+B\,Log[\frac{Cosh(\eta/2)}{Sinh(\eta/2)}]$$

$$Partie\,angulaire\Rightarrow A\,P_n\big(Cos(\theta)\big)+B\,Q_n\big(Cos(\theta)\big)$$

La solution finie pour η=*0 et ϑ=0,π oblige au choix :*

$$Partie\,radiale\Rightarrow Lim_{\eta\to0}Q_n\big(Cosh(\eta)\big)=+\infty\Rightarrow A\,P_n\big(Cosh(\eta)\big)$$

$$Partie\,angulaire\Rightarrow Lim_{\theta\to0,\pi}Q_n\big(Cos(\theta)\big)=\pm\infty\Rightarrow A\,P_n\big(Cos(\theta)\big)$$

En choisissant les fonctions de valeurs finies sur la singularité (η=0 et ϑ=0,π), il vient pour l'expression du gradient G, en effectuant un développement des fonctions de Legendre autour de z=1 :

$$Soit\ à\ démontrer\ \left(\frac{\partial T(\eta,\theta)}{\partial\eta}\right)^2+\left(\frac{\partial T(\eta,\theta)}{\partial\theta}\right)^2\Bigg|_{\substack{\eta=0\\ \theta=0,\pi}} \propto Cste\left(Sinh^2(\eta)+Sin^2(\theta)\right)\quad T(\eta,\theta)=P_n\left(Cosh(\eta)\right)P_n\left(Cos(\theta)\right)$$

$$\frac{\partial T(\eta,\theta)}{\partial\eta}=Sinh(\eta)P_n'\left(Cosh(\eta)\right)P_n\left(Cos(\theta)\right)\quad \frac{\partial T(\eta,\theta)}{\partial\theta}=-Sin(\theta)P_n\left(Cosh(\eta)\right)P_n'\left(Cos(\theta)\right)$$

$$\left(\frac{\partial T(\eta,\theta)}{\partial\eta}\right)^2+\left(\frac{\partial T(\eta,\theta)}{\partial\theta}\right)^2\Bigg|_{\substack{\eta=0\\ \theta=0,\pi}}=Sinh^2(\eta)\left(P_n'\left(Cosh(\eta)\right)\right)^2\left(P_n\left(Cos(\theta)\right)\right)^2+Sin^2(\theta)\left(P_n\left(Cosh(\eta)\right)\right)^2\left(P_n'\left(Cos(\theta)\right)\right)^2$$

$$P_n(z)\approx 1+\frac{n(n+1)}{2}(z-1)+\frac{n(n+1)(n+2)(n-1)}{16}(z-1)^2\quad P_n'(z)\approx\frac{n(n+1)}{2}+\frac{n(n+1)(n+2)(n-1)}{8}(z-1)$$

$$Cosh(\eta)\approx 1+\frac{\eta^2}{2!}+\frac{\eta^4}{4!}+\cdots+\frac{\eta^{2n}}{(2n)!}\Rightarrow x=Cosh(\eta)-1=\frac{Sinh^2(\eta)}{Cosh(\eta)+1}=\frac{Sinh^2(\eta)}{x'}\approx O(\eta^2)\Rightarrow O(x^2)\approx O(\eta^4)$$

$$Cos(\theta)\approx 1-\frac{\theta^2}{2!}+\frac{\theta^4}{4!}+\cdots+(-1)^n\frac{\theta^{2n}}{(2n)!}\Rightarrow y=Cos(\theta)-1=-\frac{Sin^2(\theta)}{Cos(\theta)+1}=-\frac{Sin^2(\theta)}{y'}\approx O(\theta^2)\Rightarrow O(y^2)\approx O(\theta^4)$$

$$P_n\left(Cosh(\eta)\right)\approx 1+\frac{n(n+1)}{2}x\approx 1+\frac{n(n+1)}{2}\frac{Sinh^2(\eta)}{x'}\quad P_n\left(Cos(\theta)\right)\approx 1+\frac{n(n+1)}{2}y\approx 1-\frac{n(n+1)}{2}\frac{Sin^2(\theta)}{y'}$$

$$P_n'\left(Cosh(\eta)\right)\approx\frac{n(n+1)}{2}\left(1+\frac{(n+2)(n-1)}{4}x\right)=\frac{n(n+1)}{2}\left(1+\frac{(n+2)(n-1)}{4}\frac{Sinh^2(\eta)}{x'}\right)$$

$$P_n'\left(Cos(\theta)\right)\approx\frac{n(n+1)}{2}\left(1+\frac{(n+2)(n-1)}{4}y\right)=\frac{n(n+1)}{2}\left(1-\frac{(n+2)(n-1)}{4}\frac{Sin^2(\theta)}{y'}\right)$$

$$B=x\left(2n(n+1)Sin^2(\theta)+(n+2)(n-1)Sinh^2(\eta)\right)+y\left(2n(n+1)Sinh^2(\eta)+(n+2)(n-1)Sin^2(\theta)\right)$$

$$C=x^2\left(4n^2Sin^2(\theta)(n+1)^2+Sinh^2(\eta)(n-1)^2(n+2)^2\right)+y^2\left(4n^2Sinh^2(\eta)(n+1)^2+Sin^2(\theta)(n-1)^2(n+2)^2\right)$$

$$G\approx\frac{n^2(n+1)^2}{4}\left(\begin{array}{l}\left(Sinh^2(\eta)+Sin^2(\theta)\right)\left(1+\frac{n(n+1)(n+2)(n-1)}{2}xy+\frac{n^2(n+1)^2(n+2)^2(n-1)^2}{64}x^2y^2\right)\\ +\frac{B}{2}\left(1+\frac{n(n+1)(n-1)(n+2)}{8}xy\right)+\frac{C}{16}\end{array}\right)$$

$$Comme\ x=Cosh(\eta)-1\ et\ y=Cos(\theta)-1\ calculons\quad x=\frac{Sinh^2(\eta)}{Cosh(\eta)+1}\approx\frac{Sinh^2(\eta)}{2}$$

$$y=-\frac{Sin^2(\theta)}{Cos(\theta)+1}\approx-\frac{Sin^2(\theta)}{2}$$

$$B\approx\frac{(n+2)(n-1)}{2}\left(Sinh^4(\eta)-Sin^4(\theta)\right)=\frac{(n+2)(n-1)}{2}\left(Sinh^2(\eta)-Sin^2(\theta)\right)\left(Sinh^2(\eta)+Sin^2(\theta)\right)$$

$$C\approx\frac{Sinh^4(\eta)}{4}\left(4n^2Sin^2(\theta)(n+1)^2+Sinh^2(\eta)(n-1)^2(n+2)^2\right)+$$

$$+\frac{Sin^4(\theta)}{4}\left(4n^2Sinh^2(\eta)(n+1)^2+Sin^2(\theta)(n-1)^2(n+2)^2\right)$$

$$C\approx\frac{(n-1)^2(n+2)^2}{4}\left(Sinh^6(\eta)+Sin^6(\theta)\right)+n^2(n+1)^2Sin^2(\theta)Sinh^2(\eta)\left(Sinh^2(\eta)+Sin^2(\theta)\right)$$

$$Sinh^6(\eta)+Sin^6(\theta)=\left(Sinh^2(\eta)+Sin^2(\theta)\right)\left(Sinh^4(\eta)+Sinh^2(\eta)Sin^2(\theta)-Sin^4(\theta)\right)$$

$$\Rightarrow G\propto Cste\left(Sinh^2(\eta)+Sin^2(\theta)\right)$$

Ce qui démontre le résultat dans les premières approximations du développement autour de la singularité.

Un autre démonstration est plus complète par le raisonnement suivant (voir Lebedev pour le cas des coordonnées sphéroïdales aplaties). L'expression G ne faisant intervenir que des fonctions de Legendre de première espèce et d'indices entiers (soit un polynôme de Legendre) est un polynôme en Cos(ϑ) et Cosh(η). D'autres part le polynôme s'annule pour les valeurs définies par Cos(ϑ) =-Cosh(η) et Cos(ϑ) = -Cosh(η), comme suit :

$$G = \left(\frac{\partial T(\eta,\theta)}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial T(\eta,\theta)}{\partial \theta}\right)^2 \Bigg|_{\substack{\eta=0 \\ \theta=0,\pi}}$$

$$= Sinh^2(\eta)\left(P_n'\left(Cosh(\eta)\right)\right)^2\left(P_n\left(Cos(\theta)\right)\right)^2 + Sin^2(\theta)\left(P_n\left(Cosh(\eta)\right)\right)^2\left(P_n'\left(Cos(\theta)\right)\right)^2$$

$$Annulation\ pour\ Cos(\theta) = \pm Cosh(\eta)$$

$$G\big|_{Cos(\theta)=\pm Cosh(\eta)} = \left(P_n'\left(Cos(\theta)\right)\right)^2\left(P_n\left(Cos(\theta)\right)\right)^2\left(Sinh^2(\eta) + Sin^2(\theta)\right)$$

$$= \left(P_n'\left(Cos(\theta)\right)\right)^2\left(P_n\left(Cos(\theta)\right)\right)^2\left(Cosh^2(\eta) - 1 + 1 - Cos^2(\theta)\right)$$

$$= \left(P_n'\left(Cos(\theta)\right)\right)^2\left(P_n\left(Cos(\theta)\right)\right)^2\left(Cosh^2(\eta) - Cos^2(\theta)\right)$$

$$= 0$$

$$On\ peut\ donc\ trouver\ une\ factorisation\ telle\ que :$$

$$G \propto \left(Cos(\theta) + Cosh(\eta)\right)\left(Cos(\theta) - Cosh(\eta)\right)Polynôme(Cos(\theta), Cosh(\eta))$$

$$\Rightarrow G \propto \left(Cosh^2(\eta) - Cos^2(\theta)\right)Polynôme(Cos(\theta), Cosh(\eta))$$

$$\Rightarrow G \propto \left(Sinh^2(\eta) + Sin^2(\theta)\right)Polynôme(Cos(\theta), Cosh(\eta))$$

Ce qui démontre le résultat recherché et permet d'affirmer que le choix de la solution finie avec des polynômes de Legendre est une condition suffisante de régularité du gradient.

Lorsque les problèmes aux limites impliques des géométries "coniques", on utilise des fonctions de Legendre de première et deuxième espèce avec des indices non entiers. Là encore le choix d'une solution finie pour η=0 et ϑ=0,π, aboutit aux même conclusions :

$$Partie\,radiale \Rightarrow Lim_{\eta\to 0} Q_{\lambda_n}\left(Cosh(\eta)\right) = +\infty \Rightarrow A\,P_{\lambda_n}\left(Cosh(\eta)\right)$$

$$Partie\,angulaire \Rightarrow Lim_{\theta\to 0,\pi} Q_{\lambda_n}\left(Cos(\theta)\right) = \pm\infty \Rightarrow A\,P_{\lambda_n}\left(Cos(\theta)\right)$$

Il reste à démontrer que pour les fonctions $P_{\lambda_n}(Cosh(\eta)), P_{\lambda_n}(Cos(\theta))$*, la fonction G respecte également bien la condition de régularité du gradient. Pour cela le développement autour de la valeur z=1 des fonctions de Legendre P est encore valable en remplaçant par n->*λ_n*.*

$$Posant\ x = Cosh(\eta) - 1\ et\ y = Cos(\theta) - 1 \Rightarrow x = \frac{Sinh^2(\eta)}{Cosh(\eta)+1} \approx \frac{Sinh^2(\eta)}{2} \quad y = -\frac{Sin^2(\theta)}{Cos(\theta)+1} \approx -\frac{Sin^2(\theta)}{2}$$

$$B = x\left(2\lambda_n(\lambda_n+1)Sin^2(\theta) + (\lambda_n+2)(\lambda_n-1)Sinh^2(\eta)\right) + y\left(2\lambda_n(\lambda_n+1)Sinh^2(\eta) + (\lambda_n+2)(\lambda_n-1)Sin^2(\theta)\right)$$

$$C = x^2\left(4n^2Sin^2(\theta)(n+1)^2 + Sinh^2(\eta)(n-1)^2(n+2)^2\right) + y^2\left(4n^2Sinh^2(\eta)(n+1)^2 + Sin^2(\theta)(n-1)^2(n+2)^2\right)$$

$$G \approx \frac{\lambda_n{}^2(\lambda_n+1)^2}{4}\left(\begin{array}{l}\left(Sinh^2(\eta)+Sin^2(\theta)\right)\left(1+\frac{\lambda_n(\lambda_n+1)(\lambda_n+2)(\lambda_n-1)}{2}xy+\frac{\lambda_n{}^2(\lambda_n+1)^2(\lambda_n+2)^2(\lambda_n-1)^2}{64}x^2y^2\right)\\ +\frac{B}{2}\left(1+\frac{\lambda_n(\lambda_n+1)(\lambda_n-1)(\lambda_n+2)}{8}xy\right)+\frac{C}{16}\end{array}\right)$$

$$B \approx \frac{(\lambda_n+2)(\lambda_n-1)}{2}\left(Sinh^4(\eta) - Sin^4(\theta)\right) = \frac{(\lambda_n+2)(\lambda_n-1)}{2}\left(Sinh^2(\eta) - Sin^2(\theta)\right)\left(Sinh^2(\eta) + Sin^2(\theta)\right)$$

$$C \approx \frac{(\lambda_n-1)^2(\lambda_n+2)^2}{4}\left(Sinh^6(\eta) + Sin^6(\theta)\right) + \lambda_n{}^2(\lambda_n+1)^2 Sin^2(\theta)Sinh^2(\eta)\left(Sinh^2(\eta) + Sin^2(\theta)\right)$$

$$Sinh^6(\eta) + Sin^6(\theta) = \left(Sinh^2(\eta) + Sin^2(\theta)\right)\left(Sinh^4(\eta) + Sinh^2(\eta)Sin^2(\theta) - Sin^4(\theta)\right)$$

$$\Rightarrow G \propto Cste\left(Sinh^2(\eta) + Sin^2(\theta)\right)$$

Il en est de même avec une valeur λ_n*. imaginaire comme dans le cas des fonctions coniques de Mehler. Et le choix d'une solution finie pour* $\eta=0$ *et* $\vartheta=0,\pi$*, aboutit aux même conclusions :*

$$Partie\ radiale \Rightarrow Lim_{\eta\to 0} Q_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(Cosh(\eta)) = +\infty \Rightarrow A\,P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(Cosh(\eta))$$

$$Partie\ angulaire \Rightarrow Lim_{\theta\to 0,\pi} Q_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(Cos(\theta)) = \pm\infty \Rightarrow A\,P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(Cos(\theta))$$

Solutions de l'équation de Laplace par séparation des variables

Les solutions de l'équation séparée dans les trois coordonnées sphéroïdales allongées sont :

$T(\eta,\theta,\varphi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$

cas général

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} R''(\eta) + Cotanh(\eta)R'(\eta) - \left[\alpha_2 + \dfrac{\alpha_3}{Sinh^2(\eta)}\right]R(\eta) = 0 \\ \Theta''(\theta) + \dfrac{Cos(\theta)}{Sin(\theta)}\Theta'(\theta) + \left[\alpha_2 - \dfrac{\alpha_3}{Sin^2(\theta)}\right]\Theta(\theta) = 0 \\ \Phi''(\varphi) + \alpha_3\Phi(\varphi) = 0 \end{array} \right.$$

$si \quad \alpha_2 = n(n+1)\ et\ \alpha_3 = m^2 \quad avec \quad n,m \quad entier,$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} R''(\eta) + \dfrac{Cosh(\eta)}{Sinh(\eta)}R'(\eta) - \left[n(n+1) + \dfrac{m^2}{Sinh^2(\eta)}\right]R(\eta) = 0 \Rightarrow R(\eta) = A\,P_n^m\big(Cosh(\eta)\big) + B\,Q_n^m\big(Cosh(\eta)\big) \\ \Theta''(\theta) + \dfrac{Cos(\theta)}{Sin(\theta)}\Theta'(\theta) + \left[n(n+1) - \dfrac{m^2}{Sin^2(\theta)}\right]\Theta(\theta) = 0 \Rightarrow \Theta(\theta) = A\,P_n^m\big(Cos(\theta)\big) + B\,Q_n^m\big(Cos(\theta)\big)\ tq\ m <= n \\ \Phi''(\varphi) + m^2\Phi(\varphi) = 0 \Rightarrow \Phi(\varphi) = A\,Cos(m\varphi) + B\,Sin(m\varphi) \end{array} \right.$$

$P_n^m(z)$ *Fonction de Legendre (de première espèce) de degré n et d'ordre m*

$Q_n^m(z)$ *Fonction de Legendre de deuxième espèce de degré n et d'ordre m*

$\Rightarrow valeur\ propre\ nulle \rightarrow si\ \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0$

$$\Rightarrow R''(\eta) + \frac{Cosh(\eta)}{Sinh(\eta)}R'(\eta) \Rightarrow R(\eta) = A + B\,Log[\frac{Cosh(\eta/2)}{Sinh(\eta/2)}]$$

$$\Theta(\theta) = C + D_0\ Log[\frac{1-Cos(\theta)}{1+Cos(\theta)}] = C + D_1 Log[\frac{Sin(\theta/2)}{Cos(\theta/2)}] = C + D_2 Log[\frac{Cos(\theta/2)}{Sin(\theta/2)}]$$

$\Phi(\varphi) = E + F\ \varphi$

Le choix effectué est celui d'une variable de séparation α_2 positive. C'est un choix qui est parfaitement adapté pour des problèmes aux limites dans la dimension angulaire, ou lorsque la géométrie du solide de révolution complet permet l'utilisation de la base complète des polynômes de Legendre ou des fonctions de Legendre associées d'ordre et de degré entiers.

Pour ce qui est du cas de la valeur propre nulle, la solution Logarithmique en ϑ comporte une singularité à angle nul, et n'est donc pas retenue-> D=0. La solution Logarithmique en η présente également une singularité en η=0, et ne peut donc être utilisée que lorsque le domaine ne comprend pas l'origine.

Lorsque l'on réduit à deux dimensions (η et ϑ) et que la géométrie du problème et des conditions aux limites implique, par exemple, que la solution ne dépend pas de ϕ, alors les deux équations séparées sont :

$$T(\eta,\theta) = R(r)\Theta(\theta)$$

$$cas\ général$$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} R''(\eta) + Cotanh(\eta)R'(\eta) - \alpha_2 R(\eta) = 0 \\ \Theta''(\theta) + \dfrac{Cos(\theta)}{Sin(\theta)}\Theta'(\theta) + \alpha_2\Theta(\theta) = 0 \end{array} \right.$$

$$si \quad \alpha_2 = n(n+1) \quad avec \quad n \quad entier,$$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} R''(\eta) + \dfrac{Cosh(\eta)}{Sinh(\eta)}R'(\eta) - n(n+1)R(\eta) = 0 \Rightarrow R(\eta) = A\,P_n\big(Cosh(\eta)\big) + B\,Q_n\big(Cosh(\eta)\big) \\ \Theta''(\theta) + \dfrac{Cos(\theta)}{Sin(\theta)}\Theta'(\theta) + n(n+1)\Theta(\theta) = 0 \Rightarrow \Theta(\theta) = A\,P_n\big(Cos(\theta)\big) + B\,Q_n\big(Cos(\theta)\big) \end{array} \right.$$

$$P_n(z)\ Fonction\,(polynôme)\ de\ Legendre\ (de\ première\ espèce)\ de\ degré\ n$$

$$Q_n(z) Fonction\ de\ Legendre\ de\ deuxième\ espèce\ de\ degré\ n$$

$$Cas\ où\ la\ géométrie\ du\ problème\ conduit\ la\ solution\ à\ ne\ dépendre\ que\ de\ \eta$$

$$\Rightarrow valeur\ propre\ nulle \rightarrow si\ \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0$$

$$\Rightarrow R''(\eta) + \frac{Cosh(\eta)}{Sinh(\eta)}R'(\eta) \Rightarrow R(\eta) = A + B\,Log[\frac{Cosh(\eta/2)}{Sinh(\eta/2)}]$$

$$\Theta(\theta) = C + D_0\ Log[\frac{1-Cos(\theta)}{1+Cos(\theta)}] = C + D_1 Log[\frac{Sin(\theta/2)}{Cos(\theta/2)}] = C + D_2 Log[\frac{Cos(\theta/2)}{Sin(\theta/2)}]$$

La solution logarithmique en ϑ comporte toujours une singularité à angle ϑ=0, et n'est donc pas retenue-> D=0. Lorsque la géométrie du problème et des conditions aux limites implique que l'on puisse réduire à une seule dimension radiale (η) et que , par exemple, la solution ne dépend que de cette variable η, alors la solution de l'équation devient :

$$T(\eta) = A + B\,Log\left(\frac{Cosh(\eta/2)}{Sinh(\eta/2)}\right)$$

La solution Logarithmique en η présente également une singularité en η=0, et ne peut donc être utilisée que lorsque le domaine ne comprend pas l'origine η=0 (un sphéroïde creux par exemple).

Un choix $\alpha_2 < 0$ donnerait des équations de la forme, en gardant un solide de révolution azimutale complet (soit une constante de séparation azimutale, en φ, égale à m entier) :

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} R''(\eta) + Cotanh(\eta)R'(\eta) + \left[\mu^2 - \dfrac{m^2}{Sinh^2(\eta)}\right]R(\eta) = 0 \\ \Theta''(\theta) + \dfrac{Cos(\theta)}{Sin(\theta)}\Theta'(\theta) - \left[\mu^2 + \dfrac{m^2}{Sin^2(\theta)}\right]\Theta(\theta) = 0 \\ \Phi''(\varphi) + m^2\Phi(\varphi) = 0 \end{array} \right.$$

$$Posons \begin{cases} z = Cosh(\eta) \\ Sinh(\eta) = \sqrt{z^2 - 1} \\ \dfrac{d}{d\eta} = \sqrt{z^2-1}\dfrac{d}{dz} \quad \dfrac{d^2}{d\eta^2} = \sqrt{z^2-1}\left(\dfrac{d}{dz}\left[\sqrt{z^2-1}\dfrac{d}{dz}\right]\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow R''(\eta) + Cotanh(\eta)R'(\eta) + \left[\mu^2 - \frac{m^2}{Sinh^2(\eta)}\right]R(\eta) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(1 - z^2\right)R''(z) - 2zR'(z) - \left[\mu^2 + \frac{m^2}{1-z^2}\right]R(z) = 0 \qquad Posons\ \mu^2 = \frac{1}{4} + \tau^2$$

$$\Leftrightarrow \left(1 - z^2\right)R''(z) - 2zR'(z) + \left[-\left(\frac{1}{4} + \tau^2\right) - \frac{m^2}{1-z^2}\right]R(z) = 0 \Rightarrow \nu = -\frac{1}{2} + i\tau \quad et \quad \nu(\nu+1) = -\left(\frac{1}{4} + \tau^2\right)$$

$$R(z) = A\, P^{\pm m}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(z) + B\, Q^{\pm m}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(z) \Leftrightarrow R(\eta) = A\, P^{\pm m}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta)) + B\, Q^{\pm m}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta))$$

$$Pour\ \Theta(\theta)\ il\ vient\ \Theta(\theta) = A\, P^{\pm m}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\theta)) + B\, Q^{\pm m}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\theta))$$

Ce choix de solutions est adapté à des problèmes aux limites inhomogènes en dimension angulaire ϑ (sur des cônes sphéroïdales c'est à dire des hyperboloïdes), pourvu que la dimension radiale ne comporte pas l'origine des coordonnées, car dans ce cas il n'est pas possible d'exhiber un système de fonctions propres. Toutefois grâce à une représentation intégrale dîtes de Mehler-Fock et un théorème du même nom), on peut construire formellement des solutions sur un hyperboloïde de révolution complet. Nous verrons ces cas plus loin dans l'exposé.

Exemples divers de problèmes intérieurs sur des sphéroïdes et "Hémisphéroïde" allongés pleins ou creux

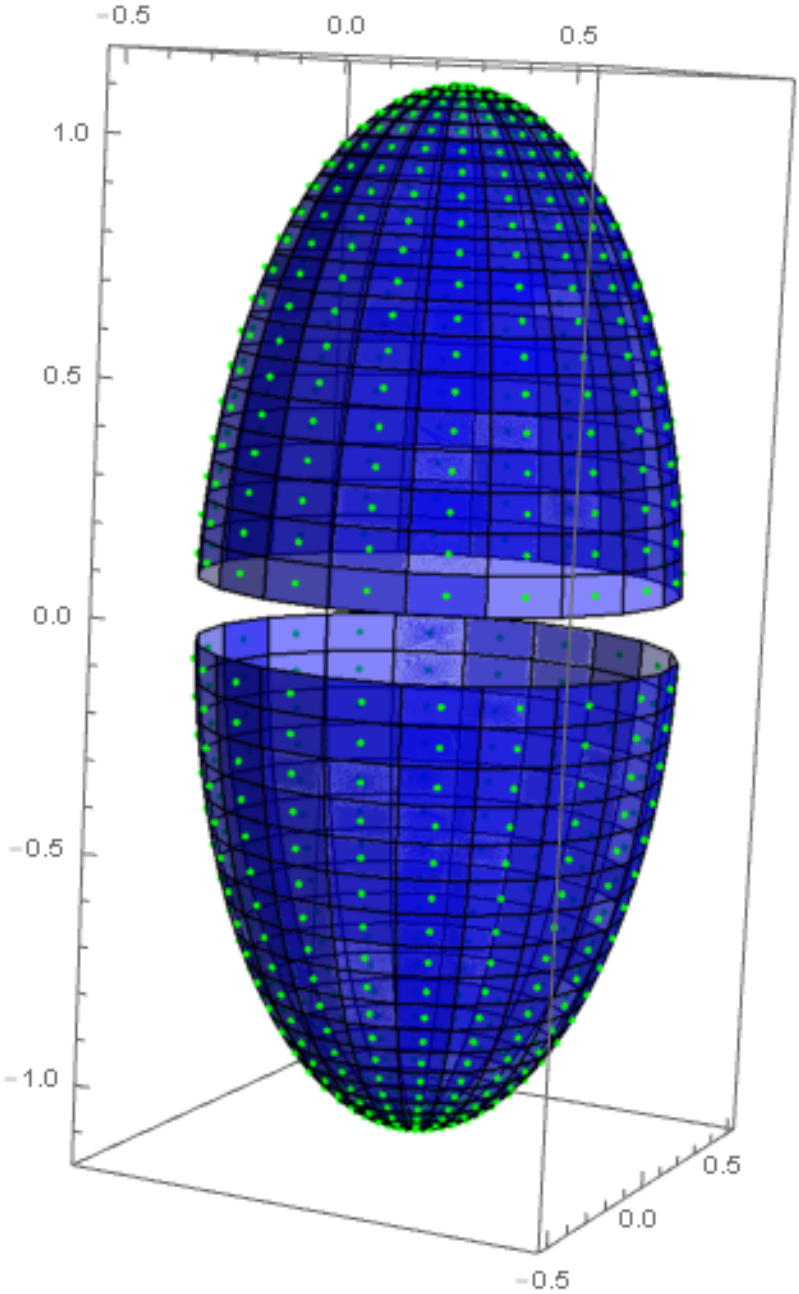
Exemple : Sphéroïde allongé plein (η,ϑ) soumis à des conditions aux limites de Dirichlet inhomogènes en $\eta=l_\eta$

Soit le problème intérieur :

$$\Delta T(\eta,\theta)=0$$

$$T(\eta,\theta)\big|_{\eta=l_\eta}=1-Heaviside(\theta-\pi/2) \quad \textit{fonction de Heaviside}$$

$$T(\eta,\theta)\ \textit{fini}$$



La solution est indépendante de φ et se développe en série de polynôme de Legendre

$$T(\eta,\theta) = A_0 + B_0\, Log\left(\frac{Cosh(\eta/2)}{Sinh(\eta/2)}\right) + \sum_{n=1,+\infty}\left(A_\eta\, P_n\left(Cosh(\eta)\right) + B_\eta\, Q_n\left(Cosh(\eta)\right)\right)\left(A_\theta P_n\left(Cos(\theta)\right) + B_\theta\, Q_n\left(Cos(\theta)\right)\right)$$

Les conditions de finitude de la solution en η=0 et ϑ=π/2, ainsi que le respect de la condition aux limites implique que B_0=B_η=B_ϑ=0, et cela donne une solution de la forme :

$$T(\eta,\theta) = A_0 + \sum_{n=1,+\infty} A_n P_n\left(Cosh(\eta)\right) P_n\left(Cos(\theta)\right)$$

. Soit en utilisant les propriétés d'orthogonalité des fonctions propres (ainsi que des calculs déjà réalisé pour une sphère pleine) cela donne le résultat recherché.

$$P_0(z) = 1, P_n(z) \Rightarrow \|P_n\|^2 = \int_{-1}^{1} dz\; P_n(z)^2 = \frac{2}{(2n+1)}$$

$$C.L. \quad T(\eta,\theta)\big|_{\eta=l_\eta} = 1 - Heaviside(\theta - \pi/2) \quad fonction\ de\ Heaviside$$

$$\Rightarrow B_0 = \frac{1}{2} \quad et \quad B_n = \frac{\int_0^{\pi/2} d\theta\; Sin(\theta)\; P_n\left(Cos(\theta)\right)}{P_n\left(Cosh(l_\eta)\right)\|P_n\|^2} = \frac{\int_0^{1} dz\; P_n(z)}{P_n\left(Cosh(l_\eta)\right)\|P_n\|^2}$$

$$B_{2n} = 0 \quad B_{2n+1} = \frac{(-1)^n (2n-1)!(4n+3)}{2^{2n+1} P_{2n+1}\left(Cosh(l_\eta)\right)(n-1)!(n+1)!}$$

$$T(\eta,\theta) = \frac{1}{2} + \sum_{n=0,+\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)!(4n+3)}{2^{2n+1}(n-1)!(n+1)!} \frac{P_{2n+1}(Cosh(\eta))}{P_{2n+1}\left(Cosh(l_\eta)\right)} P_{2n+1}(Cos(\theta))$$

ou bien

$$T(\eta,\theta) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=0,+\infty} (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{(4n+3)}{2(n+1)} \frac{P_{2n+1}(Cosh(\eta))}{P_{2n+1}\left(Cosh(l_\eta)\right)} P_{2n+1}(Cos(\theta))$$

Par la suite on utilisera abondamment les calculs déjà réalisés pour la sphère pleine, creuse, et les cônes ainsi que les sections coniques sphériques, dans le cas d'une géométrie de sphéroïde déclinés dans les mêmes configurations. Il suffit de remplacer le terme radial sphérique par son équivalent sphéroïdal allongé.

Lorsque les conditions aux limites sont inversées, soit

$$\Delta T(\eta,\theta)=0 \quad T(\eta,\theta)\ fini$$

$$T(\eta,\theta)\big|_{\eta=l_\eta}=Heaviside(\theta-\pi/2) \quad fonction\ de\ Heaviside$$

Alors la solution est de la forme :

$$T(\eta,\theta)=\frac{1}{2}-\sum_{n=0,+\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!(4n+3)}{2^{2n+1}(n-1)!(n+1)!}\frac{P_{2n+1}(Cosh(\eta))}{P_{2n+1}\big(Cosh(l_\eta)\big)}P_{2n+1}(Cos(\theta))$$

ou bien

$$T(\eta,\theta)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sum_{n=0,+\infty}(-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{(4n+3)}{2(n+1)}\frac{P_{2n+1}(Cosh(\eta))}{P_{2n+1}\big(Cosh(l_\eta)\big)}P_{2n+1}(Cos(\theta))$$

Supposons maintenant que les "Hémisphéroïdes" supérieure et inférieure soit à des températures différentes respectivement T_0 et T_1. Alors par principe de superposition nous avons :

$$T(\eta,\theta)=\frac{T_0+T_1}{2}+\big(T_0-T_1\big)\sum_{n=0,+\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!(4n+3)}{2^{2n+1}(n-1)!(n+1)!}\frac{P_{2n+1}(Cosh(\eta))}{P_{2n+1}\big(Cosh(l_\eta)\big)}P_{2n+1}(Cos(\theta))$$

ou bien

$$T(r,\eta)=\frac{T_0+T_1}{2}+\frac{\big(T_0-T_1\big)}{2}\sum_{n=0,+\infty}(-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{(4n+3)}{2(n+1)}\frac{P_{2n+1}(Cosh(\eta))}{P_{2n+1}\big(Cosh(l_\eta)\big)}P_{2n+1}(Cos(\theta))$$

.

Si T_0 =1 et T_1=-1 alors

$$T(\eta,\theta)=2\sum_{n=0,+\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!(4n+3)}{2^{2n+1}(n-1)!(n+1)!}\frac{P_{2n+1}(Cosh(\eta))}{P_{2n+1}\big(Cosh(l_\eta)\big)}P_{2n+1}(Cos(\theta))$$

ou bien

$$T(\eta,\theta)=\sum_{n=0,+\infty}(-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{(4n+3)}{2(n+1)}\frac{P_{2n+1}(Cosh(\eta))}{P_{2n+1}\big(Cosh(l_\eta)\big)}P_{2n+1}(Cos(\theta))$$

Pour le problème plus général :

$$\Delta T(\eta,\theta)=0$$

$$T(\eta,\theta)\big|_{\eta=l_\eta}=f_\theta(\theta)=f_\theta(Cos(\theta))$$

$$T(\eta,\theta)\ fini$$

La solution s'écrit :

$$B_0=\int_0^\pi d\theta\ Sin(\theta)\ f_\theta(\theta) \quad B_n=\int_0^\pi d\theta\ Sin(\theta)\ f_\theta(\theta)\ P_n\big(Cos(\theta)\big)$$

$$T(\eta,\theta)=\frac{B_0}{2}+\sum_{n=1,+\infty}B_n\frac{(2n+1)}{2}\frac{P_n(Cosh(\eta))}{P_n\big(Cosh(l_\eta)\big)}P_n(Cos(\theta))$$

$$z=Cos(\theta) \quad B_0=\int_{-1}^{1}dz\ f_\theta(z) \quad B_n=\int_{-1}^{1}dz\ f_\theta(z)\ P_n(z)$$

$$T(r,\theta)=\frac{B_0}{2}+\sum_{n=1,+\infty}B_n\frac{(2n+1)}{2}\frac{P_n(Cosh(\eta))}{P_n\big(Cosh(l_\eta)\big)}P_n(Cos(\theta))$$

Exemple : Sphéroïde allongé plein (η,ϑ) soumis à des conditions aux limites de Neumann inhomogènes en $\eta=l_\eta$

Si le problème intérieur s'exprime sous la forme :

$$\Delta T(\eta,\theta)=0$$

$$T_\eta^{'}(\eta,\theta)\Big|_{\eta=l_\eta}=f_\theta(Cos(\theta))$$

$$T(\eta,\theta)\ fini$$

Alors la solution (à une constante près quelconque) s'écrit sous la forme :

$$z=Cos(\theta)\quad \frac{dP_n(Cosh(\eta))}{d\eta}=Sinh(\eta)P_n'(Cosh(\eta))$$

$$\Rightarrow f_\theta(Cos(\theta))=\sum_{n=1,+\infty}C_n Sinh(l_\eta)P_n'(Cosh(l_\eta))\ P_n(Cos(\theta))$$

$$P_n'(Cosh(l_\eta))=\frac{n\big(Cosh(l_\eta)P_n(Cosh(l_\eta))-P_{n-1}(Cosh(l_\eta))\big)}{Cosh^2(l_\eta)-1}=\frac{n\big(Cosh(l_\eta)P_n(Cosh(l_\eta))-P_{n-1}(Cosh(l_\eta))\big)}{Sinh^2(l_\eta)}$$

$$Sinh(l_\eta)P_n'(Cosh(l_\eta))=\frac{n\big(Cosh(l_\eta)P_n(Cosh(l_\eta))-P_{n-1}(Cosh(l_\eta))\big)}{Sinh(l_\eta)}$$

$$C_n=\frac{(2n+1)Sinh(l_\eta)}{2n\big(Cosh(l_\eta)P_n(Cosh(l_\eta))-P_{n-1}(Cosh(l_\eta))\big)}\int_{-1}^{1}dz\ f_\theta(z)\ P_n(z)$$

$$B_0\ quelconque\quad B_n=\int_{-1}^{1}dz\ f_\theta(z)\ P_n(z)$$

$$T(\eta,\theta)=B_0+\sum_{n=1,+\infty}B_n\frac{(2n+1)}{2n}\frac{Sinh(l_\eta)P_n(Cosh(\eta))P_n(Cos(\theta))}{\big(Cosh(l_\eta)P_n(Cosh(l_\eta))-P_{n-1}(Cosh(l_\eta))\big)}$$

Exemple : Sphéroïde allongé plein (η,ϑ) soumis à des conditions aux limites de Robin inhomogènes en $\eta=l_\eta$

Si le problème intérieur s'exprime sous la forme :

$$\Delta T(\eta,\theta)=0\quad T(\eta,\theta)\ fini$$

$$\alpha T_\eta^{'}(\eta,\theta)+\beta\,T(\eta,\theta)\Big|_{\eta=l_\eta}=f_\theta(Cos(\theta))$$

.

Alors la solution s'écrit sous la forme :

$$z = Cos(\theta) \quad \left.\frac{dP_n(Cosh(\eta))}{d\eta}\right|_{\eta=l_\eta} = Sinh(l_\eta)P_n'(Cosh(l_\eta)) = \frac{n\big(Cosh(l_\eta)P_n(Cosh(l_\eta)) - P_{n-1}(Cosh(l_\eta))\big)}{Sinh(l_\eta)}$$

$$\Rightarrow f_\theta(Cos(\theta)) = \sum_{n=1,+\infty} C_n Sinh(l_\eta)\big(\alpha\, P_n'(Cosh(l_\eta)) + \beta\, P_n(Cosh(l_\eta))\big) P_n(Cos(\theta))$$

$$C_n = \frac{(2n+1)}{2\left(\alpha \dfrac{n\big(Cosh(l_\eta)P_n(Cosh(l_\eta)) - P_{n-1}(Cosh(l_\eta))\big)}{Sinh(l_\eta)} + \beta\, P_n(Cosh(l_\eta))\right)} \int_{-1}^{1} dz\; f_\theta(z)\, P_n(z)$$

$$C_n = \frac{(2n+1)Sinh(l_\eta)}{2\big(\alpha\, n\big(Cosh(l_\eta)P_n(Cosh(l_\eta)) - P_{n-1}(Cosh(l_\eta))\big) + \beta\, Sinh(l_\eta)P_n(Cosh(l_\eta))\big)}$$

$$B_0 = \int_{-1}^{1} dz\; f_\theta(z) \qquad B_n = \int_{-1}^{1} dz\; f_\theta(z)\, P_n(z)$$

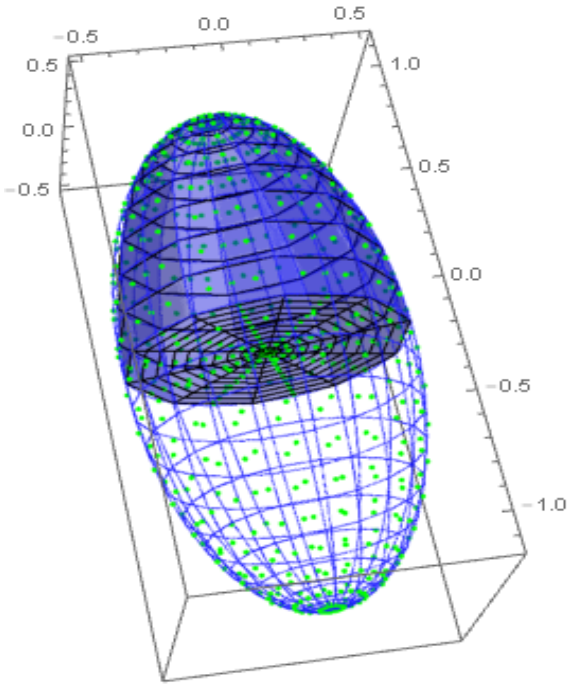
$$T(r,\theta) = \frac{B_0}{2\beta} + \sum_{n=1,+\infty} \frac{(2n+1)}{2} \frac{Sinh(l_\eta)P_n(Cosh(\eta))P_n(Cos(\theta))}{\big(\alpha\, n\big(Cosh(l_\eta)P_n(Cosh(l_\eta)) - P_{n-1}(Cosh(l_\eta))\big) + \beta\, Sinh(l_\eta)P_n(Cosh(l_\eta))\big)}$$

Exemple : "Hémisphéroïde" allongé plein (η,ϑ) soumise à des conditions aux limites de Dirichlet inhomogènes en η=l_η homogènes en *θ=π/2*

Commençons par un problème intérieur dans une "Hémisphéroïde" soumise aux conditions :

$$\Delta T(\eta,\theta) = 0 \quad T(\eta,\theta)\ fini$$

$$T(\eta,\theta)\big|_{\eta=l_\eta} = 1 \quad T(\eta,\theta)\big|_{\theta=\pi/2} = 0$$



Utilisons une astuce, et considérons le problème d'une sphéroïde pleine soumise aux conditions aux limites impaires en θ

$$\Delta T(\eta,\theta)=0 \quad T(\eta,\theta)\ fini$$

$$T(\eta,\theta)\big|_{\eta=l_\eta}=1\ pour\ \theta\in[0,\pi/2]$$

$$T(\eta,\theta)\big|_{\eta=l_\eta}=-1\ pour\ \theta\in[\pi/2,\pi]$$

On voit que la solution de ce problème doit nécessairement comporter une valeur nulle sur la tranche. Dans ces conditions la solution du deuxième problème dans "l'Hémisphéroïde" supérieure est la solution du premier problème dans le même "Hémisphéroïde". Le deuxième problème possède la solution suivante comme nous l'avons vu dans un exemple précédent :

$$T(\eta,\theta)=2\sum_{n=0,+\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!(4n+3)}{2^{2n+1}(n-1)!(n+1)!}\frac{P_{2n+1}(Cosh(\eta))}{P_{2n+1}\big(Cosh(l_\eta)\big)}P_{2n+1}(Cos(\theta))$$

ou bien

$$T(\eta,\theta)=\sum_{n=0,+\infty}(-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{(4n+3)}{2(n+1)}\frac{P_{2n+1}(Cosh(\eta))}{P_{2n+1}\big(Cosh(l_\eta)\big)}P_{2n+1}(Cos(\theta))$$

Pour le problème plus général sur "l'Hémisphéroïde" :

$$\Delta T(\eta,\theta)=0 \quad T(\eta,\theta)\ fini$$

$$T(\eta,\theta)\big|_{\eta=l_\eta}=f_\theta(Cos(\theta))$$

$$T(\eta,\theta)\big|_{\theta=\pi/2}=0$$

On utilise également l'extension au problème du sphéroïde avec des conditions aux limites impaires, soit :

$$\Delta T(r,\theta)=0$$

$$T(r,\theta)\big|_{r=l_r}=f_\theta(Cos(\theta)) \quad pour\ \theta\in[0,\pi/2]$$

$$T(r,\theta)\big|_{r=l_r}=-f_\theta(Cos(\pi-\theta)) \quad pour\ \theta\in[\pi/2,\pi]$$

$$T(r,\theta)\ fini$$

Alors la solution s'écrit sous la forme :

$$B_0=0$$

$$B_n=(1-(-1)^n)\int_0^1 dz\ f_\theta(z)\ P_n(z)\Rightarrow B_{2n}=0 \quad B_{2n+1}=2\int_0^1 dz\ f_\theta(z)\ P_{2n+1}(z)\Rightarrow C_n=\int_0^1 dz\ f_\theta(z)\ P_{2n+1}(z)$$

$$T(\eta,\theta)=\sum_{n=0,+\infty}C_n(4n+3)\frac{P_{2n+1}(Cosh(\eta))}{P_{2n+1}\big(Cosh(l_\eta)\big)}P_{2n+1}(Cos(\theta))$$

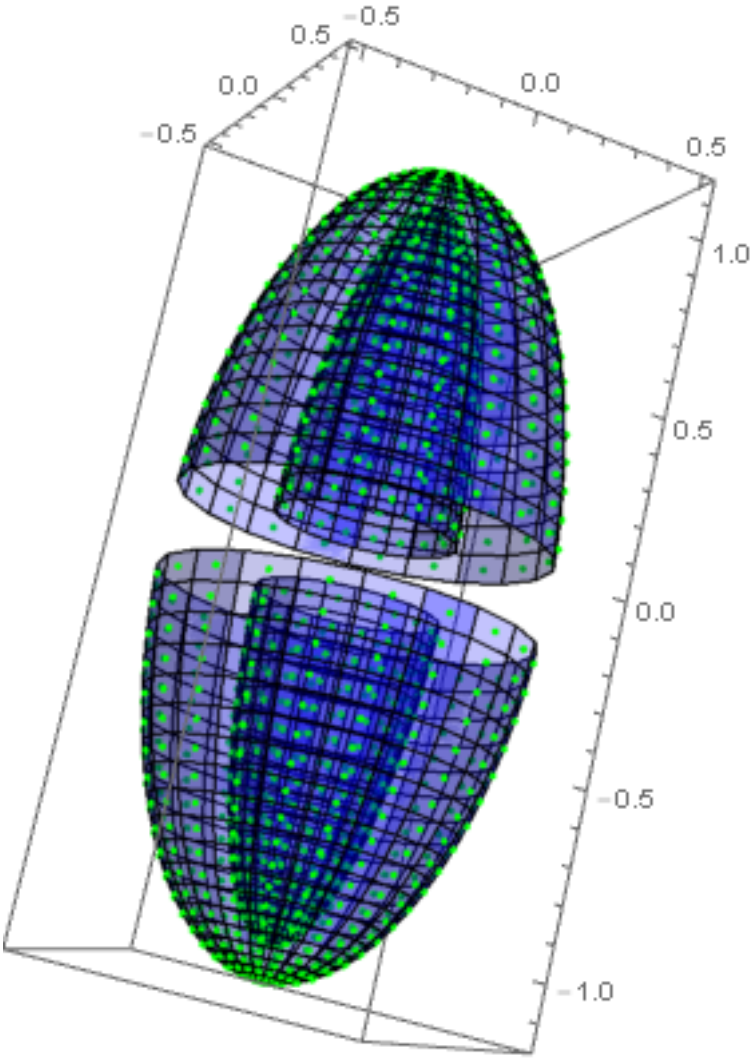
Exemple : Sphéroïde allongé creux (η,ϑ) soumis à des conditions aux limites de Dirichlet inhomogènes en η=$l_{\eta 2}$ et Dirichlet homogènes en η=$l_{\eta 1}$.

Soit le problème intérieur :

$$\Delta T(\eta,\theta)=0$$

$$T(\eta,\theta)\big|_{\eta=l_{\eta 1}}=0$$

$$T(\eta,\theta)\big|_{\eta=l_{\eta 2}}=1\ si\ \theta\in[0,\pi/2]\quad 0\quad sinon$$



Cette fois les conditions de finitude en η=0 ne s'applique pas car le point est en dehors du domaine d'étude (toutefois les conditions en θ reste les mêmes). La solution se développe donc sous la forme

$$T(\eta,\theta)=A_0+B_0\,Log\left(\frac{Cosh(\eta/2)}{Sinh(\eta/2)}\right)+\sum_{n=1,+\infty}\left(A_\eta\,P_n(Cosh(\eta))+B_\eta\,Q_n(Cosh(\eta))\right)P_n(Cos(\theta))$$

La solution est indépendante de φ et se développe en série de polynôme de Legendre

Valeur propre n

$$T(\eta,\theta)\big|_{\eta=l_{\eta 1}}=0 \Rightarrow \textit{partie radiale} \propto \left(\frac{P_n\big(Cosh(\eta)\big)}{P_n\big(Cosh(l_{\eta 1})\big)}-\frac{Q_n\big(Cosh(\eta)\big)}{Q_n\big(Cosh(l_{\eta 1})\big)}\right)$$

Valeur propre 0

$$T(\eta,\theta)\big|_{\eta=l_{\eta 1}}=0 \Rightarrow \textit{partie radiale} \propto Log\left(\frac{Cosh(\eta/2)}{Sinh(\eta/2)}\right)-Log\left(\frac{Cosh(l_{\eta 1}/2)}{Sinh(l_{\eta 1}/2)}\right) \propto Log\left(\frac{Cosh(\eta/2)}{Sinh(\eta/2)}\frac{Sinh(l_{\eta 1}/2)}{Cosh(l_{\eta 1}/2)}\right)$$

$$T(\eta,\theta)=\frac{1}{2}\frac{Log\left(\frac{Cosh(\eta/2)}{Sinh(\eta/2)}\frac{Sinh(l_{\eta 1}/2)}{Cosh(l_{\eta 1}/2)}\right)}{Log\left(\frac{Cosh(l_{\eta 2}/2)}{Sinh(l_{\eta 2}/2)}\frac{Sinh(l_{\eta 1}/2)}{Cosh(l_{\eta 1}/2)}\right)}$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{n=0,+\infty}\frac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{(4n+3)}{2(n+1)}\frac{\left(\frac{P_{2n+1}\big(Cosh(\eta)\big)}{P_{2n+1}\big(Cosh(l_{\eta 1})\big)}-\frac{Q_{2n+1}\big(Cosh(\eta)\big)}{Q_{2n+1}\big(Cosh(l_{\eta 1})\big)}\right)}{\left(\frac{P_{2n+1}\big(Cosh(l_{\eta 2})\big)}{P_{2n+1}\big(Cosh(l_{\eta 1})\big)}-\frac{Q_{2n+1}\big(Cosh(l_{\eta 2})\big)}{Q_{2n+1}\big(Cosh(l_{\eta 1})\big)}\right)}P_{2n+1}(Cos(\theta))$$

Pour un problème plus général :

$$\Delta T(\eta,\theta)=0 \quad T(\eta,\theta)\big|_{\eta=l_{\eta 1}}=0 \quad T(\eta,\theta)\big|_{\eta=l_{\eta 2}}=f_\theta(\theta)$$

$$Si\ f_\theta(\theta)=f_\theta(Cos(\theta))$$

cela donne :

$$B_0=\int_0^\pi d\theta\ Sin(\theta)\ f_\theta(\theta) \quad B_n=\int_0^\pi d\theta\ Sin(\theta)\ f_\theta(\theta)\ P_n\big(Cos(\theta)\big)$$

$$z=Cos(\theta) \quad B_0=\int_{-1}^{1}dz\ f_\theta(z) \quad B_n=\int_{-1}^{1}dz\ f_\theta(z)\ P_n(z)$$

$$T(\eta,\theta)=\frac{B_0}{2}\frac{Log\left(\frac{Cosh(\eta/2)}{Sinh(\eta/2)}\frac{Sinh(l_{\eta 1}/2)}{Cosh(l_{\eta 1}/2)}\right)}{Log\left(\frac{Cosh(l_{\eta 2}/2)}{Sinh(l_{\eta 2}/2)}\frac{Sinh(l_{\eta 1}/2)}{Cosh(l_{\eta 1}/2)}\right)}+\sum_{n=1,+\infty}B_n\frac{(2n+1)}{2}\frac{\left(\frac{P_{2n+1}\big(Cosh(\eta)\big)}{P_{2n+1}\big(Cosh(l_{\eta 1})\big)}-\frac{Q_{2n+1}\big(Cosh(\eta)\big)}{Q_{2n+1}\big(Cosh(l_{\eta 1})\big)}\right)}{\left(\frac{P_{2n+1}\big(Cosh(l_{\eta 2})\big)}{P_{2n+1}\big(Cosh(l_{\eta 1})\big)}-\frac{Q_{2n+1}\big(Cosh(l_{\eta 2})\big)}{Q_{2n+1}\big(Cosh(l_{\eta 1})\big)}\right)}P_n(Cos(\theta))$$

Par exemple pour deux "Hémisphéroïdes" portés à des températures différentes

$$\Delta T(\eta,\theta)=0 \quad T(\eta,\theta)\big|_{\eta=l_{\eta 1}}=0$$

$$T(\eta,\theta)\big|_{\eta=l_{\eta 2}}=T_0 \; si \; \theta\in[0,\pi/2]$$

$$T(\eta,\theta)\big|_{\eta=l_{\eta 2}}=T_1 \; si \; \theta\in[\pi/2,\pi]$$

il vient :

$$T(\eta,\theta)=\frac{T_0+T_1}{2}\frac{Log\left(\frac{Cosh(\eta/2)}{Sinh(\eta/2)}\frac{Sinh(l_{\eta 1}/2)}{Cosh(l_{\eta 1}/2)}\right)}{Log\left(\frac{Cosh(l_{\eta 2}/2)}{Sinh(l_{\eta 2}/2)}\frac{Sinh(l_{\eta 1}/2)}{Cosh(l_{\eta 1}/2)}\right)}$$

$$+\left(T_0-T_1\right)\sum_{n=0,+\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!(4n+3)}{2^{2n+1}(n-1)!(n+1)!}\frac{\left(\frac{P_{2n+1}\left(Cosh(\eta)\right)}{P_{2n+1}\left(Cosh(l_{\eta 1})\right)}-\frac{Q_{2n+1}\left(Cosh(\eta)\right)}{Q_{2n+1}\left(Cosh(l_{\eta 1})\right)}\right)}{\left(\frac{P_{2n+1}\left(Cosh(l_{\eta 2})\right)}{P_{2n+1}\left(Cosh(l_{\eta 1})\right)}-\frac{Q_{2n+1}\left(Cosh(l_{\eta 2})\right)}{Q_{2n+1}\left(Cosh(l_{\eta 1})\right)}\right)}P_{2n+1}(Cos(\theta))$$

ou bien

$$T(\eta,\theta)=\frac{T_0+T_1}{2}\frac{Log\left(\frac{Cosh(\eta/2)}{Sinh(\eta/2)}\frac{Sinh(l_{\eta 1}/2)}{Cosh(l_{\eta 1}/2)}\right)}{Log\left(\frac{Cosh(l_{\eta 2}/2)}{Sinh(l_{\eta 2}/2)}\frac{Sinh(l_{\eta 1}/2)}{Cosh(l_{\eta 1}/2)}\right)}$$

$$+\frac{\left(T_0-T_1\right)}{2}\sum_{n=0,+\infty}(-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{(4n+3)}{2(n+1)}\frac{\left(\frac{P_{2n+1}\left(Cosh(\eta)\right)}{P_{2n+1}\left(Cosh(l_{\eta 1})\right)}-\frac{Q_{2n+1}\left(Cosh(\eta)\right)}{Q_{2n+1}\left(Cosh(l_{\eta 1})\right)}\right)}{\left(\frac{P_{2n+1}\left(Cosh(l_{\eta 2})\right)}{P_{2n+1}\left(Cosh(l_{\eta 1})\right)}-\frac{Q_{2n+1}\left(Cosh(l_{\eta 2})\right)}{Q_{2n+1}\left(Cosh(l_{\eta 1})\right)}\right)}P_{2n+1}(Cos(\theta))$$

Si T_0 =- T_1=1 alors

$$T(\eta,\theta)=2\sum_{n=0,+\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!(4n+3)}{2^{2n+1}(n-1)!(n+1)!}\frac{\left(\frac{P_{2n+1}\left(Cosh(\eta)\right)}{P_{2n+1}\left(Cosh(l_{\eta 1})\right)}-\frac{Q_{2n+1}\left(Cosh(\eta)\right)}{Q_{2n+1}\left(Cosh(l_{\eta 1})\right)}\right)}{\left(\frac{P_{2n+1}\left(Cosh(l_{\eta 2})\right)}{P_{2n+1}\left(Cosh(l_{\eta 1})\right)}-\frac{Q_{2n+1}\left(Cosh(l_{\eta 2})\right)}{Q_{2n+1}\left(Cosh(l_{\eta 1})\right)}\right)}P_{2n+1}(Cos(\theta))$$

ou bien

$$T(\eta,\theta)=\sum_{n=0,+\infty}(-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{(4n+3)}{2(n+1)}\frac{\left(\frac{P_{2n+1}\left(Cosh(\eta)\right)}{P_{2n+1}\left(Cosh(l_{\eta 1})\right)}-\frac{Q_{2n+1}\left(Cosh(\eta)\right)}{Q_{2n+1}\left(Cosh(l_{\eta 1})\right)}\right)}{\left(\frac{P_{2n+1}\left(Cosh(l_{\eta 2})\right)}{P_{2n+1}\left(Cosh(l_{\eta 1})\right)}-\frac{Q_{2n+1}\left(Cosh(l_{\eta 2})\right)}{Q_{2n+1}\left(Cosh(l_{\eta 1})\right)}\right)}P_{2n+1}(Cos(\theta))$$

Exemple : Sphéroïde allongé creux (η,ϑ) soumis à des conditions aux limites de Robin inhomogènes en η=$l_{\eta 2}$ et Dirichlet homogènes en η=$l_{\eta 1}$

Si le problème intérieur s'exprime sous la forme :

$$\Delta T(\eta,\theta)=0 \quad T(\eta,\theta)\ fini$$

$$T(\eta,\theta)\Big|_{\eta=l_{\eta 1}}=0 \quad \alpha\, T_\eta^{'}(\eta,\theta)+\beta\, T(\eta,\theta)\Big|_{\eta=l_{\eta 2}}=f_\theta(Cos(\theta))$$

Alors la solution s'écrit sous la forme :

$$Valeur\ propre\ n$$

$$T(\eta,\theta)\Big|_{\eta=l_{\eta 1}}=0 \Rightarrow partie\ radiale() \propto \left(\frac{P_n(Cosh(\eta))}{P_n(Cosh(l_{\eta 1}))}-\frac{Q_n(Cosh(\eta))}{Q_n(Cosh(l_{\eta 1}))}\right)$$

$$\frac{dP_n(Cosh(\eta))}{d\eta}\Bigg|_{\eta=l_{\eta 2}}=Sinh(l_{\eta 2})P_n'(Cosh(l_{\eta 2}))=\frac{n\big(Cosh(l_{\eta 2})P_n(Cosh(l_{\eta 2}))-P_{n-1}(Cosh(l_{\eta 2}))\big)}{Sinh(l_{\eta 2})}$$

$$\frac{dQ_n(Cosh(\eta))}{d\eta}\Bigg|_{\eta=l_{\eta 2}}=\frac{n\big(Cosh(l_{\eta 2})Q_n(Cosh(l_{\eta 2}))-Q_{n-1}(Cosh(l_{\eta 2}))\big)}{Sinh(l_{\eta 2})}$$

$$Posons\ D_n=\left(\begin{array}{l}\dfrac{\alpha\, n}{Sinh(l_{\eta 2})}\left(\dfrac{Cosh(l_{\eta 2})P_n(Cosh(l_{\eta 2}))-P_{n-1}(Cosh(l_{\eta 2}))}{P_n(Cosh(l_{\eta 1}))}-\dfrac{Cosh(l_{\eta 2})Q_n(Cosh(l_{\eta 2}))-Q_{n-1}(Cosh(l_{\eta 2}))}{Q_n(Cosh(l_{\eta 1}))}\right)\\ +\beta\left(\dfrac{P_n(Cosh(l_{\eta 2}))}{P_n(Cosh(l_{\eta 1}))}-\dfrac{Q_n(Cosh(l_{\eta 2}))}{Q_n(Cosh(l_{\eta 1}))}\right)\end{array}\right)$$

$$Valeur\ propre\ 0$$

$$T(\eta,\theta)\Big|_{\eta=l_{\eta 1}}=0 \Rightarrow partie\ radiale \propto Log\left(\frac{Cosh(\eta/2)}{Sinh(\eta/2)}\frac{Sinh(l_{\eta 1}/2)}{Cosh(l_{\eta 1}/2)}\right)=Log\left(\frac{Tanh(l_{\eta 1}/2)}{Tanh(\eta/2)}\right)=Log\left(\frac{Cotanh(\eta/2)}{Cotanh(l_{\eta 1}/2)}\right)$$

$$\frac{d}{d\eta}\left(Log\left(\frac{Cotanh(\eta/2)}{Cotanh(l_{\eta 1}/2)}\right)\right)\Bigg|_{\eta=l_{\eta 2}}=-\frac{1}{Cosh(l_{\eta 2}/2)Sinh(l_{\eta 2}/2)}=-\frac{1}{Cosh(l_{\eta 2})}$$

$$Posons\ D_0=-\frac{\alpha}{Cosh(l_{\eta 2})}+\beta\, Log\left(\frac{Tanh(l_{\eta 1}/2)}{Tanh(l_{\eta 2}/2)}\right)$$

$$Condition\ aux\ limites\ \eta=l_{\eta 2} \Rightarrow \alpha\, T_\eta^{'}(\eta,\theta)+\beta\, T(\eta,\theta)\Big|_{\eta=l_{\eta 2}}=f_\theta(Cos(\theta))$$

$$\Rightarrow z=Cos(\theta) \quad et \quad f_\theta(Cos(\theta))=C_0D_0+\sum_{n=1,+\infty} C_n\frac{(2n+1)}{2}D_nP_n(Cos(\theta))$$

$$C_n=\frac{(2n+1)}{2\,D_n}\int_{-1}^{1}dz\ f_\theta(z)\,P_n(z) \quad C_0=\frac{1}{2\,D_0}\int_{-1}^{1}dz\ f_\theta(z)$$

$$B_0=\int_{-1}^{1}dz\ f_\theta(z) \quad B_n=\int_{-1}^{1}dz\ f_\theta(z)\,P_n(z)$$

$$T(r,\theta)=\frac{B_0}{2}\frac{Log\left(\dfrac{Tanh(l_{\eta 1}/2)}{Tanh(\eta/2)}\right)}{D_0}+\sum_{n=1,+\infty}\frac{B_n(2n+1)\left(\dfrac{P_n(Cosh(\eta))}{P_n(Cosh(l_{\eta 1}))}-\dfrac{Q_n(Cosh(\eta))}{Q_n(Cosh(l_{\eta 1}))}\right)}{2\,D_n}P_n(Cos(\theta))$$

Qui redonne la solution lorsque la condition devient de Neumann α=1 et β=0 :

$$z = Cos(\theta) \quad B_0 = \int_{-1}^{1} dz\ f_\theta(z) \quad B_n = \int_{-1}^{1} dz\ f_\theta(z)\ P_n(z)$$

$$\alpha = 1\ et\ \beta = 0 \Rightarrow$$

$$D_n = \frac{n}{Sinh(l_{\eta 2})}\left(\frac{Cosh(l_{\eta 2})P_n(Cosh(l_{\eta 2})) - P_{n-1}(Cosh(l_{\eta 2}))}{P_n\left(Cosh(l_{\eta 1})\right)} - \frac{Cosh(l_{\eta 2})Q_n(Cosh(l_{\eta 2})) - Q_{n-1}(Cosh(l_{\eta 2}))}{Q_n\left(Cosh(l_{\eta 1})\right)}\right)$$

$$D_0 = -\frac{1}{Cosh(l_{\eta 2})}$$

$$T(r,\theta) = -\frac{B_0}{2}Cosh(l_{\eta 2})Log\left(\frac{Tanh(l_{\eta 1}/2)}{Tanh(\eta/2)}\right) + \frac{1}{2}\sum_{n=1,+\infty}\frac{B_n(2n+1)\left(\frac{P_n(Cosh(\eta))}{P_n\left(Cosh(l_{\eta 1})\right)} - \frac{Q_n(Cosh(\eta))}{Q_n\left(Cosh(l_{\eta 1})\right)}\right)}{D_n}P_n(Cos(\theta))$$

Ainsi que la solution de Dirichlet lorsque α=0 et β=1 :

$$z = Cos(\theta) \quad B_0 = \int_{-1}^{1} dz\ f_\theta(z) \quad B_n = \int_{-1}^{1} dz\ f_\theta(z)\ P_n(z)$$

$$\alpha = 0\ et\ \beta = 1 \Rightarrow$$

$$D_n = \left(\frac{P_n\left(Cosh(l_{\eta 2})\right)}{P_n\left(Cosh(l_{\eta 1})\right)} - \frac{Q_n\left(Cosh(l_{\eta 2})\right)}{Q_n\left(Cosh(l_{\eta 1})\right)}\right)$$

$$D_0 = Log\left(\frac{Tanh(l_{\eta 1}/2)}{Tanh(l_{\eta 2}/2)}\right)$$

$$T(r,\theta) = \frac{B_0}{2}\frac{Log\left(\frac{Tanh(l_{\eta 1}/2)}{Tanh(\eta/2)}\right)}{Log\left(\frac{Tanh(l_{\eta 1}/2)}{Tanh(l_{\eta 2}/2)}\right)} + \frac{1}{2}\sum_{n=1,+\infty}B_n(2n+1)\frac{\left(\frac{P_n(Cosh(\eta))}{P_n\left(Cosh(l_{\eta 1})\right)} - \frac{Q_n(Cosh(\eta))}{Q_n\left(Cosh(l_{\eta 1})\right)}\right)}{\left(\frac{P_n\left(Cosh(l_{\eta 2})\right)}{P_n\left(Cosh(l_{\eta 1})\right)} - \frac{Q_n\left(Cosh(l_{\eta 2})\right)}{Q_n\left(Cosh(l_{\eta 1})\right)}\right)}P_n(Cos(\theta))$$

Dans l'expression :

$$z = Cos(\theta) \quad B_0 = \int_{-1}^{1} dz\ f_\theta(z) \quad B_n = \int_{-1}^{1} dz\ f_\theta(z)\ P_n(z)$$

$$D_n = \left(\begin{array}{l}\frac{\alpha\, n}{Sinh(l_{\eta 2})}\left(\frac{Cosh(l_{\eta 2})P_n(Cosh(l_{\eta 2})) - P_{n-1}(Cosh(l_{\eta 2}))}{P_n\left(Cosh(l_{\eta 1})\right)} - \frac{Cosh(l_{\eta 2})Q_n(Cosh(l_{\eta 2})) - Q_{n-1}(Cosh(l_{\eta 2}))}{Q_n\left(Cosh(l_{\eta 1})\right)}\right) \\ +\beta\left(\frac{P_n\left(Cosh(l_{\eta 2})\right)}{P_n\left(Cosh(l_{\eta 1})\right)} - \frac{Q_n\left(Cosh(l_{\eta 2})\right)}{Q_n\left(Cosh(l_{\eta 1})\right)}\right)\end{array}\right)$$

$$D_0 = -\frac{\alpha}{Cosh(l_{\eta 2})} + \beta\, Log\left(\frac{Tanh(l_{\eta 1}/2)}{Tanh(l_{\eta 2}/2)}\right)$$

$$T(r,\theta) = \frac{B_0}{2}\frac{Log\left(\frac{Tanh(l_{\eta 1}/2)}{Tanh(\eta/2)}\right)}{D_0} + \frac{1}{2}\sum_{n=1,+\infty}\frac{B_n(2n+1)\left(\frac{P_n(Cosh(\eta))}{P_n\left(Cosh(l_{\eta 1})\right)} - \frac{Q_n(Cosh(\eta))}{Q_n\left(Cosh(l_{\eta 1})\right)}\right)}{D_n}P_n(Cos(\theta))$$

Calculons la solution quelque soit les valeurs de α et β pour des valeurs particulières de la fonction limites.

Pour une fonction par palier, "Hémisphéroïde" supérieur à 1, "Hémisphéroïde" inférieur à 0.

$$si \quad T(\eta,\theta)\big|_{\eta=l_\eta} = 1 - Heaviside(\theta - \pi/2) \quad fonction\ de\ Heaviside$$

$$\Rightarrow B_0 = 1 \quad et \quad B_n = \int_0^1 dz\ P_n(z) = \frac{\sqrt{\pi}}{2n+1}\left(\frac{1}{\Gamma\left(\frac{2-n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} - \frac{1}{\Gamma\left(\frac{-n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right)}\right)$$

$$B_{2n} = 0 \quad B_{2n+1} = \frac{(-1)^n (2n-1)!(4n+3)}{2^{2n}(n-1)!(n+1)!(4n+5)} = \frac{1}{(4n+5)}(-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{(4n+3)}{2(n+1)}$$

$$T(r,\theta) = \frac{1}{2}\frac{Log\left(\frac{Tanh(l_{\eta 1}/2)}{Tanh(\eta/2)}\right)}{D_0} + \frac{1}{2}\sum_{n=0,+\infty}(4n+5)\ B_{2n+1}\frac{\left(\frac{P_{2n+1}(Cosh(\eta))}{P_{2n+1}(Cosh(l_{\eta 1}))} - \frac{Q_{2n+1}(Cosh(\eta))}{Q_{2n+1}(Cosh(l_{\eta 1}))}\right)}{D_{2n+1}} P_{2n+1}(Cos(\theta))$$

$$T(r,\theta) = \frac{1}{2}\frac{Log\left(\frac{Tanh(l_{\eta 1}/2)}{Tanh(\eta/2)}\right)}{D_0} + \frac{1}{2}\sum_{n=0,+\infty}\left\{\begin{array}{l}(-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{(4n+3)}{2(n+1)}\frac{\left(\frac{P_{2n+1}(Cosh(\eta))}{P_{2n+1}(Cosh(l_{\eta 1}))} - \frac{Q_{2n+1}(Cosh(\eta))}{Q_{2n+1}(Cosh(l_{\eta 1}))}\right)}{D_{2n+1}} \times \\ \times P_{2n+1}(Cos(\theta))\end{array}\right\}$$

Pour une fonction par palier, "Hémisphéroïde" supérieur à 0, "Hémisphéroïde" inférieur à 1.

$$si \quad T(\eta,\theta)\big|_{\eta=l_\eta} = Heaviside(\theta - \pi/2) \quad fonction\ de\ Heaviside$$

$$alors\ on\ a\ démontré\ que \int_{\pi/2}^{\pi} d\theta\ Sin(\theta)\ P_n(Cos(\theta)) = \int_0^{-1} dz\ P_n(z) = -(-1)^n \int_0^1 dz\ P_n(z)$$

$$comme\ B_{2n} = 0 \quad et \quad B_{2n+1} \neq 0$$

$$T(r,\theta) = \frac{1}{2}\frac{Log\left(\frac{Tanh(l_{\eta 1}/2)}{Tanh(\eta/2)}\right)}{D_0} - \frac{1}{2}\sum_{n=0,+\infty}\left\{\begin{array}{l}(-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{(4n+3)}{2(n+1)}\frac{\left(\frac{P_{2n+1}(Cosh(\eta))}{P_{2n+1}(Cosh(l_{\eta 1}))} - \frac{Q_{2n+1}(Cosh(\eta))}{Q_{2n+1}(Cosh(l_{\eta 1}))}\right)}{D_{2n+1}} \times \\ \times P_{2n+1}(Cos(\theta))\end{array}\right\}$$

.

Pour une fonction par palier, "Hémisphéroïde" supérieur à 1, "Hémisphéroïde" inférieur à -1, la solution est la superposition de la solution "Hémisphéroïde" supérieur +1 - Solution "Hémisphéroïde" inférieur 1:

$$si \quad T(\eta,\theta)\big|_{\eta=l_\eta} = 1 - 2Heaviside(\theta - \pi/2) \quad fonction\ de\ Heaviside$$

$$T(\eta,\theta) =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}\frac{Log\left(\frac{Tanh(l_{\eta 1}/2)}{Tanh(\eta/2)}\right)}{D_0} + \frac{1}{2}\sum_{n=0,+\infty}(-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{(4n+3)}{2(n+1)}\frac{\left(\frac{P_{2n+1}(Cosh(\eta))}{P_{2n+1}(Cosh(l_{\eta 1}))} - \frac{Q_{2n+1}(Cosh(\eta))}{Q_{2n+1}(Cosh(l_{\eta 1}))}\right)}{D_{2n+1}} P_{2n+1}(Cos(\theta))}_{f_\theta(\theta)=1-Heaviside(\theta-\pi/2)\leftarrow hémisphère\ supérieur\ à\ 1}$$

$$-\underbrace{\left(\frac{1}{2}\frac{Log\left(\frac{Tanh(l_{\eta 1}/2)}{Tanh(\eta/2)}\right)}{D_0} - \frac{1}{2}\sum_{n=0,+\infty}(-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{(4n+3)}{2(n+1)}\frac{\left(\frac{P_{2n+1}(Cosh(\eta))}{P_{2n+1}(Cosh(l_{\eta 1}))} - \frac{Q_{2n+1}(Cosh(\eta))}{Q_{2n+1}(Cosh(l_{\eta 1}))}\right)}{D_{2n+1}} P_{2n+1}(Cos(\theta))\right)}_{f_\theta(\theta)=Heaviside(\theta-\pi/2)\leftarrow hémisphère\ inférieur\ à\ 1}$$

$$T(\eta,\theta) = \sum_{n=0,+\infty}(-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{(4n+3)}{2(n+1)}\frac{\left(\frac{P_{2n+1}(Cosh(\eta))}{P_{2n+1}(Cosh(l_{\eta 1}))} - \frac{Q_{2n+1}(Cosh(\eta))}{Q_{2n+1}(Cosh(l_{\eta 1}))}\right)}{D_{2n+1}} P_{2n+1}(Cos(\theta))$$

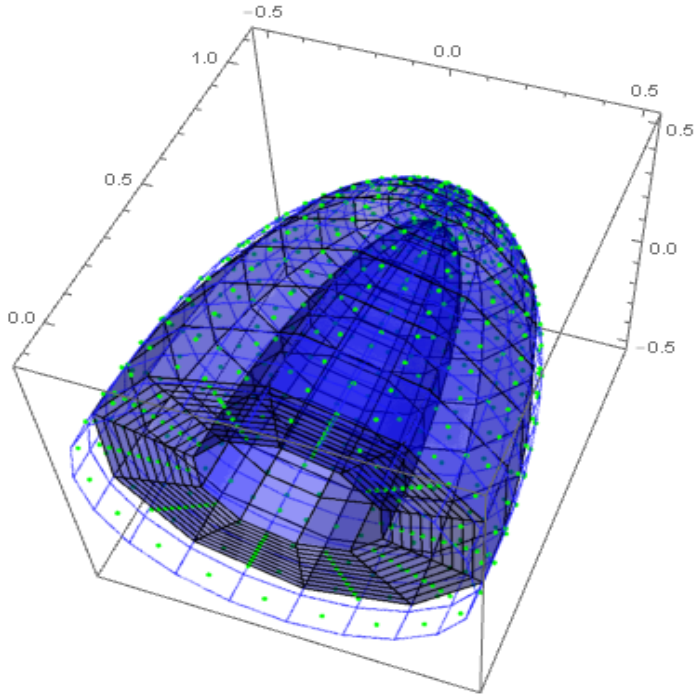
.

Exemple : "Hémisphéroïde" allongé creux (η,ϑ) soumis à des conditions aux limites de Dirichlet inhomogènes en η=$l_{\eta 2}$ et Dirichlet homogènes en η=$l_{\eta 1}$

Soit le problème :

$$\Delta T(\eta,\theta) = 0 \quad T(\eta,\theta)\big|_{\eta=l_{\eta 1}} = 0 \quad T(\eta,\theta)\big|_{\eta=l_{\eta 2}} = 1 \quad T(\eta,\theta)\big|_{\theta=\pi/2} = 0$$

.



En utilisant le problème équivalent du sphéroïde creux dont les deux "Hémisphéroïdes" sont soumises à des conditions aux limites de Dirichlet impaires.

$$T(\eta,\theta)=2\sum_{n=0,+\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!(4n+3)}{2^{2n+1}(n-1)!(n+1)!}\frac{\left(\frac{P_{2n+1}(Cosh(\eta))}{P_{2n+1}(Cosh(l_{\eta 1}))}-\frac{Q_{2n+1}(Cosh(\eta))}{Q_{2n+1}(Cosh(l_{\eta 1}))}\right)}{\left(\frac{P_{2n+1}(Cosh(l_{\eta 2}))}{P_{2n+1}(Cosh(l_{\eta 1}))}-\frac{Q_{2n+1}(Cosh(l_{\eta 2}))}{Q_{2n+1}(Cosh(l_{\eta 1}))}\right)}P_{2n+1}(Cos(\theta))$$

ou bien

$$T(\eta,\theta)=\sum_{n=0,+\infty}(-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{(4n+3)}{2(n+1)}\frac{\left(\frac{P_{2n+1}(Cosh(\eta))}{P_{2n+1}(Cosh(l_{\eta 1}))}-\frac{Q_{2n+1}(Cosh(\eta))}{Q_{2n+1}(Cosh(l_{\eta 1}))}\right)}{\left(\frac{P_{2n+1}(Cosh(l_{\eta 2}))}{P_{2n+1}(Cosh(l_{\eta 1}))}-\frac{Q_{2n+1}(Cosh(l_{\eta 2}))}{Q_{2n+1}(Cosh(l_{\eta 1}))}\right)}P_{2n+1}(Cos(\theta))$$

.

Pour un problème plus général :

$$\Delta T(\eta,\theta)=0 \quad T(\eta,\theta)\big|_{\eta=l_{\eta 1}}=0 \quad T(\eta,\theta)\big|_{\eta=l_{\eta 2}}=f_\theta(\theta) \quad T(\eta,\theta)\big|_{\theta=\pi/2}=0$$

Par l'équivalence avec le problème aux limites suivant sur le sphéroïde creux :

$$\Delta T(\eta,\theta)=0 \quad T(\eta,\theta)\ fini \quad T(\eta,\theta)\big|_{\eta=l_{\eta 1}}=0$$

$$T(\eta,\theta)\big|_{\eta=l_{\eta 2},\,\theta[0,\pi/2]}=f_\theta(Cos(\theta))$$

$$T(\eta,\theta)\big|_{\eta=l_{\eta 2},\,\theta[\pi/2,\pi]}=-f_\theta(Cos(\pi-\theta))$$

cela donne :

$$C_n=\int_0^1 dz\ f_\theta(z)\ P_{2n+1}(z)$$

$$T(r,\theta)=\sum_{n=0,+\infty}(4n+3)\,C_n\frac{\left(\frac{P_{2n+1}(Cosh(\eta))}{P_{2n+1}(Cosh(l_{\eta 1}))}-\frac{Q_{2n+1}(Cosh(\eta))}{Q_{2n+1}(Cosh(l_{\eta 1}))}\right)}{\left(\frac{P_{2n+1}(Cosh(l_{\eta 2}))}{P_{2n+1}(Cosh(l_{\eta 1}))}-\frac{Q_{2n+1}(Cosh(l_{\eta 2}))}{Q_{2n+1}(Cosh(l_{\eta 1}))}\right)}P_{2n+1}(Cos(\theta))$$

Exemple: "Hémisphéroïde" allongé creux (η,ϑ) soumis à des conditions aux limites de Robin inhomogènes en η=$l_{\eta 2}$ et Dirichlet homogènes en η=$l_{\eta 1}$

Si le problème s'exprime sous la forme :

$$\Delta T(\eta,\theta)=0 \quad T(\eta,\theta)\ fini$$

$$T(\eta,\theta)\big|_{\eta=l_{\eta 1}}=0$$

$$\alpha\, T'_{\eta}(\eta,\theta)+\beta\, T(\eta,\theta)\big|_{\eta=l_{\eta 2}}=f_{\theta}(Cos(\theta))$$

$$T(\eta,\theta)\big|_{\theta=\frac{\pi}{2}}=0$$

Alors peut voir que la solution est également celle du problème suivant sur le sphéroïde :

$$\Delta T(\eta,\theta)=0 \quad T(\eta,\theta)\ fini$$

$$T(\eta,\theta)\big|_{\eta=l_{\eta 1}}=0$$

$$\alpha\, T'_{\eta}(\eta,\theta)+\beta\, T(\eta,\theta)\big|_{\eta=l_{\eta 2},\,\theta[0,\pi/2]}=f_{\theta}(Cos(\theta))$$

$$\alpha\, T'_{\eta}(\eta,\theta)+\beta\, T(\eta,\theta)\big|_{\eta=l_{\eta 2},\,\theta[\pi/2,\pi]}=-f_{\theta}(Cos(\pi-\theta))$$

En effet supposons le problème précédent du sphéroïde creux, alors la solution se développe sous la forme :

$$z=Cos(\theta) \quad f_{\theta}(-z)=-f_{\theta}(z)$$

$$B_0=\int_{-1}^{1}dz\ f_{\theta}(z)=0 \quad B_n=(1-(-1)^n)\int_{0}^{1}dz\ f_{\theta}(z)\,P_n(z) \quad B_{2n}=0 \quad B_{2n+1}=2C_{2n+1}\neq 0 \quad C_n=\int_{0}^{1}dz\ f_{\theta}(z)\,P_n(z)$$

$$D_n=\left(\begin{array}{l}\dfrac{\alpha\, n}{Sinh(l_{\eta 2})}\left(\dfrac{Cosh(l_{\eta 2})P_n(Cosh(l_{\eta 2}))-P_{n-1}(Cosh(l_{\eta 2}))}{P_n(Cosh(l_{\eta 1}))}-\dfrac{Cosh(l_{\eta 2})Q_n(Cosh(l_{\eta 2}))-Q_{n-1}(Cosh(l_{\eta 2}))}{Q_n(Cosh(l_{\eta 1}))}\right)\\ +\beta\left(\dfrac{P_n(Cosh(l_{\eta 2}))}{P_n(Cosh(l_{\eta 1}))}-\dfrac{Q_n(Cosh(l_{\eta 2}))}{Q_n(Cosh(l_{\eta 1}))}\right)\end{array}\right)$$

$$\Rightarrow T(\eta,\theta)=\sum_{n=0,+\infty}(4n+3)\frac{C_{2n+1}\left(\dfrac{P_{2n+1}(Cosh(\eta))}{P_{2n+1}(Cosh(l_{\eta 1}))}-\dfrac{Q_{2n+1}(Cosh(\eta))}{Q_{2n+1}(Cosh(l_{\eta 1}))}\right)}{D_{2n+1}}P_{2n+1}(Cos(\theta))$$

Comme seuls les coefficients impairs sont présents alors la valeur en ϑ=π/2 des polynômes de Legendre est nulle $P_{2n+1}(0)=0$ *. Il vient T(r,π/2)=0, ce qui correspond aux conditions aux limites du problème de "l'Hémisphéroïde". La solution est donc :*

$$C_n=\int_{0}^{1}dz\ f_{\theta}(z)\,P_n(z)$$

$$D_n=\left(\begin{array}{l}\dfrac{\alpha\, n}{Sinh(l_{\eta 2})}\left(\dfrac{Cosh(l_{\eta 2})P_n(Cosh(l_{\eta 2}))-P_{n-1}(Cosh(l_{\eta 2}))}{P_n(Cosh(l_{\eta 1}))}-\dfrac{Cosh(l_{\eta 2})Q_n(Cosh(l_{\eta 2}))-Q_{n-1}(Cosh(l_{\eta 2}))}{Q_n(Cosh(l_{\eta 1}))}\right)\\ +\beta\left(\dfrac{P_n(Cosh(l_{\eta 2}))}{P_n(Cosh(l_{\eta 1}))}-\dfrac{Q_n(Cosh(l_{\eta 2}))}{Q_n(Cosh(l_{\eta 1}))}\right)\end{array}\right)$$

$$\Rightarrow T(\eta,\theta)=\sum_{n=0,+\infty}(4n+3)\frac{C_{2n+1}\left(\dfrac{P_{2n+1}(Cosh(\eta))}{P_{2n+1}(Cosh(l_{\eta 1}))}-\dfrac{Q_{2n+1}(Cosh(\eta))}{Q_{2n+1}(Cosh(l_{\eta 1}))}\right)}{D_{2n+1}}P_{2n+1}(Cos(\theta))$$

Lorsque α=1 et β=0, à la solution il faut ajouter une constante B0 (auparavant quelconque dans un problème de Sphéroïde avec condition de Neumann fixé) mais qui est là fixé à 0 par la condition aux limites à la base de "l'Hémisphéroïde", cela donne donc :

$\alpha = 1 \; et \; \beta = 0 \Rightarrow$

$$C_n = \int_0^1 dz \; f_\theta(z) \; P_n(z)$$

$$D_n = \frac{n}{Sinh(l_{\eta 2})}\left(\frac{Cosh(l_{\eta 2})P_n(Cosh(l_{\eta 2})) - P_{n-1}(Cosh(l_{\eta 2}))}{P_n\left(Cosh(l_{\eta 1})\right)} - \frac{Cosh(l_{\eta 2})Q_n(Cosh(l_{\eta 2})) - Q_{n-1}(Cosh(l_{\eta 2}))}{Q_n\left(Cosh(l_{\eta 1})\right)} \right)$$

$$T(\eta,\theta) = \sum_{n=0,+\infty} (4n+3) \frac{C_{2n+1}\left(\frac{P_{2n+1}\left(Cosh(\eta)\right)}{P_{2n+1}\left(Cosh(l_{\eta 1})\right)} - \frac{Q_{2n+1}\left(Cosh(\eta)\right)}{Q_{2n+1}\left(Cosh(l_{\eta 1})\right)} \right)}{D_{2n+1}} P_{2n+1}(Cos(\theta))$$

Lorsque la fonction limite =1, alors la solution se présente sous la forme :

$$C_{2n+1} = \int_0^1 dz \; P_{2n+1}(z) = (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{1}{2(n+1)}$$

$$T(\eta,\theta) = \sum_{n=0,+\infty} (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{(4n+3)}{2(n+1)} \frac{\left(\frac{P_{2n+1}\left(Cosh(\eta)\right)}{P_{2n+1}\left(Cosh(l_{\eta 1})\right)} - \frac{Q_{2n+1}\left(Cosh(\eta)\right)}{Q_{2n+1}\left(Cosh(l_{\eta 1})\right)} \right)}{D_{2n+1}} P_{2n+1}(Cos(\theta))$$

Exemple : "Hémisphéroïde" allongé plein (η,ϑ) soumis à des conditions aux limites de Robin inhomogènes η=l_η

Pour le problème :

$\Delta T(\eta,\theta) = 0 \quad T(\eta,\theta) \; fini$

$\alpha \; T'_\eta(\eta,\theta) + \beta \; T(\eta,\theta)\Big|_{\eta = l_\eta} = f_\theta(Cos(\theta)) \quad T(\eta,\theta)\Big|_{\theta=\pi/2} = 0$

Il suffit de se conformer à la règle de passage sur la partie radiale dans les résultats précédents sur "l'Hémisphéroïde" creux, en éliminant le terme en Q_n pour respecter la condition de finitude de la solution. Il vient alors :

$$Partie\,radiale \quad \left(\frac{P_n\left(Cosh(\eta)\right)}{P_n\left(Cosh(l_{\eta 1})\right)} - \frac{Q_n\left(Cosh(\eta)\right)}{Q_n\left(Cosh(l_{\eta 1})\right)} \right) \rightarrow P_n\left(Cosh(\eta)\right)$$

$$C_n = \int_0^1 dz \; f_\theta(z) \; P_n(z)$$

$$D_n = \frac{\alpha \; n\left(Cosh(l_\eta)P_n(Cosh(l_\eta)) - P_{n-1}(Cosh(l_\eta))\right) + \beta \; Sinh(l_\eta)P_n\left(Cosh(l_\eta)\right)}{Sinh(l_\eta)}$$

$$\Rightarrow T(r,\theta) = \sum_{n=0,+\infty} (4n+3) \frac{C_{2n+1}P_{2n+1}\left(Cosh(\eta)\right)}{D_{2n+1}} P_{2n+1}(Cos(\theta))$$

Exemples divers de problèmes extérieurs sur des sphéroïdes et "Hémisphéroïde" allongés pleins

Les solutions du problème extérieur sont construites de manière identique dans le respect des conditions de finitude et de continuité de la solution admise. La solution est indépendante de φ et se développe en série de polynôme de Legendre

$$T(\eta,\theta) = A_0 + B_0\, Log\left(\frac{Cosh(\eta/2)}{Sinh(\eta/2)}\right) + \sum_{n=1,+\infty}\left(A_\eta\, P_n\left(Cosh(\eta)\right) + B_\eta\, Q_n\left(Cosh(\eta)\right)\right)\left(A_\theta P_n\left(Cos(\theta)\right) + B_\theta\, Q_n\left(Cos(\theta)\right)\right)$$

Les conditions d'annulation de la solution en $\eta=\infty$, de finitude et régularité des parties angulaire (ϑ), ainsi que le respect de la condition aux limites implique que $A_0=B_0=A_\eta=B_\vartheta=0$, et cela donne une solution de la forme : $T(\eta,\theta) = \sum_{n=1,+\infty} A_n Q_n\left(Cosh(\eta)\right) P_n\left(Cos(\theta)\right)$*, où ne sont retenus que les fonctions de Legendre de deuxième espèce pour la partie radiale, s'annulant à l'infini.*

Pour le problème extérieur de Dirichlet :

$$\Delta T(\eta,\theta) = 0$$

$$T(\eta,\theta)\big|_{\eta=l_\eta} = f_\theta(\theta) = f_\theta(Cos(\theta)) \quad T(\eta,\theta)\ fini \quad T(\infty,\theta) = 0$$

La solution s'écrit en remplaçant pour la partie radiale, les fonctions de première espèce par celles de première espèce :

$$z = Cos(\theta) \quad B_0 = \int_0^\pi d\theta\ Sin(\theta)\ f_\theta(\theta) = \int_{-1}^1 dz\ f_\theta(z) \quad B_n = \int_0^\pi d\theta\ Sin(\theta)\ f_\theta(\theta)\ P_n\left(Cos(\theta)\right) = \int_{-1}^1 dz\ f_\theta(z)\ P_n(z)$$

$$T(\eta,\theta) = \frac{B_0}{2} + \sum_{n=1,+\infty} B_n \frac{(2n+1)}{2}\frac{Q_n(Cosh(\eta))}{Q_n\left(Cosh(l_\eta)\right)} P_n(Cos(\theta))$$

Il est donc facile de construire toutes les solutions des exemples précédent du point de vue du problème extérieur.

Pour un hémisphéroïde, le problème extérieur de Dirichlet peut se poser comme un problème mixte dans lequel la valeur de la solution s'annule partout sur le plan médian ($\vartheta=\pi/2$), et définie come fonction de ϑ à la surface du corps, comme suit :

$$\Delta T(\eta,\theta) = 0 \quad \eta \geq l_\eta$$

$$T(\eta,\theta)\big|_{\eta=l_\eta} = f_\theta(\theta) = f_\theta(Cos(\theta)) \quad T(\eta,\theta)\big|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = 0 \quad T(\eta,\theta)\ fini \quad T(\infty,\theta) = 0$$

On utilise la construction des solutions du problème du sphéroïde avec des conditions aux limites impaires, soit :

$$\Delta T(r,\theta) = 0 \quad \eta \geq l_\eta$$

$$T(r,\theta)\big|_{r=l_r} = f_\theta(Cos(\theta)) \quad pour\ \theta \in [0,\pi/2]$$

$$T(r,\theta)\big|_{r=l_r} = -f_\theta(Cos(\pi-\theta)) \quad pour\ \theta \in [\pi/2,\pi]$$

$$T(r,\theta)\ fini$$

Alors la solution s'écrit sous la forme :

$$z = Cos(\theta) \quad C_n = \int_0^1 dz\ f_\theta(z)\ P_{2n+1}(z) \quad T(\eta,\theta) = \sum_{n=0,+\infty} C_n(4n+3)\frac{Q_{2n+1}(Cosh(\eta))}{Q_{2n+1}\left(Cosh(l_\eta)\right)} P_{2n+1}(Cos(\theta))$$

Exemple d'électrostatique : problème extérieur de Dirichlet, sphéroïde allongé dans un champ électrique uniforme axe z, porté au potentiel V0

En utilisant le développement en série de polynôme de Legendre en Cos(θ) et de fonction de Legendre de deuxième espèce, avec la forme requise du potentiel à l'infini, la solution doit être de la forme :

$$x = cSinh(\eta)Sin(\vartheta)Cos(\varphi) \quad y = cSinh(\eta)Sin(\vartheta)Sin(\varphi) \quad z = cCosh(\eta)Cos(\vartheta)$$

$$T(\eta,\vartheta)\big|_{\eta=\eta_0} = V_0 \quad \lim_{\eta\to+\infty} T(\eta,\vartheta) = -E_0 z = -E_0 cCosh(\eta)Cos(\vartheta)$$

$$T(\eta,\vartheta) = -E_0 cCosh(\eta)Cos(\vartheta) + \sum_{n=0}^{+\infty} A_n Q_n(Cosh(\eta))P_n(Cos(\vartheta))$$

$$\Rightarrow \begin{cases} P_0(Cos(\vartheta)) = 1 \\ P_1(Cos(\vartheta)) = Cos(\vartheta) \end{cases} \Rightarrow T(\eta,\vartheta) = A_0 Q_0(Cosh(\eta)) + A_1 Q_1(Cosh(\eta))Cos(\vartheta) - E_0 cCosh(\eta)Cos(\vartheta)$$

$$\Rightarrow A_0 Q_0(Cosh(\eta_0)) + \{A_1 Q_1(Cosh(\eta_0)) - E_0 cCosh(\eta_0)\}Cos(\vartheta) = V_0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A_0 = \dfrac{V_0}{Q_0(Cosh(\eta_0))} \\ A_1 = \dfrac{E_0 cCosh(\eta_0)}{Q_1(Cosh(\eta_0))} \end{cases} \Rightarrow T(\eta,\vartheta) = E_0 cCosh(\eta_0)Cos(\vartheta)\left(\frac{Q_1(Cosh(\eta))}{Q_1(Cosh(\eta_0))} - \frac{Cosh(\eta)}{Cosh(\eta_0)}\right) + V_0 \frac{Q_0(Cosh(\eta))}{Q_0(Cosh(\eta_0))}$$

Les fonctions de Legendre de deuxième espèce en dehors ou dans l'intervalle [-1,+1], sont reliées aux fonctions usuelles suivantes :

$$Q_0(z) = \frac{1}{2}Log\left(\frac{z+1}{z-1}\right) \quad Q_1(z) = \frac{z}{2}Log\left(\frac{z+1}{z-1}\right) - 1 \quad Q_2(z) = \frac{1}{4}\left((3z^2-1)Log\left(\frac{z+1}{z-1}\right) - 6z\right) \quad z \in \mathbf{C}$$

$$Q_0(x) = \frac{1}{2}Log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \quad Q_1(x) = \frac{x}{2}Log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - 1 \quad Q_2(x) = \frac{1}{4}\left((3x^2-1)Log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - 6x\right) \quad x \in [-1,+1]$$

.

Un sphéroïde allongé au seul potentiel v0 sur sa surface provoque un potentiel extérieur de la forme :

$$T(\eta,\vartheta)=V_0\frac{Q_0(Cosh(\eta))}{Q_0(Cosh(\eta_0))}=V_0\frac{Log\left(\frac{Cosh(\eta)+1}{Cosh(\eta)-1}\right)}{Log\left(\frac{Cosh(\eta_0)+1}{Cosh(\eta_0)-1}\right)}=V_0\frac{Log\left(CoTanh\left(\frac{\eta}{2}\right)\right)}{Log\left(CoTanh\left(\frac{\eta_0}{2}\right)\right)}$$

.

Cette solution permet également de résoudre le problème thermique stationnaire d'un corps porté à température fixe. En utilisant la formule de correspondance en coordonnées cylindrique, il vient :

$\eta=\eta_0$ *corrrepondant à un ellipsoide grand axe a petit axe a*

$$\Rightarrow Tanh(\eta_0)=\frac{b}{a}\Rightarrow c=\sqrt{a^2-b^2}\quad Cosh(\eta_0)=\frac{a}{c}$$

$$T(\eta,\vartheta)=V_0\frac{Log\left(\frac{Cosh(\eta)+1}{Cosh(\eta)-1}\right)}{Log\left(\frac{Cosh(\eta_0)+1}{Cosh(\eta_0)-1}\right)}=V_0\frac{Log\left(\frac{\sqrt{(z+c)^2+\rho^2}+\sqrt{(z-c)^2+\rho^2}+2c}{\sqrt{(z+c)^2+\rho^2}+\sqrt{(z-c)^2+\rho^2}-2c}\right)}{Log\left(\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{a-\sqrt{a^2-b^2}}\right)}$$

Cette solution ne peut rendre compte directement du cas limite η0->0, soit le segment de longeur 2c centré en 0 sur l'axe z, car la solution donnée diverge dans ce cas. Toutefois on peut se rapprocher du problème électrostatique d'un filament de même dimension uniformément chargé et du potentiel électrique extérieur. Dans ce cas la solution se calcule facilement en coordonnées cylindrique par intégration du potentiel crée par un élément infinitésimal chargé du filament, sur toute sa longueur. A une constante électrique prés le potentiel s'écrit comme suit :

$$V(r,z)=C_0\int_{-c}^{+c}d\lambda\frac{1}{\sqrt{\rho^2+(z-\lambda)^2}}=C_0\int_{\frac{z-c}{\rho}}^{\frac{z+c}{\rho}}dx\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=C_0\left[ArcSinh(x)\right]_{\frac{z-c}{\rho}}^{\frac{z+c}{\rho}}$$

$$ArcSinh(x)=Log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\Rightarrow V(r,z)=C_0Log\left(\frac{\frac{z+c}{\rho}+\sqrt{1+\left(\frac{z+c}{\rho}\right)^2}}{\frac{z-c}{\rho}+\sqrt{1+\left(\frac{z-c}{\rho}\right)^2}}\right)=C_0Log\left(\frac{z+c+\sqrt{\rho^2+(z+c)^2}}{z-c+\sqrt{\rho^2+(z-c)^2}}\right)$$

Vérifions que les deux numérateurs des solutions précédentes sont identiques :

$$Cosh(\eta)=\frac{d_1+d_2}{2c}=\frac{\sqrt{(z+c)^2+\rho^2}+\sqrt{(z-c)^2+\rho^2}}{2c}\Rightarrow\frac{d_1+d_2+2c}{d_1+d_2-2c}=\frac{\sqrt{(z+c)^2+\rho^2}+\sqrt{(z-c)^2+\rho^2}+2c}{\sqrt{(z+c)^2+\rho^2}+\sqrt{(z-c)^2+\rho^2}-2c}$$

$$Or\quad\frac{\sqrt{(z+c)^2+\rho^2}+\sqrt{(z-c)^2+\rho^2}+2c}{\sqrt{(z+c)^2+\rho^2}+\sqrt{(z-c)^2+\rho^2}-2c}=\frac{z+c+\sqrt{\rho^2+(z+c)^2}}{z-c+\sqrt{\rho^2+(z-c)^2}}\quad c.q.f.d$$

.

Exemple d'électrostatique : problème extérieur de Dirichlet, sphéroïde allongé dans un champ électrique uniforme le long de l'axe x ou y, porté au potentiel V0

En utilisant le développement en série des fonctions associées de Legendre en Cos(θ) et des fonctions de Legendre de deuxième espèce, avec la forme requise du potentiel à l'infini, la solution avec un champ le long de l'axe x doit être de la forme:

$$x = cSinh(\eta)Sin(\vartheta)Cos(\varphi) \quad y = cSinh(\eta)Sin(\vartheta)Sin(\varphi) \quad z = cCosh(\eta)Cos(\vartheta)$$

$$T(\eta,\vartheta)\big|_{\eta=\eta_0} = V_0 \quad \lim_{\eta\to+\infty} T(\eta,\vartheta) = -E_0 x = -E_0 cSinh(\eta)Sin(\vartheta)Cos(\varphi)$$

$$T(\eta,\vartheta) = -E_0 cSinh(\eta)Sin(\vartheta)Cos(\varphi) + \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{m=n} A_n^m Q_n^m(Cosh(\eta))P_n^m(Cos(\vartheta))Cos(m\varphi)$$

$$T(\eta,\vartheta)\big|_{\eta=\eta_0} = V_0 \Rightarrow -E_0 cSinh(\eta_0)Sin(\vartheta)Cos(\varphi) + \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{m=n} A_n^m Q_n^m(Cosh(\eta_0))P_n^m(Cos(\vartheta))Cos(m\varphi) = V_0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ ou \quad m = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow -E_0 cSinh(\eta_0)Sin(\vartheta)Cos(\varphi) + \sum_{n=0}^{+\infty} A_n^0 Q_n^0(Cosh(\eta_0))P_n^0(Cos(\vartheta)) + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n^1 Q_n^1(Cosh(\eta_0))P_n^1(Cos(\vartheta))Cos(\varphi) = V_0$$

$$De\ plus\ P_1^1(Cos(\vartheta)) = -Sin(\vartheta)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A_0^0 Q_0^0(Cosh(\eta_0)) + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n^0 Q_n^0(Cosh(\eta_0))P_n^0(Cos(\vartheta)) = V_0 \Rightarrow A_0^0 = \dfrac{V_0}{Q_0^0(Cosh(\eta_0))} \quad A_{n>1}^0 = 0 \\ \sum_{n=1}^{+\infty} A_n^1 Q_n^1(Cosh(\eta_0))P_n^1(Cos(\vartheta)) = E_0 cSinh(\eta_0)Sin(\vartheta) \Rightarrow A_1^1 = -\dfrac{E_0 cSinh(\eta_0)}{Q_1^1(Cosh(\eta_0))} \quad A_{n>1}^1 = 0 \end{cases}$$

$$T(\eta,\vartheta) = -\left(E_0 cSinh(\eta) - \frac{E_0 cSinh(\eta_0)Q_1^1(Cosh(\eta))}{Q_1^1(Cosh(\eta_0))}\right)Sin(\vartheta)Cos(\varphi) + V_0\frac{Q_0(Cosh(\eta))}{Q_0(Cosh(\eta_0))}$$

Avec un champ le long de l'axe y, on a immédiatement :

$$T(\eta,\vartheta) = -\left(E_0 cSinh(\eta) - \frac{E_0 cSinh(\eta_0)Q_1^1(Cosh(\eta))}{Q_1^1(Cosh(\eta_0))}\right)Sin(\vartheta)Sin(\varphi) + V_0\frac{Q_0(Cosh(\eta))}{Q_0(Cosh(\eta_0))}.$$

En calculant les intégrales d'après une formule donnée par I.S.GRADSHTEYN.I.M.RYZHIK-Table of Integrals, Series, and Products-7-édition, page 772, formule n°7.132.1 :

$$\int_{-1}^{1} dz\,\sqrt{1-z^2}\,P_{2n}(z) \qquad et \qquad \int_{-1}^{1} dz\,\sqrt{1-z^2}\,P_n^1(z)$$

$$Formule\ 7.132.1 \rightarrow \int_{-1}^{1} dz\,\left(1-z^2\right)^{\lambda-1} P_\nu^\mu(z) = \frac{\pi 2^\mu \Gamma\left(\lambda+\frac{\mu}{2}\right)\Gamma\left(\lambda-\frac{\mu}{2}\right)}{\Gamma\left(\lambda+\frac{\nu+1}{2}\right)\Gamma\left(\lambda-\frac{\nu}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{\nu-\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\nu-\mu}{2}\right)}$$

$$\lambda=\frac{3}{2} \quad \nu=n \quad \mu=0 \Rightarrow \int_{-1}^{1} dz\,\sqrt{1-z^2}\,P_n(z) = \frac{\pi^2}{2\Gamma\left(\frac{n+4}{2}\right)(1-n)\Gamma\left(1+\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-n}{2}\right)^2}$$

$$Pôle\ \Gamma\left(\frac{1-n}{2}\right) sur\ n=2m+1 \Rightarrow \int_{-1}^{1} dz\,\sqrt{1-z^2}\,P_{2n+1}(z)=0 \quad Logique\ fonction\ impaire\ sous\ l'intégrande$$

$$\int_{-1}^{1} dz\,\sqrt{1-z^2}\,P_{2n}(z) = \frac{\pi^2}{2\Gamma(n+2)(1-2n)\Gamma(1+n)\Gamma\left(\frac{1-2n}{2}\right)^2} = \frac{\pi^2}{2(1-2n)n!(n+1)!\Gamma\left(\frac{1-2n}{2}\right)^2}$$

$$\Gamma\left(\frac{1-2n}{2}\right) = \frac{\pi(-1)^n}{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)} \Rightarrow \int_{-1}^{1} dz\,\sqrt{1-z^2}\,P_{2n}(z) = \frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}{2(1-2n)n!(n+1)!} \quad \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\,\frac{(2n-1)!}{2^{2n-1}(n-1)!}$$

$$\Rightarrow \int_{-1}^{1} dz\,\sqrt{1-z^2}\,P_{2n}(z) = \frac{2\pi\, n^2\left((2n+1)!\right)^2}{(n+1)(1-2n)2^{4n}(n!)^4}$$

$$\lambda=\frac{3}{2} \quad \nu=n \quad \mu=1 \Rightarrow \int_{-1}^{1} dz\,\sqrt{1-z^2}\,P_n^1(z) = \frac{2\pi}{\Gamma\left(\frac{n+4}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3-n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma\left(-\frac{n}{2}\right)}$$

$$Pôles \begin{cases} \Gamma\left(-\frac{n}{2}\right) sur\ n=2m \\ \Gamma\left(\frac{3-n}{2}\right)=\Gamma(1-m)\ sur\ n=2m+1 \quad pour \quad m=1,2 \end{cases}$$

$$Seul \quad \int_{-1}^{1} dz\,\sqrt{1-z^2}\,P_1^1(z) \neq 0 = -\frac{4}{3}$$

On retrouve le résultat du seul développement de la fonction associée de Legendre de degré 1 et d'ordre 1 !

Les fonctions de Legendre de première et deuxième espèce en dehors ou dans l'intervalle [-1,+1], sont reliées aux fonctions usuelles suivantes :

$$P_0(z)=1 \quad P_1(z)=z \quad P_2(z)=\frac{1}{2}\left(3z^2-1\right) \quad \forall z$$

$$P_1^1(z)=\sqrt{z^2-1} \quad P_2^1(z)=3z\sqrt{z^2-1} \quad z\in\mathbf{C}$$

$$P_1^1(z)=-\sqrt{1-x^2} \quad P_2^1(z)=-3x\sqrt{1-x^2} \quad x\in[-1,+1]$$

$$Q_0(z)=\frac{1}{2}Log\left(\frac{z+1}{z-1}\right) \quad Q_1(z)=\frac{z}{2}Log\left(\frac{z+1}{z-1}\right)-1 \quad Q_2(z)=\frac{1}{4}\left(\left(3z^2-1\right)Log\left(\frac{z+1}{z-1}\right)-6z\right) \quad z\in\mathbf{C}$$

$$Q_1^1(z)=-\frac{z}{\sqrt{z^2-1}}+\frac{\sqrt{z^2-1}}{2}Log\left(\frac{z+1}{z-1}\right) \quad Q_2^1(z)=-\frac{3z^2-2}{\sqrt{z^2-1}}+\frac{3z\sqrt{z^2-1}}{2}Log\left(\frac{z+1}{z-1}\right) \quad z\in\mathbf{C}$$

$$Q_0(x)=\frac{1}{2}Log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \quad Q_1(x)=\frac{x}{2}Log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)-1 \quad Q_2(x)=\frac{1}{4}\left(\left(3x^2-1\right)Log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)-6x\right) \quad x\in[-1,+1]$$

$$Q_1^1(x)=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{\sqrt{1-x^2}}{2}Log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \quad Q_2^1(x)=-\frac{3x^2-2}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{3x\sqrt{1-x^2}}{2}Log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \quad x\in[-1,+1]$$

.

Avec l'argument z=Cosh(η), il vient :

$$P_0(Cosh(\eta))=1 \quad P_1(Cosh(\eta))=Cosh(\eta) \quad P_2(Cosh(\eta))=\frac{1}{2}\left(3Cosh^2(\eta)-1\right)$$

$$P_1^1(Cosh(\eta))=\sqrt{Cosh^2(\eta)-1}=Sinh(\eta) \quad P_2^1(Cosh(\eta))=3Cosh(\eta)Sinh(\eta)=\frac{3}{2}Sinh(2\eta)$$

$$Q_0(Cosh(\eta))=Log\left(Cotanh\left(\frac{\eta}{2}\right)\right) \quad Q_1(z)=Cosh(\eta)Log\left(Cotanh\left(\frac{\eta}{2}\right)\right)-1$$

$$Q_2(Cosh(\eta))=\frac{1}{4}\left(\left(3Cosh^2(\eta)-1\right)Log\left(Cotanh\left(\frac{\eta}{2}\right)\right)-6Cosh(\eta)\right)$$

$$Q_1^1(Cosh(\eta))=-Cotanh(\eta)+Sinh(\eta)Log\left(Cotanh\left(\frac{\eta}{2}\right)\right)$$

$$Q_2^1(Cosh(\eta))=-\frac{3Cosh^2(\eta)-2}{Sinh(\eta)}+\frac{3Sinh(2\eta)}{2}Log\left(Cotanh\left(\frac{\eta}{2}\right)\right)$$

.

Prise en compte de conditions aux limites de Robin inhomogènes plus réaliste

Dans ce qui précède nous avons volontairement simplifié les conditions aux limites de Robin sur une iso-surface η=*Cste ou ϑ=Cste. Mais nous savons qu'elles prennent la forme suivante dans un problème axi-symétrique :*

$$\Delta T(\eta,\theta)=0 \quad T(\eta,\theta)\ fini \quad \alpha\,\frac{1}{\sqrt{\left(Sinh^2(\eta)+Sin^2(\theta)\right)}}\frac{\partial T(\eta,\theta)}{\partial\eta}+\beta\,T(\eta,\theta)\Big|_{\eta=l_\eta}=f_{\partial\Omega}(\theta)$$

La solution s'écrit :

$$T(\eta,\theta)=\frac{B_0}{2}+\sum_{n=1,+\infty}B_n\,\frac{(2n+1)}{2}\frac{P_n(Cosh(\eta))}{P_n\left(Cosh(l_\eta)\right)}P_n(Cos(\theta)) \qquad z=Cosn(\theta)$$

$$\alpha\,\frac{1}{\sqrt{\left(Sinh^2(l_\eta)+Sin^2(\theta)\right)}}\frac{\partial T(l_\eta,\theta)}{\partial\eta}+\beta\,T(l_\eta,\theta)=f(\theta)$$

$$\Rightarrow\beta\,\frac{B_0}{2}+\sum_{n=1,+\infty}B_n\,\frac{(2n+1)}{2}\left\{\beta+\alpha\,\frac{Sinh(l_\eta)P_n'\left(Cosh(l_\eta)\right)}{P_n\left(Cosh(l_\eta)\right)\sqrt{\left(Sinh^2(l_\eta)+Sin^2(\theta)\right)}}\right\}P_n(Cos(\theta))=f(\theta)$$

$$Sinh(l_\eta)P_n'\left(Cosh(l_\eta)\right)=\frac{n\left(Cosh(l_\eta)P_n\left(Cosh(l_\eta)\right)-P_{n-1}\left(Cosh(l_\eta)\right)\right)}{Sinh(l_\eta)}$$

$$B_0=\frac{1}{\beta}\int_{-1}^{1}dz\ f_\theta(z) \quad B_n=\int_0^{\pi}d\theta\ Sin(\theta)\frac{Sinh(l_\eta)\sqrt{\left(Sinh^2(l_\eta)+Sin^2(\theta)\right)}f(\theta)}{\beta\,Sinh(l_\eta)\sqrt{\left(Sinh^2(l_\eta)+Sin^2(\theta)\right)}+\alpha\,n\left(Cosh(l_\eta)-\frac{P_{n-1}\left(Cosh(l_\eta)\right)}{P_n\left(Cosh(l_\eta)\right)}\right)}P_n(Cos(\theta))$$

$$B_n=\int_0^{\pi}d\theta\ Sin(\theta)\frac{Sinh(l_\eta)\sqrt{Cosh^2(l_\eta)-Cos^2(\theta)}f(\theta)}{\beta\,Sinh(l_\eta)\sqrt{Cosh^2(l_\eta)-Cos^2(\theta)}+\alpha\,n\left(Cosh(l_\eta)-\frac{P_{n-1}\left(Cosh(l_\eta)\right)}{P_n\left(Cosh(l_\eta)\right)}\right)}P_n(Cos(\theta))$$

$$B_n=\int_{-1}^{+1}dz\,\frac{\sqrt{Cosh^2(l_\eta)-z^2}\,f(z)P_n(z)}{\beta\sqrt{Cosh^2(l_\eta)-z^2}+\frac{\alpha\,n}{Sinh(l_\eta)}\left(Cosh(l_\eta)-\frac{P_{n-1}\left(Cosh(l_\eta)\right)}{P_n\left(Cosh(l_\eta)\right)}\right)}$$

Lorsque le problème est inhomogène de Dirichlet: α=0, β=1, on retrouve l'expression classique :

$$B_n=\int_{-1}^{+1}dz\ f(z)P_n(z)$$

Lorsque le problème est inhomogène de Neumann : β=0, il vient :

$$B_n = \frac{Sinh(l_\eta)}{n\left(Cosh(l_\eta) - \frac{P_{n-1}(Cosh(l_\eta))}{P_n(Cosh(l_\eta))}\right)} \int_{-1}^{+1} dz\, \sqrt{Cosh^2(l_\eta) - z^2}\, f(z) P_n(z)$$

Si par exemple la fonction limite est un flux constant :

$$B_0 = Constante\ quelconque \quad B_n = \frac{Sinh(l_\eta)}{n\left(Cosh(l_\eta) - \frac{P_{n-1}(Cosh(l_\eta))}{P_n(Cosh(l_\eta))}\right)} \int_{-1}^{+1} dz\, \sqrt{Cosh^2(l_\eta) - z^2}\, P_n(z)$$

$$\int_{-1}^{+1} dz\, \sqrt{Cosh^2(l_\eta) - z^2}\, P_{2n+1}(z) = 0 \Rightarrow B_{2n} = \frac{Sinh(l_\eta)}{2n\left(Cosh(l_\eta) - \frac{P_{2n-1}(Cosh(l_\eta))}{P_{2n}(Cosh(l_\eta))}\right)} \int_{-1}^{+1} dz\, P_{2n}(z) \sqrt{Cosh^2(l_\eta) - z^2} \neq 0$$

Alors on peut utiliser les intégrales suivantes pour exprimer la solution :

$$Posons \quad \eta_0 = Cosh(l_\eta) \quad P_{2n}(z) = 2^{2n} \sum_{l=0}^{n} \frac{\Gamma\left(n + l + \frac{1}{2}\right) z^{2l}}{\Gamma(2l+1)\Gamma(2n-2l+1)\Gamma\left(l - n + \frac{1}{2}\right)}$$

$$\Rightarrow \int_{-1}^{+1} dz\, P_{2n}(z) \sqrt{\eta_0^{\,2} - z^2} = 2^{2n} \sum_{l=0}^{n} \frac{\Gamma\left(n + l + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2l+1)\Gamma(2n-2l+1)\Gamma\left(l - n + \frac{1}{2}\right)} \frac{2\eta_0}{2l+1} L_{2l}(\eta_0)$$

$$avec \quad L_{2l}(\eta_0) = {}_2F_1\left(-\frac{1}{2}, l + \frac{1}{2}; l + \frac{3}{2}; \frac{1}{\eta_0^{\,2}}\right)$$

$$\int_{-1}^{+1} dz\, z^{2l} \sqrt{\eta_0^{\,2} - z^2} = \eta_0^{\,2+2l} \int_{-\frac{1}{\eta_0}}^{+\frac{1}{\eta_0}} dx\, x^{2l} \sqrt{1 - x^2} = \frac{2\eta_0}{2l+1}\, {}_2F_1\left(-\frac{1}{2}, l + \frac{1}{2}; l + \frac{3}{2}; \frac{1}{\eta_0^{\,2}}\right)$$

$$Remarque \int_{-\frac{1}{\eta_0}}^{+\frac{1}{\eta_0}} dx\, x^{2l} \sqrt{1 - x^2} = \frac{2}{\eta_0^{\,1+2l}(2l+1)} \quad {}_2F_1\left(-\frac{1}{2}, l + \frac{1}{2}; l + \frac{3}{2}; \frac{1}{\eta_0^{\,2}}\right)$$

Avec une condition de Robin à la frontière du domaine, on est amené à calculer des intégrales du type :

$$Posons \quad \eta_0 = Cosh(l_\eta) \quad c = \frac{D\eta_0}{C} \quad x = \frac{z}{\eta_0}$$

$$\int_{-1}^{+1} dz \frac{\sqrt{\eta_0{}^2 - z^2}}{C + D\sqrt{\eta_0{}^2 - z^2}} P_{2n}(z) = \frac{\eta_0{}^2}{C}\int_{-1}^{+1} d\left(\frac{z}{\eta_0}\right) \frac{\sqrt{1-\left(\frac{z}{\eta_0}\right)^2}}{1+\frac{D\eta_0}{C}\sqrt{1-\left(\frac{z}{\eta_0}\right)^2}} P_{2n}(z) = \frac{\eta_0{}^2}{C}\int_{-\frac{1}{\eta_0}}^{+\frac{1}{\eta_0}} dx \frac{\sqrt{1-x^2}}{1+c\sqrt{1-x^2}} P_{2n}(\eta_0 x)$$

$$Comme \quad P_{2n}(\eta_0 x) = 2^{2n}\sum_{l=0}^{n} \frac{\Gamma\left(n+l+\frac{1}{2}\right)(\eta_0 x)^{2l}}{\Gamma(2l+1)\Gamma(2n-2l+1)\Gamma\left(l-n+\frac{1}{2}\right)}$$

$$\Rightarrow \int_{-1}^{+1} dz \frac{\sqrt{\eta_0{}^2 - z^2}}{C + D\sqrt{\eta_0{}^2 - z^2}} P_{2n}(z) = \frac{1}{C} 2^{2n}\sum_{l=0}^{n} \frac{\Gamma\left(n+l+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2l+1)\Gamma(2n-2l+1)\Gamma\left(l-n+\frac{1}{2}\right)} \eta_0{}^{2+2l}\int_{-\frac{1}{\eta_0}}^{+\frac{1}{\eta_0}} dx \frac{x^{2l}\sqrt{1-x^2}}{1+c\sqrt{1-x^2}}$$

$$Remarque \int_{-\frac{1}{\eta_0}}^{+\frac{1}{\eta_0}} dx\, x^{2l} \frac{\sqrt{1-x^2}}{1+c\sqrt{1-x^2}} = \frac{2}{\eta_0{}^{1+2l}(2l+1)(1-c^2)} \left\{ \begin{array}{l} AppellF_1\left(-\frac{1}{2}, l+\frac{1}{2}; 1; l+\frac{3}{2}; \frac{1}{\eta_0{}^2}; -\frac{c^2}{\eta_0{}^2(1-c^2)}\right) - \\ -\frac{1}{c}\left({}_2F_1\left(1, l+\frac{1}{2}; l+\frac{3}{2}; -\frac{c^2}{\eta_0{}^2(1-c^2)}\right) - 1 + c^2\right) \end{array} \right\}$$

$$\lim_{c\to 0} \frac{{}_2F_1\left(1, l+\frac{1}{2}; l+\frac{3}{2}; -\frac{c^2}{\eta_0{}^2(1-c^2)}\right) - 1 + c^2}{c^2} = 1 - \frac{1}{\eta_0{}^2}\frac{2l+1}{2l+3}$$

$$\Rightarrow \lim_{c\to 0} \int_{-\frac{1}{\eta_0}}^{+\frac{1}{\eta_0}} dx\, x^{2l} \frac{\sqrt{1-x^2}}{1+c\sqrt{1-x^2}} = \frac{2}{\eta_0{}^{1+2l}(2l+1)}\, {}_2F_1\left(-\frac{1}{2}, l+\frac{1}{2}; 1; l+\frac{3}{2}; \frac{1}{\eta_0{}^2}\right)$$

$$\Rightarrow \int_{-1}^{+1} dz \frac{\sqrt{\eta_0{}^2 - z^2}}{C + D\sqrt{\eta_0{}^2 - z^2}} P_{2n}(z) = \frac{1}{C} 2^{2n}\sum_{l=0}^{n} \frac{\Gamma\left(n+l+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2l+1)\Gamma(2n-2l+1)\Gamma\left(l-n+\frac{1}{2}\right)} \frac{2\eta_0}{(2l+1)(1-c^2)} I_l(\eta_0, c)$$

$$I_l(\eta_0, c) = AppellF_1\left(-\frac{1}{2}, l+\frac{1}{2}; 1; l+\frac{3}{2}; \frac{1}{\eta_0{}^2}; -\frac{c^2}{\eta_0{}^2(1-c^2)}\right) - \frac{1}{c}\left({}_2F_1\left(1, l+\frac{1}{2}; l+\frac{3}{2}; -\frac{c^2}{\eta_0{}^2(1-c^2)}\right) - 1 + c^2\right)$$

$$Ici \quad AppellF_1(a, b_1, b_2; c; x; y) = \sum_{m=0}^{m=+\infty}\sum_{n=0}^{n=+\infty} \frac{\Gamma(a+m+n)}{\Gamma(a)} \frac{\Gamma(b_1+m)}{\Gamma(b_1)} \frac{\Gamma(b_2+n)}{\Gamma(b_2)} \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c+m+n)} \frac{x^m}{m!} \frac{y^n}{n!}$$

.

Homogénéisation de l'équation de poisson pour un système de coordonnées orthogonales de révolution

On exprime une solution particulière de l'équation de Poisson avec un terme source constant, dans le cas d'un système de coordonnées orthogonale de révolution (autour de l'axe z). Alors la coordonnées z ne dépend pas de l'angle azimutal φ, tout comme le rayon ρ :

$$Intérieur \quad Poisson \quad \Delta T_{\text{int}}(\alpha,\beta,\varphi)=Q_0 \quad T_{\text{int}}(\alpha,\beta,\varphi)=T_{\text{int}}(\alpha,\beta)$$

$$Extérieur \quad Laplace \quad \Delta T_{ext}(\alpha,\beta,\varphi)=0 \quad T_{ext}(\alpha,\beta,\varphi)=T_{ext}(\alpha,\beta)$$

$$T_{\text{int}}(\alpha,\beta,\varphi)\big|_{\alpha=\alpha_0}=T_{ext}(\alpha,\beta,\varphi)\big|_{\alpha=\alpha_0} \quad \frac{\partial}{\partial \vec{n}}T_{\text{int}}(\alpha,\beta,\varphi)\bigg|_{\alpha=\alpha_0}=\frac{\partial}{\partial \vec{n}}T_{ext}(\alpha,\beta,\varphi)\bigg|_{\alpha=\alpha_0}.$$

$$\Delta T(x,y,z)=\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad \rho=\sqrt{x^2+y^2} \quad \begin{cases} x(\alpha,\beta,\varphi) & z(\alpha,\beta) \\ y(\alpha,\beta,\varphi) & \rho(\alpha,\beta) \end{cases}$$

Dans ce cas, il existe toujours une solution particulière de l'équation de poisson que l'on eut utiliser pour homogénéiser cette équation en une équation de Laplace. La forme de la solution particulière est la suivante :

$$T_{part}(x,y,z)=A\rho^2=A\left(x^2+y^2\right)$$

$$\Delta T_{part}=Q_0 \Rightarrow 4A=Q_0 \Rightarrow A=\frac{Q_0}{4} \Rightarrow T_{part}(x,y,z)=\frac{Q_0}{4}\left(x^2+y^2\right).$$

Si l'on retranche de la solution intérieure cette solution particulière, alors le problème aux limites devient de Laplace et si à l'origine le problème ne dépend pas de l'angle azimutal, la résolution du problème devient classique.

Dans l'exemple de la sphère, nous n'avons pas utilisé cette solution particulière puisque le problème est également indépendant de l'angle θ et donc possède une symétrie supplémentaire quelque soit l'orientation de l'axe de révolution. L'homogénéisation peut se faire alors à partir d'une autre solution particulière de l'équation tout aussi évidente :

$$T_{part}(x,y,z)=A\left(x^2+y^2+z^2\right)$$

$$\Delta T_{part}=Q_0 \Rightarrow 6A=Q_0 \Rightarrow A=\frac{Q_0}{6} \Rightarrow T_{part}(x,y,z)=\frac{Q_0}{6}\left(x^2+y^2+z^2\right)$$

Histoire de généraliser à bon compte, en supposant un système de coordonnées orthogonales à n dimensions dépendant uniquement du rayon multidimensionnel, alors la solution particulière de l'équation de Poisson est la suivante :

$$T_{part}(\vec{\mathbf{x}})=A\sum_{i=1}^{i=n}x_i^{\,2} \quad \Delta T_{part}=Q_0 \Rightarrow 2nA=Q_0 \Rightarrow A=\frac{Q_0}{2n} \Rightarrow T_{part}(x,y,z)=\frac{Q_0}{2n}\sum_{i=1}^{i=n}x_i^{\,2}.$$

Exemple gravitationnel: problème intérieur et extérieur Poisson/Dirichlet, champ gravitationnel interne et externe à un sphéroïde allongé, homogénéisation de l'équation de poisson

On applique la solution particulière pour homogénéiser l'équation de Poisson intérieure :

$$T_{part}(x,y,z)=\frac{Q_0}{4}\left(x^2+y^2\right) \quad Q_0=-4\pi\rho \quad T_{part}(x,y,z)=-\pi\rho\left(x^2+y^2\right)$$

$$x=cSinh(\eta)Sin(\vartheta)Cos(\varphi) \quad y=cSinh(\eta)Sin(\vartheta)Sin(\varphi) \quad z=cCosh(\eta)Cos(\vartheta)$$

$$x^2+y^2=c^2Sinh^2(\eta)Sin^2(\vartheta)$$

Les solutions intérieures et extérieures sont développés comme suit :

$$T_{\text{int}}(\eta,\vartheta)=-\pi\rho c^2Sinh^2(\eta)Sin^2(\vartheta)+\sum_{n=0}^{+\infty}A_nP_n(Cosh(\eta))P_n(Cos(\vartheta))$$

$$\Rightarrow T_{\text{int}}(\eta,\vartheta)=-\pi\rho c^2Sinh^2(\eta)\left(1-Cos^2(\vartheta)\right)+\sum_{n=0}^{+\infty}A_nP_n(Cosh(\eta))P_n(Cos(\vartheta))$$

$$Or \quad x^2=\frac{2}{3}P_2(x)+\frac{1}{3}\Rightarrow 1-x^2=\frac{2}{3}(1-P_2(x))=\frac{2}{3}(P_0(x)-P_2(x))$$

$$\Rightarrow T_{\text{int}}(\eta,\vartheta)=-\frac{2}{3}\pi\rho c^2Sinh^2(\eta)\left(P_0(Cos(\vartheta))-P_2(Cos(\vartheta))\right)+\sum_{n=0}^{+\infty}A_nP_n(Cosh(\eta))P_n(Cos(\vartheta))$$

$$T_{ext}(\eta,\vartheta)=\sum_{n=0}^{+\infty}B_nQ_n(Cosh(\eta))P_n(Cos(\vartheta))$$

$$T_{\text{int}}(\eta,\vartheta)\big|_{\eta=\eta_0}=T_{ext}(\eta,\vartheta)\big|_{\alpha=\alpha_0} \quad \frac{\partial}{\partial\vec{n}}T_{\text{int}}(\eta,\vartheta)\bigg|_{\eta=\eta_0}=\frac{\partial}{\partial\vec{n}}T_{ext}(\eta,\vartheta)\bigg|_{\eta=\eta_0}$$

$$\frac{\partial}{\partial\vec{n}}T_{\text{int}}(\eta,\vartheta)=\frac{1}{c\sqrt{Sinh^2(\eta)+Sin^2(\vartheta)}}\frac{\partial}{\partial\eta}T_{\text{int}}(\eta,\vartheta) \quad \frac{\partial}{\partial\vec{n}}T_{ext}(\eta,\vartheta)=\frac{1}{c\sqrt{Sinh^2(\eta)+Sin^2(\vartheta)}}\frac{\partial}{\partial\eta}T_{ext}(\eta,\vartheta)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial\eta}T_{\text{int}}(\eta,\vartheta)=\frac{\partial}{\partial\eta}T_{ext}(\eta,\vartheta)$$

Le respect des équations de continuité conduit au système linéaire d'équations:

$$\begin{cases} -\frac{2}{3}\pi\rho c^2 Sinh^2(\eta_0)\left(P_0(Cos(\vartheta)) - P_2(Cos(\vartheta))\right) + \sum_{n=0}^{+\infty} A_n P_n(Cosh(\eta_0)) P_n(Cos(\vartheta)) = \sum_{n=0}^{+\infty} B_n Q_n(Cosh(\eta_0)) P_n(Cos(\vartheta)) \\ -\frac{2}{3}\pi\rho c^2 2 Sinh(\eta) Cosh(\eta)\left(P_0(Cos(\vartheta)) - P_2(Cos(\vartheta))\right) + Sinh(\eta)\sum_{n=0}^{+\infty} A_n P_n'(Cosh(\eta)) P_n(Cos(\vartheta)) = \\ = Sinh(\eta)\sum_{n=0}^{+\infty} B_n Q_n'(Cosh(\eta)) P_n(Cos(\vartheta)) \\ \Rightarrow -\frac{4}{3}\pi\rho c^2 Cosh(\eta)\left(P_0(Cos(\vartheta)) - P_2(Cos(\vartheta))\right) + \sum_{n=0}^{+\infty} A_n P_n'(Cosh(\eta)) P_n(Cos(\vartheta)) = \sum_{n=0}^{+\infty} B_n Q_n'(Cosh(\eta)) P_n'(Cos(\vartheta)) \end{cases}$$

$$A_0 - \frac{2}{3}\pi\rho c^2 Sinh^2(\eta_0) = B_0 Q_0(Cosh(\eta_0))$$

$$A_2 P_2(Cosh(\eta_0)) + \frac{2}{3}\pi\rho c^2 Sinh^2(\eta_0) = B_2 Q_2(Cosh(\eta_0))$$

$$-\frac{4}{3}\pi\rho c^2 Cosh(\eta_0) = B_0 Q_0'(Cosh(\eta_0))$$

$$A_2 P_2'(Cosh(\eta_0)) + \frac{4}{3}\pi\rho c^2 Cosh(\eta_0) = B_2 Q_2'(Cosh(\eta_0))$$

$$\forall n \neq 0,2 \quad A_n P_n(Cosh(\eta_0)) = B_n Q_n(Cosh(\eta_0)) \quad A_n P_n'(Cosh(\eta_0)) = B_n Q_n'(Cosh(\eta_0)) \Rightarrow A_n = B_n = 0$$

Les développements du système linéaire d'équations donnent les calculs suivants (intervention du Wronskien des fonctions de Legendre P et Q :

$$Wronskien \quad W\left(P_n(x),Q_n(x)\right)\Big|_{x=Cosh(\eta_0)}=\frac{1}{1-x^2}=P_n(Cosh(\eta_0))Q_n'(Cosh(\eta_0))-P_n'(Cosh(\eta_0))Q_n(Cosh(\eta_0))$$

$$\Rightarrow P_n(Cosh(\eta_0))Q_n'(Cosh(\eta_0))-P_n'(Cosh(\eta_0))Q_n(Cosh(\eta_0))=\frac{1}{1-Cosh^2(\eta_0)}=-\frac{1}{Sinh^2(\eta_0)}$$

$$P_0(Cosh(\eta_0))Q_0'(Cosh(\eta_0))=-\frac{1}{Sinh^2(\eta_0)}\Rightarrow Q_0'(Cosh(\eta_0))=-\frac{1}{Sinh^2(\eta_0)}\Leftarrow P_0(Cosh(\eta_0))=1$$

$$B_0=-\frac{4}{3}\pi\rho c^2\frac{Cosh(\eta_0)}{Q_0'(Cosh(\eta_0))}\qquad A_0=B_0Q_0(Cosh(\eta_0))+\frac{2}{3}\pi\rho c^2Sinh^2(\eta_0)$$

$$A_0=\frac{2}{3}\pi\rho c^2\left(Sinh^2(\eta_0)-2\frac{Cosh(\eta_0)Q_0(Cosh(\eta_0))}{Q_0'(Cosh(\eta_0))}\right)=\frac{2}{3}\pi\rho c^2Sinh^2(\eta_0)(1+2Cosh(\eta_0)Q_0(Cosh(\eta_0)))$$

$$\Rightarrow B_0=\frac{4}{3}\pi\rho c^2Sinh^2(\eta_0)Cosh(\eta_0)$$

$$A_2P_2(Cosh(\eta_0))+\frac{2}{3}\pi\rho c^2Sinh^2(\eta_0)=B_2Q_2(Cosh(\eta_0))\Rightarrow A_2=\frac{B_2Q_2(Cosh(\eta_0))-\frac{2}{3}\pi\rho c^2Sinh^2(\eta_0)}{P_2(Cosh(\eta_0))}$$

$$P_2'(Cosh(\eta_0))\left(\frac{B_2Q_2(Cosh(\eta_0))-\frac{2}{3}\pi\rho c^2Sinh^2(\eta_0)}{P_2(Cosh(\eta_0))}\right)+\frac{4}{3}\pi\rho c^2Cosh(\eta_0)=B_2Q_2'(Cosh(\eta_0))$$

$$\Rightarrow\frac{B_2Q_2(Cosh(\eta_0))}{P_2(Cosh(\eta_0))}P_2'(Cosh(\eta_0))-B_2Q_2'(Cosh(\eta_0))=\frac{2}{3}\pi\rho c^2Sinh^2(\eta_0)\frac{P_2'(Cosh(\eta_0))}{P_2(Cosh(\eta_0))}-\frac{4}{3}\pi\rho c^2Cosh(\eta_0)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\frac{B_2}{P_2(Cosh(\eta_0))}\left(P_2(Cosh(\eta_0))Q_2'(Cosh(\eta_0))-Q_2(Cosh(\eta_0))P_2'(Cosh(\eta_0))\right)=\\=\frac{4}{3}\pi\rho c^2Cosh(\eta_0)-\frac{2}{3}\pi\rho c^2Sinh^2(\eta_0)\frac{P_2'(Cosh(\eta_0))}{P_2(Cosh(\eta_0))}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\frac{B_2}{P_2(Cosh(\eta_0))Sinh^2(\eta_0)}=\frac{2}{3}\pi\rho c^2\left(Sinh^2(\eta_0)\frac{P_2'(Cosh(\eta_0))}{P_2(Cosh(\eta_0))}-2Cosh(\eta_0)\right)$$

$$\Rightarrow B_2=\frac{2}{3}\pi\rho c^2Sinh^2(\eta_0)\left(Sinh^2(\eta_0)P_2'(Cosh(\eta_0))-Cosh(\eta_0)2P_2(Cosh(\eta_0))\right)$$

$$Or\quad P_2'(x)=3x\quad 2P_2(x)=3x^2-1$$

$$\Rightarrow B_2=\frac{2}{3}\pi\rho c^2Sinh^2(\eta_0)\left(3Sinh^2(\eta_0)Cosh(\eta_0)-Cosh(\eta_0)\left(3\left(1+Sinh^2(\eta_0)\right)-1\right)\right)$$

$$\Rightarrow B_2=-\frac{4}{3}\pi\rho c^2Sinh^2(\eta_0)Cosh(\eta_0)\qquad A_2=\frac{B_2Q_2(Cosh(\eta_0))-\frac{2}{3}\pi\rho c^2Sinh^2(\eta_0)}{P_2(Cosh(\eta_0))}$$

$$A_2=-\frac{2}{3}\pi\rho c^2Sinh^2(\eta_0)\frac{1+2Cosh(\eta_0)Q_2(Cosh(\eta_0))}{P_2(Cosh(\eta_0))}$$

La solution extérieur s'écrit fort simplement :

$$\left.\begin{aligned} B_0 &= \frac{4}{3}\pi\rho c^2 Sinh^2(\eta_0)Cosh(\eta_0) \\ B_2 &= -\frac{4}{3}\pi\rho c^2 Sinh^2(\eta_0)Cosh(\eta_0) \end{aligned}\right\} \Rightarrow T_{ext}(\eta,\vartheta) = \frac{4}{3}\pi\rho c^2 Sinh^2(\eta_0)Cosh(\eta_0)\left(Q_0(Cosh(\eta)) - Q_2(Cosh(\eta))P_2(Cos(\vartheta))\right)$$

Et la solution intérieure s'écrit également :

$$\left.\begin{aligned} A_0 &= \frac{2}{3}\pi\rho c^2 Sinh^2(\eta_0)\left(1 + 2Cosh(\eta_0)Q_0(Cosh(\eta_0))\right) \\ A_2 &= -\frac{2}{3}\pi\rho c^2 Sinh^2(\eta_0)\frac{1 + 2Cosh(\eta_0)Q_2(Cosh(\eta_0))}{P_2(Cosh(\eta_0))} \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow T_{\text{int}}(\eta,\vartheta) = \frac{2}{3}\pi\rho c^2 \left\{\begin{aligned} &Sinh^2(\eta_0)\left(1 + 2Cosh(\eta_0)Q_0(Cosh(\eta_0))\right) - Sinh^2(\eta)\left(1 - P_2(Cos(\vartheta))\right) - \\ &- Sinh^2(\eta_0)\left(1 + 2Cosh(\eta_0)Q_2(Cosh(\eta_0))\right)\frac{P_2(Cosh(\eta))}{P_2(Cosh(\eta_0))}P_2(Cos(\vartheta)) \end{aligned}\right\}$$

$$\eta = \eta_0 \Rightarrow T_{\text{int}}(\eta,\vartheta) = \frac{4}{3}\pi\rho c^2 Sinh^2(\eta_0)Cosh(\eta_0)\left\{Q_0(Cosh(\eta_0)) - Q_2(Cosh(\eta_0))P_2(Cos(\vartheta))\right\}$$

Condition de continuité respectée

En terme de fonctions élémentaire, il vient pour le potentiel extérieur :

$$Q_0(z) = \frac{1}{2}Log\left(\frac{z+1}{z-1}\right) \quad Q_1(z) = \frac{z}{2}Log\left(\frac{z+1}{z-1}\right) - 1 \quad Q_2(z) = \frac{1}{4}\left(\left(3z^2 - 1\right)Log\left(\frac{z+1}{z-1}\right) - 6z\right) \quad z \in \mathbf{C}$$

$$\frac{Cosh(\eta)+1}{Cosh(\eta)-1} = \frac{Cosh^2\left(\frac{\eta}{2}\right)}{Sinh^2\left(\frac{\eta}{2}\right)} = Cotanh^2\left(\frac{\eta}{2}\right)$$

$$Q_0(Cosh(\eta)) = \frac{1}{2}Log\left(\frac{Cosh(\eta)+1}{Cosh(\eta)-1}\right) = Log\left(Cotanh\left(\frac{\eta}{2}\right)\right)$$

$$Q_2(Cosh(\eta)) = \frac{1}{2}\left(\left(3Cosh^2(\eta) - 1\right)Log\left(Cotanh\left(\frac{\eta}{2}\right)\right) - 3Cosh(\eta)\right) \quad P_2(Cos(\vartheta)) = \frac{3Cos^2(\vartheta) - 1}{2}$$

$$T_{ext}(\eta,\vartheta) = \frac{4}{3}\pi\rho c^2 Sinh^2(\eta_0)Cosh(\eta_0)\left(Q_0(Cosh(\eta)) - Q_2(Cosh(\eta))P_2(Cos(\vartheta))\right)$$

$$= \pi\rho c^2 Sinh^2(\eta_0)Cosh(\eta_0)\left(\frac{4}{3}Log\left(Cotanh\left(\frac{\eta}{2}\right)\right) - \frac{1}{3}\left(\left(3Cosh^2(\eta) - 1\right)Log\left(Cotanh\left(\frac{\eta}{2}\right)\right) - 3Cosh(\eta)\right)\left(3Cos^2(\vartheta) - 1\right)\right)$$

$$= \pi\rho c^2 Sinh^2(\eta_0)Cosh(\eta_0)\left(\begin{aligned} &Cosh(\eta)\left(3Cos(\vartheta)^2 - 1\right) + \\ &+ Log\left(Cotanh\left(\frac{\eta}{2}\right)\right)\left(\frac{4}{3} - \frac{1}{3}\left(2 + 3Sinh^2(\eta)\right)\left(2 - 3Sin^2(\vartheta)\right)\right) \end{aligned}\right)$$

$$T_{ext}(\eta,\vartheta) = \pi\rho c^2 Sinh^2(\eta_0)Cosh(\eta_0)\left(\begin{aligned} &Cosh(\eta)\left(3Cos(\vartheta)^2 - 1\right) + \\ &+ Log\left(Cotanh\left(\frac{\eta}{2}\right)\right)\left(2\left(Sin^2(\vartheta) - Sinh^2(\eta)\right) + 3Sinh^2(\eta)Sin^2(\vartheta)\right) \end{aligned}\right)$$

D'autre part si l'on considère un sphéroïde allongé de semi-axes respectif a et b, avec a> b, la surface $\eta=\eta 0$, décrit une ellipse sur n'importe quel plan $\varphi=Cste$, de grand axe a (le long de l'axe z) et de petit axe b. On a

$$z = a = cCosh(\eta_0) \quad \rho = \sqrt{x^2+y^2} = b = cSinh(\eta_0) \Rightarrow c = \sqrt{a^2-b^2} \Rightarrow Cosh(\eta_0) = \frac{a}{c} \quad Sinh(\eta_0) = \frac{b}{c}.$$

La solution extérieure s'écrit donc avec les grands et petits axes du sphéroîde :

$$T_{ext}(\eta,\vartheta) = \pi\rho c^2 \frac{b^2}{c^2}\frac{a}{c}\begin{pmatrix} Cosh(\eta)\left(3Cos(\vartheta)^2-1\right)+ \\ +Log\left(Cotanh\left(\frac{\eta}{2}\right)\right)\left(2\left(Sin^2(\vartheta)-Sinh^2(\eta)\right)+3Sinh^2(\eta)Sin^2(\vartheta)\right)\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow T_{ext}(\eta,\vartheta) = \pi\rho\frac{ab^2}{\sqrt{a^2-b^2}}\begin{pmatrix} Cosh(\eta)\left(3Cos(\vartheta)^2-1\right)+ \\ +Log\left(Cotanh\left(\frac{\eta}{2}\right)\right)\left(2\left(Sin^2(\vartheta)-Sinh^2(\eta)\right)+3Sinh^2(\eta)Sin^2(\vartheta)\right)\end{pmatrix}.$$

Exemple d'électrostatique : problème intérieur de Dirichlet, potentiel à l'intérieur d'un sphéroïde allongé conducteur parfait placé au potentiel 0, avec une charge Q0 placé en son centre

Le potentiel crée par une charge Q0 placé au centre d'un sphéroïde allongé est le suivant :

$$x = cSinh(\eta)Sin(\vartheta)Cos(\varphi) \quad y = cSinh(\eta)Sin(\vartheta)Sin(\varphi) \quad z = cCosh(\eta)Cos(\vartheta)$$

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2} = cSinh(\eta)Sin(\vartheta) \quad en\ posant\ \mu = Cos(\vartheta) \quad \nu = Cosh(\eta)$$

$$\Rightarrow z = c\nu\mu \quad \rho = c\sqrt{\nu^2-1}\sqrt{1-\mu^2}$$

$$T_q(\eta,\vartheta) = \frac{Q_0}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{Q_0}{c\sqrt{Sinh^2(\eta)Sin^2(\vartheta)+Cosh(\eta)^2Cos^2(\vartheta)}} =$$

$$\Rightarrow T_q(\eta,\vartheta) = \frac{Q_0}{c\sqrt{Sinh^2(\eta)\left(1-Cos^2(\vartheta)\right)+Cosh(\eta)^2Cos^2(\vartheta)}} = \frac{Q_0}{c\sqrt{Sinh^2(\eta)+Cos^2(\vartheta)}}$$

$$T(\eta,\vartheta) = T_q(\eta,\vartheta)+T_s(\eta,\vartheta) = \frac{Q_0}{c\sqrt{Sinh^2(\eta)+Cos^2(\vartheta)}} + \sum_{n=0}^{+\infty} P_n(Cosh(\eta))P_n(Cos(\vartheta))$$

$$T(\eta,\vartheta)\big|_{\eta=\eta_0} = 0 \Rightarrow T_s(\eta,\vartheta)\big|_{\eta=\eta_0} = -\frac{Q_0}{c\sqrt{Sinh^2(\eta_0)+Cos^2(\vartheta)}} = f_\theta(Cos(\vartheta))$$

La solution générale du problème aux limites de Dirichlet étant la suivante :

$$z = Cos(\theta) \quad B_0 = \int_{-1}^{1} dz\ f_\theta(z) \quad B_m = \int_{-1}^{1} dz\ f_\theta(z)\ P_m(z) \quad T(\eta,\theta) = \frac{B_0}{2} + \sum_{m=1,+\infty} B_m \frac{(2m+1)}{2}\frac{P_m(Cosh(\eta))}{P_m(Cosh(\eta_0))} P_m(Cos(\theta))$$

Il vient :

$$z = Cos(\theta) \quad B_0 = -\frac{Q_0}{c}\int_{-1}^{1} dz\,\frac{1}{\sqrt{Sinh^2(\eta_0)+z^2}} = -\frac{2Q_0}{c}\int_{0}^{1} dz\,\frac{1}{\sqrt{Sinh^2(\eta_0)+z^2}}$$

$$B_m = -\frac{Q_0}{c}\int_{-1}^{1} dz\,\frac{P_m(z)}{\sqrt{Sinh^2(\eta_0)+z^2}} = \begin{cases} 0 \; si \; m \; impair \\ B_{2n} \; si \; m = 2n \; pair \end{cases}$$

$$De\ plus\ on\ sait\ que \quad \int_{-1}^{1} dz\,\frac{P_{2n}(z)}{\sqrt{Sinh^2(\eta_0)+z^2}} = 2P_{2n}(0)Q_{2n}(Cosh(\eta_0)) \Rightarrow B_{2n} = -\frac{2Q_0}{c}P_{2n}(0)Q_{2n}(Cosh(\eta_0))$$

$$\Rightarrow T_s(\eta,\theta) = \sum_{n=0,+\infty} B_{2n}\frac{(4n+1)}{2}\frac{P_{2n}(Cosh(\eta))}{P_{2n}(Cosh(\eta_0))}P_{2n}(Cos(\theta))$$

$$\Rightarrow T(\eta,\theta) = \frac{Q_0}{c\sqrt{Sinh^2(\eta)+Cos^2(\vartheta)}} - \frac{Q_0}{c}\sum_{n=0,+\infty}(4n+1)P_{2n}(0)\frac{Q_{2n}(Cosh(\eta_0))}{P_{2n}(Cosh(\eta_0))}P_{2n}(Cosh(\eta))\,P_{2n}(Cos(\theta))$$

$$\Rightarrow T(\eta,\theta) = \frac{Q_0}{c}\left(\frac{1}{\sqrt{Sinh^2(\eta)+Cos^2(\vartheta)}} - \sum_{n=0,+\infty}(4n+1)P_{2n}(0)\frac{Q_{2n}(Cosh(\eta_0))}{P_{2n}(Cosh(\eta_0))}P_{2n}(Cosh(\eta))\,P_{2n}(Cos(\theta))\right)$$

$$Comme\ P_{2n}(0) = (-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$$

$$\Rightarrow T(\eta,\theta) = \frac{Q_0}{c}\left(\frac{1}{\sqrt{Sinh^2(\eta)+Cos^2(\vartheta)}} - \sum_{n=0,+\infty}(-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}(4n+1)\frac{Q_{2n}(Cosh(\eta_0))}{P_{2n}(Cosh(\eta_0))}P_{2n}(Cosh(\eta))\,P_{2n}(Cos(\theta))\right)$$

$$De\ plus\ c = \sqrt{a^2-b^2} \quad a,b \quad grand\ et\ petit\ axe\ du\ sphéroïde$$

Sur l'axe z, le profil est le suivant :

$$z \notin [-c,c] \Rightarrow Cos(\theta) = \pm 1 \quad Cos^2(\theta) = 1 \quad Sin(\theta) = 0 \rightarrow x = y = 0 \quad \eta \geq 0$$

$$P_{2n}(\pm 1) = 1 \Rightarrow T(\eta,\theta) = \frac{Q_0}{c}\left(\frac{1}{Cosh(\eta)} - \sum_{n=0,+\infty}(-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}(4n+1)\frac{Q_{2n}(Cosh(\eta_0))}{P_{2n}(Cosh(\eta_0))}P_{2n}(Cosh(\eta))\right)$$

$$z \in [-c,c] \Rightarrow \eta = 0 \quad Cos(\theta) \in [-1,1]$$

$$\Rightarrow T(\eta,\theta) = \frac{Q_0}{c}\left(\frac{1}{Cos(\vartheta)} - \sum_{n=0,+\infty}(-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}(4n+1)\frac{Q_{2n}(Cosh(\eta_0))}{P_{2n}(Cosh(\eta_0))}P_{2n}(Cos(\theta))\right)$$

Exemple d'électrostatique : problème extérieur de Dirichlet, potentiel à l'extérieur d'un sphéroïde allongé conducteur parfait placé au potentiel 0, avec une charge Q0 placé sur l'axe z

Pour la résolution de ce problème, on va utiliser la formule d'inverse des distances données par Heine en utilisant les coordonnées μ et ν :

$$x = cSinh(\eta)Sin(\vartheta)Cos(\varphi) \quad y = cSinh(\eta)Sin(\vartheta)Sin(\varphi) \quad z = cCosh(\eta)Cos(\vartheta)$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = cSinh(\eta)Sin(\vartheta) \Rightarrow z = c\nu\mu \quad \rho = c\sqrt{\nu^2 - 1}\sqrt{1 - \mu^2}$$

$$Deux\ points \begin{cases} \mu = Cos(\vartheta) & \nu = Cosh(\eta) \\ \mu' = Cos(\vartheta') & \nu' = Cosh(\eta') \end{cases} \quad dans\ un\ même\ plan\ azimutal$$

$$Distance\ entre\ les\ deux\ points\ (\mu,\nu) \quad (\mu',\nu')$$

$$\frac{c}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{Cosh^2(\eta) + Cosh^2(\eta') - Sin^2(\vartheta) - Sin^2(\vartheta') - 2Cosh(\eta)Cosh(\eta')Cos(\vartheta)Cos(\vartheta') - 2Sinh(\eta)Sinh(\eta')Sin(\vartheta)Sin(\vartheta')}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\mu^2 + \mu'^2 - 2 + \nu^2 + \nu'^2 - 2\nu\nu'\mu\mu' - 2\sqrt{\nu^2 - 1}\sqrt{\nu'^2 - 1}\sqrt{1 - \mu^2}\sqrt{1 - \mu'^2}}}$$

$$= \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)Q_n(Cosh(\eta))P_n(Cosh(\eta'))P_n(Cos(\vartheta))P_n(Cos(\vartheta')) & \eta' < \eta \\ \sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)P_n(Cosh(\eta))Q_n(Cosh(\eta'))P_n(Cos(\vartheta))P_n(Cos(\vartheta')) & \eta < \eta' \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)Q_n(\nu)P_n(\nu')P_n(\mu)P_n(\mu') & \eta' < \eta \\ \sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)P_n(\nu)Q_n(\nu')P_n(\mu)P_n(\mu') & \eta < \eta' \end{cases}$$

Si le point (μ' ,ν') est sur l'axe z, il vient :

$$\vartheta' = \pi \Rightarrow \mu' = Cos(\vartheta') = -1 \quad Sin(\vartheta') = 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{\mu^2 - 1 + \nu^2 + \nu'^2 + 2\nu\nu'\mu}} = \frac{1}{\sqrt{Cosh^2(\eta) + Cosh^2(\eta') - Sin^2(\vartheta) + 2Cosh(\eta)Cosh(\eta')Cos(\vartheta')}}$$

$$= \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+1)Q_n(Cosh(\eta))P_n(Cosh(\eta'))P_n(Cos(\vartheta)) & \eta' < \eta \\ \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+1)P_n(Cosh(\eta))Q_n(Cosh(\eta'))P_n(Cos(\vartheta)) & \eta < \eta' \end{cases}$$

Le potentiel crée par une charge Q0 placé sur l'axe z à une distance donnée d'un sphéroïde allongé est le suivant :

$$x = cSinh(\eta)Sin(\vartheta)Cos(\varphi) \quad y = cSinh(\eta)Sin(\vartheta)Sin(\varphi) \quad z = cCosh(\eta)Cos(\vartheta)$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = cSinh(\eta)Sin(\vartheta) \quad en\ posant\ \mu = Cos(\vartheta) \quad \nu = Cosh(\eta)$$

$$\Rightarrow z = c\nu\mu \quad \rho = c\sqrt{\nu^2 - 1}\sqrt{1-\mu^2}$$

$$Charge\ placée\ à \quad \mu = -1 \quad \nu = \nu_q \Rightarrow z_q = -c\nu_q = cCosh(\eta_q) \quad \rho = 0$$

$$T_q(\eta,\vartheta) = \frac{Q_0}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - z_q)^2}} = \frac{Q_0}{c\sqrt{Sinh^2(\eta)Sin^2(\vartheta) + (Cosh(\eta)Cos(\vartheta) + Cosh(\eta_q))^2}}$$

$$\Rightarrow T_q(\eta,\vartheta) = \frac{Q_0}{c\sqrt{(Cosh^2(\eta) - 1)Sin^2(\vartheta) + Cosh(\eta)^2 Cos^2(\vartheta) + Cosh^2(\eta_q) + 2Cosh(\eta)Cos(\vartheta)Cosh(\eta_q)}}$$

$$= \frac{Q_0}{c\sqrt{Cosh^2(\eta) + Cosh^2(\eta_q) - Sin^2(\vartheta) + 2Cosh(\eta)Cos(\vartheta)Cosh(\eta_q)}}$$

$$= \frac{Q_0}{c}\begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+1)Q_n(Cosh(\eta))P_n(Cosh(\eta_q))P_n(Cos(\vartheta)) & \eta_q < \eta \\ \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+1)P_n(Cosh(\eta))Q_n(Cosh(\eta_q))P_n(Cos(\vartheta)) & \eta < \eta_q \end{cases}$$

$$T(\eta,\vartheta) = T_q(\eta,\vartheta) + T_s(\eta,\vartheta)$$

$$T(\eta,\vartheta)\big|_{\eta=\eta_0} = 0 \Rightarrow T_s(\eta,\vartheta)\big|_{\eta=\eta_0} = -T_q(\eta,\vartheta)\big|_{\eta=\eta_0} = f_\theta(Cos(\vartheta))$$

$$\Rightarrow f_\theta(Cos(\vartheta)) = -\frac{Q_0}{c}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+1)P_n(Cosh(\eta_0))Q_n(Cosh(\eta_q))P_n(Cos(\vartheta)) \qquad \eta_0 < \eta_q$$

La solution Ts s'écrit alors suivant la distance au point de l'axe z :

$$z = Cos(\theta) \quad B_m = \int_{-1}^{1} dz\ f_\theta(z)\ P_m(z) \quad T_s(r,\theta) = \sum_{m=0,+\infty} B_m \frac{(2m+1)}{2}\frac{Q_m(Cosh(\eta))}{Q_m(Cosh(\eta_0))}P_m(Cos(\theta))$$

$$f_\theta(z) = -\frac{Q_0}{c}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+1)P_n(Cosh(\eta_0))Q_n(Cosh(\eta_q))P_n(Cos(\vartheta)) \qquad \eta_0 < \eta$$

$$B_m = \int_{-1}^{1} dz\ f_\theta(z)\ P_m(z) = -\frac{Q_0}{c}(-1)^m(2m+1)\frac{2}{(2m+1)}P_m(Cosh(\eta_0))Q_m(Cosh(\eta_q)) \qquad \eta_0 < \eta$$

$$B_m = \int_{-1}^{1} dz\ f_\theta(z)\ P_m(z) = -\frac{2Q_0}{c}(-1)^m P_m(Cosh(\eta_0))Q_m(Cosh(\eta_q)) \qquad \eta_0 < \eta$$

$$T_s(\eta,\theta) = -\frac{Q_0}{c}\sum_{m=0,+\infty}(-1)^m(2m+1)\frac{P_m(Cosh(\eta_0))Q_m(Cosh(\eta_q))}{Q_m(Cosh(\eta_0))}Q_m(Cosh(\eta))\,P_m(Cos(\theta)) \qquad \eta_0 < \eta$$

.Et

Par conséquent le potentiel total est le suivant :

$$T(\eta,\theta) = \frac{Q_0}{c}\begin{cases} \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m(2m+1)P_m(Cos(\theta))Q_m(Cosh(\eta))\left(P_m(Cosh(\eta_q)) - \frac{P_m(Cosh(\eta_0))}{Q_m(Cosh(\eta_0))}Q_m(Cosh(\eta_q))\right) & \eta_0 < \eta_q < \eta \\ \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m(2m+1)P_m(Cos(\theta))Q_m(Cosh(\eta_q))\left(P_m(Cosh(\eta)) - \frac{P_m(Cosh(\eta_0))}{Q_m(Cosh(\eta_0))}Q_m(Cosh(\eta))\right) & \eta_0 < \eta < \eta_q \end{cases}$$

Exemple d'électrostatique : problème intérieur de Dirichlet, potentiel à l'intérieur d'un sphéroïde allongé conducteur parfait placé au potentiel 0, avec une charge Q0 placé sur l'axe z en dehors des foyers du sphéroïde allongé par convention en valeur |zq| > c

Pour la résolution de ce problème, on va utiliser la formule précédente d'inverse des distances, si le point (μ' ,ν') est sur l'axe z en dehors des foyers soit z < -c, il vient :

$$\vartheta' = \pi \Rightarrow \mu' = Cos(\vartheta') = -1 \quad Sin(\vartheta') = 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{\mu^2 - 1 + \nu^2 + \nu'^2 + 2\nu\nu'\mu}} = \frac{1}{\sqrt{Cosh^2(\eta) + Cosh^2(\eta') - Sin^2(\vartheta) + 2Cosh(\eta)Cosh(\eta')Cos(\vartheta')}}$$

$$= \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+1)Q_n(Cosh(\eta))P_n(Cosh(\eta'))P_n(Cos(\vartheta)) & \eta' < \eta \\ \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+1)P_n(Cosh(\eta))Q_n(Cosh(\eta'))P_n(Cos(\vartheta)) & \eta < \eta' \end{cases}.$$

Le potentiel crée par une charge Q0 placé sur l'axe z à une distance donnée à l'intérieur d'un sphéroïde allongé est le suivant :

$$T_q(\eta,\vartheta) = \frac{Q_0}{c\sqrt{Cosh^2(\eta) + Cosh^2(\eta_q) - Sin^2(\vartheta) + 2Cosh(\eta)Cos(\vartheta)Cosh(\eta_q)}}$$

$$= \frac{Q_0}{c}\begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+1)Q_n(Cosh(\eta))P_n(Cosh(\eta_q))P_n(Cos(\vartheta)) & \eta_q < \eta \\ \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+1)P_n(Cosh(\eta))Q_n(Cosh(\eta_q))P_n(Cos(\vartheta)) & \eta < \eta_q \end{cases}.$$

$$T(\eta,\vartheta) = T_q(\eta,\vartheta) + T_s(\eta,\vartheta) \quad T(\eta,\vartheta)\big|_{\eta=\eta_0} = 0 \Rightarrow T_s(\eta,\vartheta)\big|_{\eta=\eta_0} = -T_q(\eta,\vartheta)\big|_{\eta=\eta_0} = f_\theta(Cos(\vartheta))$$

$$\Rightarrow f_\theta(Cos(\vartheta)) = -\frac{Q_0}{c}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+1)Q_n(Cosh(\eta_0))P_n(Cosh(\eta_q))P_n(Cos(\vartheta)) \qquad \eta_q < \eta_0$$

La solution Ts s'écrit alors suivant la distance au point de l'axe z :

$$z = Cos(\theta) \quad B_m = \int_{-1}^{1} dz\ f_\theta(z)\ P_m(z) \quad T_s(r,\theta) = \sum_{m=0,+\infty} B_m \frac{(2m+1)}{2}\frac{P_m(Cosh(\eta))}{P_m(Cosh(\eta_0))}P_m(Cos(\theta))$$

$$f_\theta(z) = -\frac{Q_0}{c}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+1)Q_n(Cosh(\eta_0))P_n(Cosh(\eta_q))P_n(Cos(\vartheta))$$

$$B_m = \int_{-1}^{1} dz\ f_\theta(z)\ P_m(z) = -\frac{Q_0}{c}(-1)^m(2m+1)\frac{2}{(2m+1)}Q_m(Cosh(\eta_0))P_m(Cosh(\eta_q))$$

$$B_m = \int_{-1}^{1} dz\ f_\theta(z)\ P_m(z) = -\frac{2Q_0}{c}(-1)^m Q_m(Cosh(\eta_0))P_m(Cosh(\eta_q))$$

$$T_s(\eta,\theta) = -\frac{Q_0}{c}\sum_{m=0,+\infty}(-1)^m(2m+1)P_m(Cosh(\eta_q))\frac{Q_m(Cosh(\eta_0))}{P_m(Cosh(\eta_0))}P_m(Cosh(\eta))\,P_m(Cos(\theta))$$

Et par conséquent le potentiel total est le suivant :

$$T(\eta,\theta) = \frac{Q_0}{c}\begin{cases} \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m(2m+1)P_m(Cosh(\eta_q))P_m(Cos(\vartheta))\left(Q_m(Cosh(\eta)) - \frac{Q_m(Cosh(\eta_0))}{P_m(Cosh(\eta_0))}P_m(Cosh(\eta))\right) & \eta_q < \eta < \eta_0 \\ \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m(2m+1)P_m(Cosh(\eta))P_m(Cos(\vartheta))\left(Q_m(Cosh(\eta_q)) - P_m(Cosh(\eta_q))\frac{Q_m(Cosh(\eta_0))}{P_m(Cosh(\eta_0))}\right) & \eta < \eta_q < \eta_0 \end{cases}$$

Exemple d'électrostatique : problème intérieur de Dirichlet, potentiel à l'intérieur d'un sphéroïde allongé conducteur parfait placé au potentiel 0, avec une charge Q0 placé sur l'axe z à l'intérieur des foyers du sphéroïde allongé par convention en valeur |zq| < c

Pour la résolution de ce problème, on va utiliser la formule précédente d'inverse des distances, si le point (μ' ,ν') est sur l'axe z à l'intérieur des foyers soit |z'|< c, il vient :

$$\eta' = 0 \Rightarrow Cosh(\eta') = 1 \quad Sinh(\eta') = 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{Cosh^2(\eta)+1-Sin^2(\vartheta)-Sin^2(\vartheta')-2Cosh(\eta)Cos(\vartheta)Cos(\vartheta')}} = \sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)Q_n(Cosh(\eta))P_n(Cos(\vartheta))P_n(Cos(\vartheta'))$$

Le potentiel crée par une charge Q0 placé sur l'axe z à une distance donnée à l'intérieur d'un sphéroïde allongé est le suivant :

$$T_q(\eta,\vartheta) = \frac{Q_0}{c\sqrt{Cosh^2(\eta)+1-Sin^2(\vartheta)-Sin^2(\vartheta_q)-2Cosh(\eta)Cos(\vartheta)Cos(\vartheta_q)}}$$

$$= \frac{Q_0}{c}\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)Q_n(Cosh(\eta))P_n(Cos(\vartheta))P_n(Cos(\vartheta_q)) \quad .$$

$$T(\eta,\vartheta) = T_q(\eta,\vartheta) + T_s(\eta,\vartheta) \quad T(\eta,\vartheta)\big|_{\eta=\eta_0} = 0 \Rightarrow T_s(\eta,\vartheta)\big|_{\eta=\eta_0} = -T_q(\eta,\vartheta)\big|_{\eta=\eta_0} = f_\theta(Cos(\vartheta))$$

$$\Rightarrow f_\theta(Cos(\vartheta)) = -\frac{Q_0}{c}\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)Q_n(Cosh(\eta_0))P_n(Cos(\vartheta))P_n(Cos(\vartheta_q))$$

La solution Ts s'écrit alors suivant la distance au point de l'axe z :

$$z = Cos(\theta) \quad B_m = \int_{-1}^{1} dz\ f_\theta(z)\ P_m(z) \quad T_s(r,\theta) = \sum_{m=0,+\infty} B_m \frac{(2m+1)}{2}\frac{P_m(Cosh(\eta))}{P_m(Cosh(\eta_0))}P_m(Cos(\theta))$$

$$f_\theta(z) = -\frac{Q_0}{c}\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)Q_n(Cosh(\eta_0))P_n(z)P_n(Cos(\vartheta_q))$$

$$B_m = \int_{-1}^{1} dz\ f_\theta(z)\ P_m(z) = -\frac{Q_0}{c}(2m+1)\frac{2}{(2m+1)}Q_m(Cosh(\eta_0))P_m(Cos(\vartheta_q))$$

$$B_m = \int_{-1}^{1} dz\ f_\theta(z)\ P_m(z) = -\frac{2Q_0}{c}Q_m(Cosh(\eta_0))P_m(Cos(\vartheta_q))$$

$$T_s(\eta,\theta) = -\frac{Q_0}{c}\sum_{m=0,+\infty}(2m+1)\frac{Q_m(Cosh(\eta_0))P_m(Cos(\vartheta_q))}{P_m(Cosh(\eta_0))}P_m(Cos(\theta))P_m(Cosh(\eta))$$

Et par conséquent le potentiel total est le suivant :

$$T(r,\theta) = \frac{Q_0}{c}\left(\sum_{m=0,+\infty}(2m+1)P_m(Cos(\vartheta))P_m(Cos(\vartheta_q))\left(Q_m(Cosh(\eta)) - \frac{Q_m(Cosh(\eta_0))}{P_m(Cosh(\eta_0))}P_m(Cosh(\eta))\right)\right) .$$

On peut également écrire :

$$T(\eta,\theta) = \frac{Q_0}{c}\left(\begin{array}{l}\dfrac{1}{\sqrt{Cosh^2(\eta)+1-Sin^2(\vartheta)-Sin^2(\vartheta_q)-2Cosh(\eta)Cos(\vartheta)Cos(\vartheta_q)}} - \\ -\sum_{m=0,+\infty}(2m+1)P_m(Cos(\vartheta))P_m(Cos(\vartheta_q))\dfrac{Q_m(Cosh(\eta_0))}{P_m(Cosh(\eta_0))}P_m(Cosh(\eta))\end{array}\right)$$

Lorsque la charge est placée au centre, on retrouve la solution précédente :

$$Charge\ au\ centre \quad \vartheta_q = \frac{\pi}{2}$$

$$T(\eta,\theta) = \frac{Q_0}{c}\left(\frac{1}{\sqrt{Cosh^2(\eta) - Sin^2(\vartheta)}} - \sum_{m=0,+\infty}(2m+1)P_m(Cos(\vartheta))P_m(0)\frac{Q_m(Cosh(\eta_0))}{P_m(Cosh(\eta_0))}P_m(Cosh(\eta))\right)$$

$$P_m(0) = 0 \quad si \quad m = 2n+1$$

$$\Rightarrow T(\eta,\theta) = \frac{Q_0}{c}\left(\frac{1}{\sqrt{Sinh^2(\eta) + Cos^2(\vartheta)}} - \sum_{n=0,+\infty}(4n+1)P_{2n}(0)\frac{Q_{2n}(Cosh(\eta_0))}{P_{2n}(Cosh(\eta_0))}P_{2n}(Cos(\vartheta))\,P_{2n}(Cosh(\eta))\right)$$

Exemple d'équation de la chaleur régime stationnaire en présence d'une source interne de chaleur également répartie dans un sphéroïde allongé dont la surface est fixé à la température 0 : problème intérieur de l'équation de Poisson

On applique la solution particulière pour homogénéiser l'équation de Poisson intérieure :

$$\Delta T(x,y,z) = -Q_0$$

$$T_{part}(x,y,z) = -\frac{Q_0}{4}\left(x^2+y^2\right) \quad x^2+y^2 = c^2Sinh^2(\eta)Sin^2(\vartheta)$$

$$x = cSinh(\eta)Sin(\vartheta)Cos(\varphi) \quad y = cSinh(\eta)Sin(\vartheta)Sin(\varphi) \quad z = cCosh(\eta)Cos(\vartheta)$$

$$Petit\ axe \quad b = cSinh(\eta_0) \quad Grand\ axe \quad a = cCosh(\eta_0)$$

La solution intérieure est développée comme suit :

$$T(\eta,\vartheta) = -\frac{Q_0}{4}c^2Sinh^2(\eta)Sin^2(\vartheta) + \sum_{n=0}^{+\infty}A_nP_n(Cosh(\eta))P_n(Cos(\vartheta))$$

$$\Rightarrow T(\eta,\vartheta) = -\frac{Q_0}{4}c^2Sinh^2(\eta)\left(1-Cos^2(\vartheta)\right) + \sum_{n=0}^{+\infty}A_nP_n(Cosh(\eta))P_n(Cos(\vartheta))$$

$$Or \quad x^2 = \frac{2}{3}P_2(x) + \frac{1}{3} \Rightarrow 1-x^2 = \frac{2}{3}(1-P_2(x)) = \frac{2}{3}(P_0(x)-P_2(x))$$

$$\Rightarrow T(\eta,\vartheta) = -\frac{Q_0}{6}c^2Sinh^2(\eta)\left(P_0(Cos(\vartheta)) - P_2(Cos(\vartheta))\right) + \sum_{n=0}^{+\infty}A_nP_n(Cosh(\eta))P_n(Cos(\vartheta))$$

$$T(\eta,\vartheta)\big|_{\eta=\eta_0} = 0 \Rightarrow -\frac{Q_0}{6}c^2Sinh^2(\eta_0)\left(P_0(Cos(\vartheta)) - P_2(Cos(\vartheta))\right) + \sum_{n=0}^{+\infty}A_nP_n(Cosh(\eta_0))P_n(Cos(\vartheta))$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A_0 = \dfrac{Q_0}{6}c^2Sinh^2(\eta_0) \\ A_2 = -\dfrac{Q_0}{6}c^2Sinh^2(\eta_0)\dfrac{1}{P_2(Cosh(\eta_0))} \quad A_n = 0 \end{cases}$$

$$T(\eta,\vartheta) = -\frac{Q_0}{6}c^2\left(P_0(Cos(\vartheta))\left(Sinh^2(\eta) - Sinh^2(\eta_0)\right) - \left(Sinh^2(\eta) - Sinh^2(\eta_0)\frac{P_2(Cosh(\eta))}{P_2(Cosh(\eta_0))}\right)P_2(Cos(\vartheta))\right)$$

$$T(\eta,\vartheta) = -\frac{Q_0}{6}c^2\left(Sinh^2(\eta) - Sinh^2(\eta_0) - \left(Sinh^2(\eta) - Sinh^2(\eta_0)\frac{P_2(Cosh(\eta))}{P_2(Cosh(\eta_0))}\right)P_2(Cos(\vartheta))\right)$$

Exprimé à l'aide des fonctions élémentaire et des paramètres grand axe a et petit b du sphéroïde, il vient :

$$P_2(Cos(\vartheta)) = \frac{1}{2}\left(3Cos^2(\vartheta) - 1\right) \quad P_0(Cos(\vartheta)) = 1 \quad a = cCosh(\eta_0) \quad b = cSinh(\eta_0)$$

$$P_2(Cosh(\eta)) = \frac{1}{2}\left(3Cosh^2(\eta) - 1\right) \quad P_2(Cosh(\eta_0)) = \frac{3a^2 - c^2}{2c^2} \quad Sinh^2(\eta_0) = \frac{a^2 - c^2}{c^2} \quad c^2 = a^2 - b^2$$

$$T(\eta,\vartheta) = -\frac{Q_0}{6}c^2\left(Sinh^2(\eta) - \frac{b^2}{c^2} - \frac{1}{2}\left(Sinh^2(\eta) - \frac{b^2}{3a^2 - c^2}\left(3Cosh^2(\eta) - 1\right)\right)\left(3Cos^2(\vartheta) - 1\right)\right)$$

$$T(\eta,\vartheta) = -\frac{Q_0}{12}c^2\left(3Sinh^2(\eta)Sin^2(\vartheta) - \frac{2b^2}{c^2} + \frac{b^2}{3a^2 - c^2}\left(3Cosh^2(\eta) - 1\right)\left(3Cos^2(\vartheta) - 1\right)\right)$$

$$\Rightarrow T(\eta,\vartheta) = -\frac{Q_0}{12}\left(a^2 - b^2\right)\left(3Sinh^2(\eta)Sin^2(\vartheta) - \frac{2b^2}{a^2 - b^2} + \frac{b^2}{2a^2 + b^2}\left(3Cosh^2(\eta) - 1\right)\left(3Cos^2(\vartheta) - 1\right)\right).$$

Exemples divers sur des cônes sphéroïdaux ou des sections coniques sphéroïdales allongés plein ou creux (domaines bordés par des hyperboloïdes à deux nappes, tronqués), soumis à des conditions aux limites homogènes angulaires et inhomogènes radiales

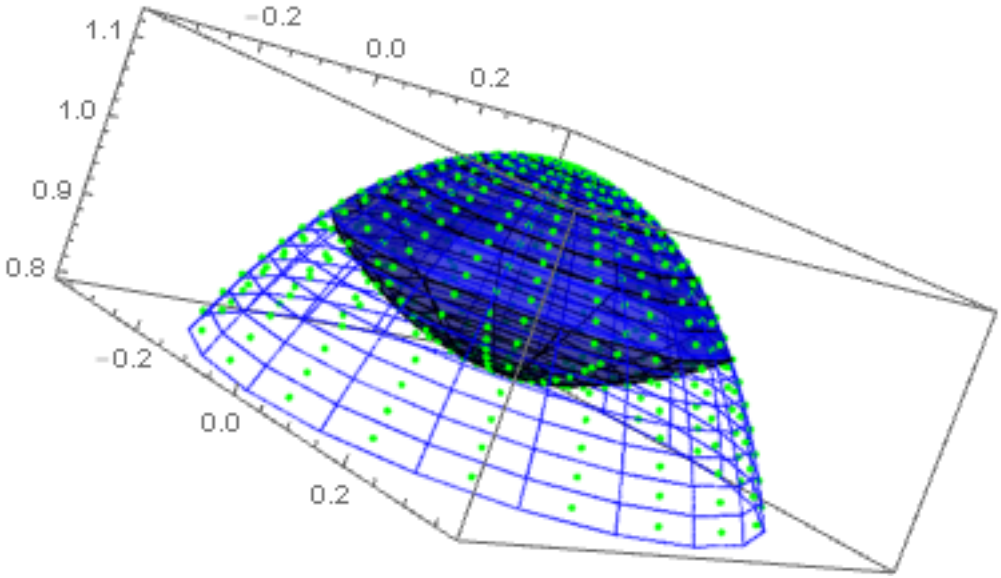
Exemple : *"Cône" sphéroïdal allongé plein d'angle θ_0, en coordonnées sphéroïdales (η,θ) soumis à des conditions aux limites de Dirichlet inhomogènes en $\eta=l_\eta$ et Dirichlet homogènes en $\theta=\theta_0$*

Soit le problème :

$$\Delta T(r,\theta)=0 \quad T(r,\theta)\ fini$$

$$T(r,\theta)\big|_{\eta=l_\eta}=f_\theta(Cos(\theta))$$

$$T(r,\theta)\big|_{\theta=\theta_0}=0$$



A noter que le domaine n'est pas un cône en réalité, mais l'intersection entre la nappe supérieure de l'hyperboloïde *$\theta=\theta_0$ et du sphéroïde allongé $\eta=l_\eta$ comme suit:*

$$l_\eta=Cste \Rightarrow Sphéroide\ allongé\ \frac{x^2}{a^2Sinh^2(l_\eta)}+\frac{y^2}{a^2Sinh^2(l_\eta)}+\frac{z^2}{a^2Cosh^2(l_\eta)}=1$$

$$\theta_0=Cste \Rightarrow Hyperboloïde\ à\ deux\ nappes\ \frac{x^2}{a^2Sin^2(\theta_0)}-\frac{y^2}{a^2Sin^2(\theta_0)}+\frac{z^2}{a^2Cos^2(\theta_0)}=1$$

La solution doit comporter les mêmes contraintes que pour les solutions sur le sphéroïde allongée, à savoir :

$$T(\eta,\theta)\ fini$$

$$T(\eta,\theta)\ fonction\ paire\ en\ \theta\ soit\ \ T(\eta,-\theta)=T(\eta,\theta)$$

$$T(\eta,\theta)\quad ne\ comporte\ aucune\ singularité\ en\ \theta=0, continue\ et\ dérivable$$

Pour respecter la condition aux limites $T(\eta,\theta)\big|_{\theta=\theta_0}=0$*, on est amené à rechercher une extension des polynômes de Legendre de degré entier à des fonctions de Legendre de degré non entier* λ_n $P_n(Cos(\theta))\to P_{\lambda_n}(Cos(\theta))\quad \lambda_n \quad tq \quad P_{\lambda_n}(Cos(\theta_0))=0$.

<u>Exemple</u> si l'on prend la valeur $\theta_0=\pi/2$*, alors on retrouve les valeurs propres* λ_n *=2n+1,*

si l'on prend l'angle $\theta_0=\pi/3$*, alors les 20 premières valeurs propres* λ_n *=* `1.77729,4.76278,7.75826,10.7561,13.7548,16.754,19.7534,22.753,25.7526,28.7524,31.7521,34.752,37.7518,40.7517,43.7516,46.7515,49.7514,52.7513,55.7512,58.7512`

si l'on prend l'angle $\theta_0=\pi/7$*, alors les 20 premières valeurs propres* λ_n *=* `4.85051, 11.7962, 18.7798, 25.7719, 32.7673, 39.7643, 46.7622, 53.7606, 60.7594, 67.7585, 74.7577, 81.757, 88.7565, 95.756, 102.756, 109.755, 116.755, 123.755, 130.754, 137.754`

si l'on prend l'angle $\theta_0=10\pi/7$*, alors les 20 premières valeurs propres* λ_n *=* `0.802557, 2.55757, 4.30927, 6.06011, 7.8106, 9.56093, 11.3112, 13.0613, 14.8115, 16.5616, 18.3117, 20.0617, 21.8118, 23.5618, 25.3119, 27.0619, 28.812, 30.562, 32.312, 34.062`

En respectant la contrainte de finitude et par principe de superposition on recherche la solution sous la forme d'une série :

$$T(\eta,\theta)=\sum_{n\neq 0,+\infty} B_n P_{\lambda_n}(Cosh(\eta))P_{\lambda_n}(Cos(\theta))$$

La prise en compte de la condition aux limites inhomogènes en $\eta=l_\eta$ *donne :*

$$B_n=\int_0^{\vartheta_0} d\vartheta\, Sin(\theta)\, f_\theta(Cos(\theta))\, P_{\lambda_n}(Cos(\theta)) \leftarrow z=Cos(\theta) \quad on\ pose\ \mu_0=Cos(\theta_0)$$

$$B_n=-\int_1^{Cos(\theta_0)} dz\, f_\theta(z)\, P_{\lambda_n}(z)=\int_{Cos(\theta_0)}^{1} dz\, f_\theta(z)\, P_{\lambda_n}(z) \quad \left\|P_{\lambda_n}(z)\right\|^2=\int_{Cos(\theta_0)}^{1} dz\, P_{\lambda_n}(z)^2=\int_{\mu_0}^{1} dz\, P_{\lambda_n}(z)^2$$

$$\lambda_n\ tq\ P_{\lambda_n}(\mu_0)=0 \qquad T(\eta,\theta)=\sum_{n\neq 0,+\infty}\frac{B_n}{\left\|P_{\lambda_n}(z)\right\|^2}\frac{P_{\lambda_n}(Cosh(\eta))}{P_{\lambda_n}(Cosh(l_\eta))}P_{\lambda_n}(Cos(\theta))$$

En utilisant les résultats de calculs similaires pour le cas des coordonnées sphériques, on peut expliciter cette solution sur le cône sphéroïdal comme suit :

$$\mu_0=Cos(\theta_0) \quad B_n=\int_{\mu_0}^{1} dz\, f_\theta(z)\, P_{\lambda_n}(z)$$

$$T(\eta,\theta)=\sum_{n\neq 0,+\infty}-\frac{(2\lambda_n+1)}{\lambda_n P_{\lambda_n-1}(\mu_0)\dfrac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\partial\lambda_n}}B_n\frac{P_{\lambda_n}(Cosh(\eta))}{P_{\lambda_n}(Cosh(l_\eta))}P_{\lambda_n}(Cos(\theta))$$

Lorsque $f_\vartheta(\vartheta)=1$ *alors :*

$$\mu_0=Cos(\theta_0) \quad \lambda_n \quad tq\ P_{\lambda_n}(\mu_0)=0 \quad B_n=\int_{\mu_0}^{1} dz\, P_{\lambda_n}(z)=\left[\frac{P_{\lambda_n+1}(z)-P_{\lambda_n-1}(z)}{2\lambda_n+1}\right]_{\mu_0}^{1}=\frac{P_{\lambda_n-1}(\mu_0)-P_{\lambda_n+1}(\mu_0)}{2\lambda_n+1}$$

$$\Rightarrow T(\eta,\theta)=\sum_{n\neq 0,+\infty}-\frac{P_{\lambda_n-1}(\mu_0)-P_{\lambda_n+1}(\mu_0)}{\lambda_n\dfrac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\partial\lambda_n}P_{\lambda_n-1}(\mu_0)}\frac{P_{\lambda_n}(Cosh(\eta))}{P_{\lambda_n}(Cosh(l_\eta))}P_{\lambda_n}(Cos(\theta))$$

.

D'autre part :

$$Formule\ de\ récurrence\ P_{\lambda_n}(\mu_0)=\frac{\lambda_n P_{\lambda_n-1}(\mu_0)+(\lambda_n+1)P_{\lambda_n+1}(\mu_0)}{(2\lambda_n+1)\mu_0}$$

$$P_{\lambda_n}(\mu_0)=0 \Leftrightarrow \lambda_n P_{\lambda_n-1}(\mu_0)=-(\lambda_n+1)P_{\lambda_n+1}(\mu_0) \Leftrightarrow P_{\lambda_n-1}=-\frac{(\lambda_n+1)P_{\lambda_n+1}(\mu_0)}{\lambda_n}$$

$$\Rightarrow P_{\lambda_n-1}(\mu_0)-P_{\lambda_n+1}(\mu_0)=-\frac{(2\lambda_n+1)P_{\lambda_n+1}(\mu_0)}{\lambda_n}=\frac{(2\lambda_n+1)P_{\lambda_n-1}(\mu_0)}{(\lambda_n+1)}$$

$$T(\eta,\theta)=-\sum_{n\neq 0,+\infty}\frac{(2\lambda_n+1)}{\lambda_n(\lambda_n+1)\frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\partial\lambda_n}}\frac{P_{\lambda_n}(Cosh(\eta))}{P_{\lambda_n}(Cosh(l_\eta))}P_{\lambda_n}(Cos(\theta)) \quad \lambda_n \quad tq\ P_{\lambda_n}(\mu_0)=0$$

Au passage on retient de cette solution, la décomposition de l'unité :

$$T(\eta,\theta)\big|_{\eta=l_\eta}=1=-\sum_{n\neq 0,+\infty}\frac{(2\lambda_n+1)}{\lambda_n(\lambda_n+1)\frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\partial\lambda_n}}P_{\lambda_n}(Cos(\theta)) \quad \lambda_n \quad tq\ P_{\lambda_n}(\mu_0)=0$$

Exemple : Cône sphéroïdal allongé plein d'angle ϑ_0, en coordonnées sphéroïdales (η,ϑ) soumis à des conditions aux limites de Dirichlet inhomogènes en $\eta=l_\eta$ et Neumann homogènes en $\vartheta=\vartheta_0$

Soit le problème :

$$\Delta T(\eta,\theta)=0 \quad T(\eta,\theta)\ fini$$

$$T(\eta,\theta)\big|_{\eta=l_\eta}=f_\theta(Cos(\theta))$$

$$T'_\theta(\eta,\theta)\big|_{\theta=\theta_0}=0$$

La solution doit comporter les mêmes contraintes que pour les solutions sur le sphèroïde, à savoir

$$T(\eta,\theta)\ fini$$

$$T(\eta,\theta)\ fonction\ paire\ en\ \theta\ soit\ \ T(\eta,-\theta)=T(\eta,\theta)$$

$$T(\mu,\theta) \quad ne\ comporte\ aucune\ singularité\ en\ \theta=0, continue\ et\ dérivable$$

Pour respecter la condition aux limites $T'_\theta(\eta,\theta)\big|_{\theta=\theta_0}=0$*, on est amené à rechercher une extension des polynômes de Legendre de degré entier à des fonctions de Legendre de degré non entier λ_n* $P_n(Cos(\theta))\rightarrow P_{\lambda_n}(Cos(\theta))$*, ce qui donne la condition suivante pour établir les valeurs propres du problème de Sturm-Liouville.*

$$\mu_0=Cos(\theta_0)\,;\ \frac{dP_{\lambda_n}(z)}{dz}\bigg|_{z=\mu_0}=0 \quad \frac{\partial P_{\lambda_n}(z)}{\partial z}=\frac{\lambda_n}{z^2-1}\left(zP_{\lambda_n}(z)-P_{\lambda_n-1}(z)\right) \quad \forall\lambda_n>0\in\Re\ ou\ \mathbf{N}$$

$$\Rightarrow \frac{\lambda_n}{\mu_0^{\ 2}-1}\left(\mu_0 P_{\lambda_n}(\mu_0)-P_{\lambda_n-1}(\mu_0)\right)=0$$

$$\Rightarrow \lambda_n=0\ ou\ \mu_0 P_{\lambda_n}(\mu_0)-P_{\lambda_n-1}(\mu_0)=0$$

<u>Exemple</u> si l'on prend la valeur $\theta_0 = \pi/2$*, alors on retrouve les valeurs propres* λ_n *=2n n≥0,*

si l'on prend l'angle $\theta_0 = \pi/3$*, alors les 21 premières valeurs propres* λ_n = 0, 3.19569, 6.21953, 9.22885, 12.2338, 15.2369, 18.239, 21.2405, 24.2416, 27.2426, 30.2433, 33.2439, 36.2444, 39.2448, 42.2452, 45.2455, 48.2458, 51.246, 54.2462, 57.2464, 60.2466

si l'on prend l'angle $\theta_0 = \pi/7$*, alors les 20 premières valeurs propres* λ_n = 0, 8.05252, 15.14, 22.1738, 29.1917, 36.2028, 43.2104, 50.2158, 57.22, 64.2232, 71.2258, 78.228, 85.2298, 92.2313, 99.2326, 106.234, 113.235, 120.236, 127.236, 134.237, 141.238

En respectant la contrainte de finitude et par principe de superposition on recherche la solution sous la forme d'une série :

$$T(r,\theta) = \sum_{n\neq 0,+\infty} B_n P_{\lambda_n}(Cosh(\eta)) P_{\lambda_n}(Cos(\theta))$$

La prise en compte de la condition aux limites inhomogènes en r=l_η*, donne, en incluant la valeur propre 0:*

$$Fonctions\ propres\ P_0(z) = 1 \quad P_n(z)$$

$$z = Cos(\theta) \quad \mu_0 = Cos(\theta_0)$$

$$B_0 = \int_{\mu_0}^{1} dz\ f_\theta(z) \qquad B_n = -\int_{1}^{\mu_0} dz\ f_\theta(z)\ P_{\lambda_n}(z) = \int_{\mu_0}^{1} dz\ f_\theta(z)\ P_{\lambda_n}(z) \quad \left\|P_{\lambda_n}(z)\right\|^2 = \int_{\mu_0}^{1} dz\ P_{\lambda_n}(z)^2 \quad \left\|P_0(z)\right\|^2 = \int_{\mu_0}^{1} dz = 1-\mu_0$$

$$\lambda_n \quad tq \quad \lambda_n = 0\ ou\ \mu_0 P_{\lambda_n}(\mu_0) - P_{\lambda_n - 1}(\mu_0) = 0$$

$$T(\eta,\theta) = \frac{B_0}{1-\mu_0} + \sum_{n\neq 0,+\infty} \frac{B_n}{\left\|P_{\lambda_n}(z)\right\|^2} \frac{P_{\lambda_n}(Cosh(\eta))}{P_{\lambda_n}(Cosh(l_\eta))} P_{\lambda_n}(Cos(\theta))$$

La norme des fonctions propres se calcule ainsi (voir résultats sur les coordonnées sphériques) :

$$\left\|P_{\lambda_n}(z)^2\right\| = \frac{\lambda_n}{(2\lambda_n+1)} P_{\lambda_n}(\mu_0)\left(\frac{\partial P_{\lambda_n-1}(\mu_0)}{\partial\lambda} - \mu_0 \frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\partial\lambda}\right)$$

La solution du problème s'écrit donc :

$$\mu_0 = Cos(\theta_0)$$

$$B_0 = \int_{\mu_0}^{1} dz\ f_\theta(z) \quad B_n = \int_{\mu_0}^{1} dz\ f_\theta(z)\ P_{\lambda_n}(z)$$

$$\lambda_n \quad tq \quad \lambda_n = 0\ ou\ \mu_0 P_{\lambda_n}(\mu_0) - P_{\lambda_n - 1}(\mu_0) = 0$$

$$T(\eta,\theta) = \frac{B_0}{1-\mu_0} + \sum_{n\neq 0,+\infty} \frac{2\lambda_n+1}{\lambda_n} \frac{B_n}{P_{\lambda_n}(\mu_0)\left(\frac{\partial P_{\lambda_n-1}(\mu_0)}{\partial\lambda} - \mu_0 \frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\partial\lambda}\right)} \frac{P_{\lambda_n}(Cosh(\eta))}{P_{\lambda_n}(Cosh(l_\eta))} P_{\lambda_n}(Cos(\theta))$$

Lorsque $f_\vartheta(\vartheta)=1$ alors on a :

$$\mu_0 = Cos(\theta_0) \quad \lambda_n \quad tq \quad \lambda_n = 0 \; ou \; \mu_0 P_{\lambda_n}(\mu_0) - P_{\lambda_n - 1}(\mu_0) = 0$$

$$B_0 = 1-\mu_0 \quad B_n = \int_{\mu_0}^{1} dz \; P_{\lambda_n}(z) = \frac{1}{2\lambda_n+1}\left[P_{\lambda_n+1}(z) - P_{\lambda_n-1}(z)\right]_{\mu_0}^{1} = \frac{1}{2\lambda_n+1}\left(P_{\lambda_n-1}(\mu_0) - P_{\lambda_n+1}(\mu_0)\right)$$

$$= \frac{1}{2\lambda_n+1}\left(\mu_0 P_{\lambda_n}(\mu_0) - P_{\lambda_n+1}(\mu_0)\right)$$

en utilisant la forme alternative de l'intégrale indéfinie $\int dz \; P_{\lambda_n}(z) = \frac{1}{\lambda_n+1}\left[zP_{\lambda_n}(z) - P_{\lambda_n-1}(z)\right]$

$$B_n = \int_{\mu_0}^{1} dz \; P_{\lambda_n}(z) = \frac{1}{\lambda_n+1}\left[zP_{\lambda_n}(z) - P_{\lambda_n-1}(z)\right]_{\mu_0}^{1} = \frac{1}{\lambda_n+1}\left[P_{\lambda_n-1}(\mu_0) - \mu_0 P_{\lambda_n}(\mu_0)\right] = 0$$

$$\Rightarrow T(\eta,\theta) = \frac{1-\mu_0}{1-\mu_0} = 1$$

Et l'on retrouve bien la solution triviale $T(\eta,\vartheta)=1$

A titre d'illustration, choisissons une autre fonction limite de profil :

$$f_\theta(\theta) = 1 - Heaviside(\theta - \theta_1) \quad avec \; \theta_1 \in \left]0, \theta_0\right[$$

et posons $\mu_1 = Cos(\theta_1)$

$$B_0 = \int_{\mu_1}^{1} dz = (1-\mu_1) \quad B_n = \int_{\mu_1}^{1} dz \; P_{\lambda_n}(z) = \frac{1}{2\lambda_n+1}\left[P_{\lambda_n+1}(z) - P_{\lambda_n-1}(z)\right]_{\mu_1}^{1} = \frac{1}{2\lambda_n+1}\left[P_{\lambda_n-1}(\mu_1) - P_{\lambda_n+1}(\mu_1)\right]$$

Il vient la solution suivante :

$$\mu_0 = Cos(\theta_0) \quad \mu_1 = Cos(\theta_1)$$

$$\lambda_n \quad tq \quad \lambda_n = 0 \; ou \; \mu_0 P_{\lambda_n}(\mu_0) - P_{\lambda_n-1}(\mu_0) = 0$$

$$T(\eta,\theta) = \frac{1-\mu_1}{1-\mu_0} + \sum_{n \neq 0, +\infty} \frac{\left(P_{\lambda_n-1}(\mu_1) - P_{\lambda_n+1}(\mu_1)\right)}{\lambda_n P_{\lambda_n}(\mu_0)\left(\frac{\partial P_{\lambda_n-1}(\mu_0)}{\partial \lambda} - \mu_0 \frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\partial \lambda}\right)} \frac{P_{\lambda_n}(Cosh(\eta))}{P_{\lambda_n}(Cosh(l_\eta))} P_{\lambda_n}(Cos(\theta))$$

.

Exemple : *Cône sphéroïdal allongé plein d'angle θ_0, en coordonnées sphéroïdales (η,θ) soumis à des conditions aux limites de Dirichlet inhomogènes en $\eta=l_\eta$ et de Robin homogènes en θ_0*

Soit le problème en transformant la condition aux limites en variable z=Cos(θ):

$$\Delta T(\eta,\theta)=0 \quad T(\eta,\theta)\ fini$$

$$T(\eta,\theta)\big|_{\eta=l_\eta}=f_\theta(Cos(\theta)) \quad z=Cos(\theta) \quad \mu_0=Cos(\theta_0)$$

$$\alpha'\,T_\theta^{'}(\eta,\theta)+\beta\,T(r,\theta)\big|_{\theta=\theta_0}=0 \Leftrightarrow \alpha\,T_z^{'}(\eta,z)+\beta\,T(r,z)\big|_{z=\mu_0}$$

La solution doit comporter les mêmes contraintes que pour les solutions sur la sphère, à savoir

$$T(\eta,\theta)\ fini$$

$$T(\eta,\theta)\ fonction\ paire\ en\ \theta\ soit\ \ T(\eta,-\theta)=T(\eta,\theta)$$

$$T(\eta,\theta)\quad ne\ comporte\ aucune\ singularité\ en\ \theta=0,\ continue\ et\ dérivable$$

On est amené à rechercher une extension des polynômes de Legendre de degré entier à des fonctions de Legendre de degré non entier λ_n $P_n(Cos(\theta))\to P_{\lambda_n}(Cos(\theta))$*, ce qui donne la condition suivante pour établir les valeurs propres du problème de Sturm-Liouville.*

$$\mu_0=Cos(\theta_0)\,;\,\alpha\,\frac{dP_{\lambda_n}(z)}{dz}+\beta\,P_{\lambda_n}(z)\bigg|_{z=\mu_0}=0 \quad \frac{\partial P_{\lambda_n}(z)}{\partial z}=\frac{\lambda_n}{z^2-1}\left(zP_{\lambda_n}(z)-P_{\lambda_n-1}(z)\right)$$

$$\Rightarrow \alpha\,\frac{\lambda_n}{\mu_0^{\ 2}-1}\left(\mu_0 P_{\lambda_n}(\mu_0)-P_{\lambda_n-1}(\mu_0)\right)+\beta\,P_{\lambda_n}(\mu_0)=0$$

<u>Exemple</u> si l'on prend la valeur $\theta_0=\pi/2\,;\alpha=1/2\,;\beta=1/2$*, alors on trouve les 20 premières valeurs propres λ_n =1.73778, 3.85727, 5.90164, 7.92492, 9.93927, 11.949, 13.9561, 15.9614, 17.9656, 19.9689, 21.9717, 23.974, 25.976, 27.9777, 29.9791, 31.9804, 33.9815, 35.9826, 37.9835, 39.9843.*

si l'on prend la valeur $\theta_0=\pi/7\,;\alpha=1/2\,;\beta=1/2$*, alors on trouve les 20 premières valeurs propres λ_n =7.93878, 15.0781, 22.1311, 29.1591, 36.1765, 43.1882, 50.1968, 57.2032, 64.2083, 71.2123, 78.2157, 85.2185, 92.2209, 99.2229, 106.225, 113.226, 120.228, 127.229, 134.23, 141.231.*

si l'on prend la valeur $\theta_0=5\pi/6\,;\alpha=1/2\,;\beta=1/2$*, alors on trouve les 20 premières valeurs propres λ_n =1.01732, 2.21493, 3.41202, 4.60986, 5.8083, 7.00714, 8.20625, 9.40555, 10.605, 11.8045, 13.0041, 14.2038, 15.4035, 16.6033, 17.8031, 19.0029, 20.2027, 21.4026, 22.6025, 23.8023.*

En général il n'est pas nécessaire d'inclure la valeur propre 0 dans le cas où β≠0, si β=0 alors c'est une condition de Neumann homogène et la valeur propre nulle ne doit pas être oubliée. La prise en compte de la condition aux limites inhomogènes en $r=l_r$, donne donc :

$$z=Cos(\theta) \quad \mu_0=Cos(\theta_0)$$

$$B_n=\int_{\mu_0}^{1}dz\ f_\theta(z)\,P_{\lambda_n}(z) \quad \left\|P_{\lambda_n}(z)\right\|^2=\int_{\mu_0}^{1}dz\ P_{\lambda_n}(z)^2$$

$$\lambda_n \quad tq \quad \alpha\,\frac{\lambda_n}{\mu_0^{\ 2}-1}\left(\mu_0 P_{\lambda_n}(\mu_0)-P_{\lambda_n-1}(\mu_0)\right)+\beta\,P_{\lambda_n}(\mu_0)=0$$

$$T(\eta,\theta)=\sum_{n\neq 0,+\infty}\frac{B_n}{\left\|P_{\lambda_n}(z)\right\|^2}\frac{P_{\lambda_n}(Cosh(\eta))}{P_{\lambda_n}(Cosh(l_\eta))}\,P_{\lambda_n}(Cos(\theta))$$

Dans le cas particulier de notre problème le calcul des normes devient (voir section sur les coordonnées sphériques):

Première forme (1)

$$\left\|P_{\lambda_n}(z)^2\right\| = \frac{\lambda_n}{(2\lambda_n+1)}\left(-P_{\lambda_n-1}(\mu_0)\frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\partial\lambda} + \alpha\, P_{\lambda_n-1}(\mu_0)\left(\frac{\beta\left(\mu_0{}^2-1\right)P_{\lambda_n-1}(\mu_0)}{\left(\alpha\,\mu_0\lambda_n+\beta\left(\mu_0{}^2-1\right)\right)^2} + \frac{\lambda_n}{\alpha\,\mu_0\lambda_n+\beta\left(\mu_0{}^2-1\right)}\frac{\partial P_{\lambda_n-1}(\mu_0)}{\partial\lambda}\right)\right)$$

Deuxième forme (2)

$$\left\|P_{\lambda_n}(z)^2\right\| = \frac{P_{\lambda_n}(\mu_0)}{(2\lambda_n+1)}\left(\frac{\beta\left(\mu_0{}^2-1\right)P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\alpha\,\lambda_n} + \lambda_n\left(\frac{\partial P_{\lambda_n-1}(\mu_0)}{\partial\lambda} - \frac{\alpha\,\mu_0\lambda_n+\beta\left(\mu_0{}^2-1\right)}{\alpha\,\lambda_n}\frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\partial\lambda}\right)\right)$$

$si\ \beta=1\ et\ \alpha=0 \quad C.L.\ de\ Dirichlet$

$\Rightarrow P_{\lambda_n}(\mu_0)=0$

$$\left\|P_{\lambda_n}(z)^2\right\| = -\frac{\lambda_n}{2\lambda_n+1}P_{\lambda_n-1}(\mu_0)\frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\partial\lambda_n}$$

$si\ \alpha=1\ et\ \beta=0 \quad C.L.\ de\ Neumann$

$P_{\lambda_n-1}(\mu_0)=\mu_0 P_{\lambda_n}(\mu_0)$

$$\Rightarrow \left\|P_{\lambda_n}(z)^2\right\| = \frac{\lambda_n}{(2\lambda_n+1)}P_{\lambda_n}(\mu_0)\left(\frac{\partial P_{\lambda_n-1}(\mu_0)}{\partial\lambda} - \mu_0\frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\partial\lambda}\right)$$

Et la solution devient

$z=Cos(\theta) \quad \mu_0=Cos(\theta_0)$

$$B_n=\int_{\mu_0}^{1}dz\ f_\theta(z)\ P_{\lambda_n}(z) \quad \left\|P_{\lambda_n}(z)\right\|^2=\int_{\mu_0}^{1}dz\ P_{\lambda_n}(z)^2$$

$$\lambda_n \quad tq \quad \alpha\frac{\lambda_n}{\mu_0{}^2-1}\left(\mu_0 P_{\lambda_n}(\mu_0)-P_{\lambda_n-1}(\mu_0)\right)+\beta\ P_{\lambda_n}(\mu_0)=0$$

$$T(\eta,\theta)=\sum_{n\neq 0,+\infty}\frac{B_n(2\lambda_n+1)\dfrac{P_{\lambda_n}(Cosh(\eta))}{P_{\lambda_n}(Cosh(l_\eta))}P_{\lambda_n}(Cos(\theta))}{\lambda_n\left(-P_{\lambda_n-1}(\mu_0)\dfrac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\partial\lambda}+\alpha\ P_{\lambda_n-1}(\mu_0)\left(\dfrac{\beta\left(\mu_0{}^2-1\right)P_{\lambda_n-1}(\mu_0)}{\left(\alpha\,\mu_0\lambda_n+\beta\left(\mu_0{}^2-1\right)\right)^2}+\dfrac{\lambda_n}{\alpha\,\mu_0\lambda_n+\beta\left(\mu_0{}^2-1\right)}\dfrac{\partial P_{\lambda_n-1}(\mu_0)}{\partial\lambda}\right)\right)} \quad (1)$$

ou bien

$$T(\eta,\theta)=\sum_{n\neq 0,+\infty}\frac{B_n(2\lambda_n+1)\dfrac{P_{\lambda_n}(Cosh(\eta))}{P_{\lambda_n}(Cosh(l_\eta))}P_{\lambda_n}(Cos(\theta))}{P_{\lambda_n}(\mu_0)\left(\dfrac{\beta\left(\mu_0{}^2-1\right)P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\alpha\,\lambda_n}+\lambda_n\left(\dfrac{\partial P_{\lambda_n-1}(\mu_0)}{\partial\lambda}-\dfrac{\alpha\,\mu_0\lambda_n+\beta\left(\mu_0{}^2-1\right)}{\alpha\,\lambda_n}\dfrac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\partial\lambda}\right)\right)} \quad (2)$$

Lorsque $f_\vartheta(\vartheta)=1$, on obtient alors :

$$z = Cos(\theta) \quad \mu_0 = Cos(\theta_0)$$

$$B_n = \int_{\mu_0}^{1} dz\ P_{\lambda_n}(z) = \frac{1}{2\lambda_n+1}\left(P_{\lambda_n-1}(\mu_0) - P_{\lambda_n+1}(\mu_0)\right) \Rightarrow (2\lambda_n+1)B_n = \left(P_{\lambda_n-1}(\mu_0) - P_{\lambda_n+1}(\mu_0)\right)$$

$$\lambda_n \quad tq \quad \alpha\ \frac{\lambda_n}{\mu_0^{\ 2}-1}\left(\mu_0 P_{\lambda_n}(\mu_0) - P_{\lambda_n-1}(\mu_0)\right) + \beta\ P_{\lambda_n}(\mu_0) = 0$$

$$T(\eta,\theta) = \sum_{n\neq 0,+\infty} \frac{\left(P_{\lambda_n-1}(\mu_0) - P_{\lambda_n+1}(\mu_0)\right)\dfrac{P_{\lambda_n}(Cosh(\eta))}{P_{\lambda_n}(Cosh(l_\eta))}\ P_{\lambda_n}(Cos(\theta))}{\lambda_n\left(-P_{\lambda_n-1}(\mu_0)\dfrac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\partial\lambda} + \alpha\ P_{\lambda_n-1}(\mu_0)\left(\dfrac{\beta\left(\mu_0^{\ 2}-1\right)P_{\lambda_n-1}(\mu_0)}{\left(\alpha\ \mu_0\lambda_n + \beta\left(\mu_0^{\ 2}-1\right)\right)^2} + \dfrac{\lambda_n}{\alpha\ \mu_0\lambda_n + \beta\left(\mu_0^{\ 2}-1\right)}\dfrac{\partial P_{\lambda_n-1}(\mu_0)}{\partial\lambda}\right)\right)} \quad (1)$$

ou bien

$$T(\eta,\theta) = \sum_{n\neq 0,+\infty} \frac{\left(P_{\lambda_n-1}(\mu_0) - P_{\lambda_n+1}(\mu_0)\right)\dfrac{P_{\lambda_n}(Cosh(\eta))}{P_{\lambda_n}(Cosh(l_\eta))}\ P_{\lambda_n}(Cos(\theta))}{P_{\lambda_n}(\mu_0)\left(\dfrac{\beta\left(\mu_0^{\ 2}-1\right)P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\alpha\ \lambda_n} + \lambda_n\left(\dfrac{\partial P_{\lambda_n-1}(\mu_0)}{\partial\lambda} - \dfrac{\alpha\ \mu_0\lambda_n + \beta\left(\mu_0^{\ 2}-1\right)}{\alpha\ \lambda_n}\dfrac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\partial\lambda}\right)\right)} \quad (2)$$

<u>Etude des cas limites α=1, β=0 (homogène Neumann) et α=0, β=1 (homogène Dirichlet)</u>

Pour ce qui est du passage à la limite α->0, β->1, la forme (1) donne directement la solution déjà énoncée précédemment :

$$z = Cos(\theta) \quad \mu_0 = Cos(\theta_0) \quad B_n = \int_{\mu_0}^{1} dz\ f_\theta(z)\ P_{\lambda_n}(z) \quad \left\|P_{\lambda_n}(z)\right\|^2 = \int_{\mu_0}^{1} dz\ P_{\lambda_n}(z)^2 \quad \lambda_n \quad tq\ P_{\lambda_n}(\mu_0) = 0$$

$$T(\eta,\theta) = \sum_{n\neq 0,+\infty} -\frac{(2\lambda_n+1)}{\lambda_n} B_n \frac{\dfrac{P_{\lambda_n}(Cosh(\eta))}{P_{\lambda_n}(Cosh(l_\eta))}\ P_{\lambda_n}(Cos(\theta))}{P_{\lambda_n-1}(\mu_0)\dfrac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\partial\lambda}}$$

.

Pour le passage à la limite α->1, β->0, la forme (2) donne également la solution déjà énoncée précédemment :

$$z = Cos(\theta) \quad \mu_0 = Cos(\theta_0)$$

$$B_n = \int_{\mu_0}^{1} dz\ f_\theta(z)\ P_{\lambda_n}(z) \quad \left\|P_{\lambda_n}(z)\right\|^2 = \int_{\mu_0}^{1} dz\ P_{\lambda_n}(z)^2$$

$$\lambda_n \quad tq \quad \frac{\lambda_n}{\mu_0^{\ 2}-1}\left(\mu_0 P_{\lambda_n}(\mu_0) - P_{\lambda_n-1}(\mu_0)\right) \quad soit \quad \lambda_n = 0 \quad ou \quad \mu_0 P_{\lambda_n}(\mu_0) = P_{\lambda_n-1}(\mu_0)$$

$$Pour \quad \lambda_n > 0 \Rightarrow terme\ identique\ cas\ Neumann$$

$$Pour \quad \lambda_n = 0 \Rightarrow B_n = \int_{\mu_0}^{1} dz\ f_\theta(z) \quad \left\|P_0(z)\right\|^2 = 1-\mu_0$$

$$T(\eta,\theta) = \frac{B_0}{1-\mu_0} + \sum_{n\neq 0,+\infty} \frac{(2\lambda_n+1)}{\lambda_n} \frac{B_n\ \dfrac{P_{\lambda_n}(Cosh(\eta))}{P_{\lambda_n}(Cosh(l_\eta))}\ P_{\lambda_n}(Cos(\theta))}{P_{\lambda_n}(\mu_0)\left(\dfrac{\partial P_{\lambda_n-1}(\mu_0)}{\partial\lambda} - \mu_0\dfrac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\partial\lambda}\right)}$$

.

Exemple : *Cône sphéroïdal allongé creux d'angle θ_0, en coordonnées sphéroïdal allongée (η,θ) soumis à des conditions aux limites de Dirichlet homogènes en $\eta=l_{\eta 1}$, inhomogènes en $\eta=l_{\eta 2}$. et de Robin homogènes en θ_0*

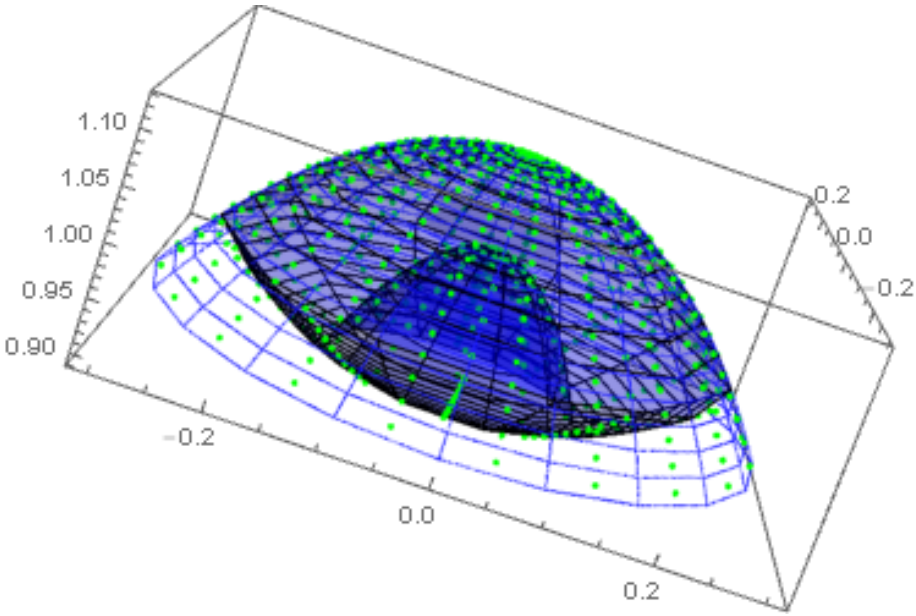
Soit le problème :

$$\Delta T(r,\theta)=0$$

$$T(\eta,\theta)\big|_{r=l_{r1}}=0 \quad T(r,\eta)\ fini \quad z=Cos(\theta)\ et\ \mu_0=Cos(\theta_0)$$

$$T(\eta,\theta)\big|_{r=l_{r2}}=f_\theta(Cos(\theta))$$

$$\alpha'\,T_\theta^{'}(\eta,\theta)+\beta\,T(\eta,\theta)\big|_{\theta=\theta_0}=0 \Leftrightarrow \alpha\,T_z^{'}(\eta,z)+\beta\,T(\eta,z)\big|_{z=\mu_0}=0$$



Il faut tenir compte du changement de la partie radiale des solutions qui possèdent les formes suivantes :

Valeur propre n

$$T(\eta,\theta)\big|_{\eta=l_{\eta 1}}=0 \Rightarrow partie\ radiale \propto \left(\frac{P_{\lambda_n}(Cosh(\eta))}{P_{\lambda_n}(Cosh(l_{\eta 1}))}-\frac{Q_{\lambda_n}(Cosh(\eta))}{Q_{\lambda_n}(Cosh(l_{\eta 1}))}\right)$$

Valeur propre 0

$$T(\eta,\theta)\big|_{\eta=l_{\eta 1}}=0 \Rightarrow partie\ radiale \propto Log\left(\frac{Cosh(\eta/2)}{Sinh(\eta/2)}\right)-Log\left(\frac{Cosh(l_{\eta 1}/2)}{Sinh(l_{\eta 1}/2)}\right) \propto Log\left(\frac{Tanh(l_{\eta 1}/2)}{Tanh(\eta/2)}\right)$$

En suivant la suite de calcul effectué dans l'exemple précédent, on trouve la solution suivante, exprimée sous deux formes :

$$z = Cos(\theta) \quad \mu_0 = Cos(\theta_0) \quad B_n = \int_{\mu_0}^{1} dz\ f_\theta(z)\ P_{\lambda_n}(z) \quad \left\| P_{\lambda_n}(z) \right\|^2 = \int_{\mu_0}^{1} dz\ P_{\lambda_n}(z)^2$$

$$\lambda_n \quad tq \quad \alpha \frac{\lambda_n}{\mu_0^{\ 2}-1}\left(\mu_0 P_{\lambda_n}(\mu_0) - P_{\lambda_n-1}(\mu_0)\right) + \beta\ P_{\lambda_n}(\mu_0) = 0$$

$$T(\eta,\theta) = \sum_{n\neq 0,+\infty} \frac{B_n(2\lambda_n+1)\dfrac{\left(\dfrac{P_{\lambda_n}(Cosh(\eta))}{P_{\lambda_n}(Cosh(l_{\eta 1}))} - \dfrac{Q_{\lambda_n}(Cosh(\eta))}{Q_{\lambda_n}(Cosh(l_{\eta 1}))}\right)}{\left(\dfrac{P_{\lambda_n}(Cosh(l_{\eta 2}))}{P_{\lambda_n}(Cosh(l_{\eta 1}))} - \dfrac{Q_{\lambda_n}(Cosh(l_{\eta 2}))}{Q_{\lambda_n}(Cosh(l_{\eta 1}))}\right)} P_{\lambda_n}(Cos(\theta))}{\lambda_n\left(-P_{\lambda_n-1}(\mu_0)\dfrac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\partial\lambda} + \alpha\ P_{\lambda_n-1}(\mu_0)\left(\dfrac{\beta\left(\mu_0^{\ 2}-1\right)P_{\lambda_n-1}(\mu_0)}{\left(\alpha\ \mu_0\lambda_n + \beta\left(\mu_0^{\ 2}-1\right)\right)^2} + \dfrac{\lambda_n}{\alpha\ \mu_0\lambda_n + \beta\left(\mu_0^{\ 2}-1\right)}\dfrac{\partial P_{\lambda_n-1}(\mu_0)}{\partial\lambda}\right)\right)} \quad (1)$$

ou bien

$$T(\eta,\theta) = \sum_{n\neq 0,+\infty} \frac{B_n(2\lambda_n+1)\dfrac{\left(\dfrac{P_{\lambda_n}(Cosh(\eta))}{P_{\lambda_n}(Cosh(l_{\eta 1}))} - \dfrac{Q_{\lambda_n}(Cosh(\eta))}{Q_{\lambda_n}(Cosh(l_{\eta 1}))}\right)}{\left(\dfrac{P_{\lambda_n}(Cosh(l_{\eta 2}))}{P_{\lambda_n}(Cosh(l_{\eta 1}))} - \dfrac{Q_{\lambda_n}(Cosh(l_{\eta 2}))}{Q_{\lambda_n}(Cosh(l_{\eta 1}))}\right)} P_{\lambda_n}(Cos(\theta))}{P_{\lambda_n}(\mu_0)\left(\dfrac{\beta\left(\mu_0^{\ 2}-1\right)P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\alpha\ \lambda_n} + \lambda_n\left(\dfrac{\partial P_{\lambda_n-1}(\mu_0)}{\partial\lambda} - \dfrac{\alpha\ \mu_0\lambda_n + \beta\left(\mu_0^{\ 2}-1\right)}{\alpha\ \lambda_n}\dfrac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\partial\lambda}\right)\right)} \quad (2)$$

Lorsque $f_\vartheta(\vartheta)=1$, on obtient alors :

$$z = Cos(\theta) \quad \mu_0 = Cos(\theta_0)$$

$$B_n = \int_{\mu_0}^{1} dz\ P_{\lambda_n}(z) = \frac{1}{2\lambda_n+1}\left(P_{\lambda_n-1}(\mu_0) - P_{\lambda_n+1}(\mu_0)\right) \Rightarrow (2\lambda_n+1)B_n = \left(P_{\lambda_n-1}(\mu_0) - P_{\lambda_n+1}(\mu_0)\right)$$

$$\lambda_n \quad tq \quad \alpha \frac{\lambda_n}{\mu_0^{\ 2}-1}\left(\mu_0 P_{\lambda_n}(\mu_0) - P_{\lambda_n-1}(\mu_0)\right) + \beta\ P_{\lambda_n}(\mu_0) = 0$$

$$T(\eta,\theta) = \sum_{n\neq 0,+\infty} \frac{\left(P_{\lambda_n-1}(\mu_0) - P_{\lambda_n+1}(\mu_0)\right)\dfrac{\left(\dfrac{P_{\lambda_n}(Cosh(\eta))}{P_{\lambda_n}(Cosh(l_{\eta 1}))} - \dfrac{Q_{\lambda_n}(Cosh(\eta))}{Q_{\lambda_n}(Cosh(l_{\eta 1}))}\right)}{\left(\dfrac{P_{\lambda_n}(Cosh(l_{\eta 2}))}{P_{\lambda_n}(Cosh(l_{\eta 1}))} - \dfrac{Q_{\lambda_n}(Cosh(l_{\eta 2}))}{Q_{\lambda_n}(Cosh(l_{\eta 1}))}\right)} P_{\lambda_n}(Cos(\theta))}{\lambda_n\left(-P_{\lambda_n-1}(\mu_0)\dfrac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\partial\lambda} + \alpha\ P_{\lambda_n-1}(\mu_0)\left(\dfrac{\beta\left(\mu_0^{\ 2}-1\right)P_{\lambda_n-1}(\mu_0)}{\left(\alpha\ \mu_0\lambda_n + \beta\left(\mu_0^{\ 2}-1\right)\right)^2} + \dfrac{\lambda_n}{\alpha\ \mu_0\lambda_n + \beta\left(\mu_0^{\ 2}-1\right)}\dfrac{\partial P_{\lambda_n-1}(\mu_0)}{\partial\lambda}\right)\right)} \quad (1)$$

ou bien

$$T(\eta,\theta) = \sum_{n\neq 0,+\infty} \frac{\left(P_{\lambda_n-1}(\mu_0) - P_{\lambda_n+1}(\mu_0)\right)\dfrac{\left(\dfrac{P_{\lambda_n}(Cosh(\eta))}{P_{\lambda_n}(Cosh(l_{\eta 1}))} - \dfrac{Q_{\lambda_n}(Cosh(\eta))}{Q_{\lambda_n}(Cosh(l_{\eta 1}))}\right)}{\left(\dfrac{P_{\lambda_n}(Cosh(l_{\eta 2}))}{P_{\lambda_n}(Cosh(l_{\eta 1}))} - \dfrac{Q_{\lambda_n}(Cosh(l_{\eta 2}))}{Q_{\lambda_n}(Cosh(l_{\eta 1}))}\right)} P_{\lambda_n}(Cos(\theta))}{P_{\lambda_n}(\mu_0)\left(\dfrac{\beta\left(\mu_0^{\ 2}-1\right)P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\alpha\ \lambda_n} + \lambda_n\left(\dfrac{\partial P_{\lambda_n-1}(\mu_0)}{\partial\lambda} - \dfrac{\alpha\ \mu_0\lambda_n + \beta\left(\mu_0^{\ 2}-1\right)}{\alpha\ \lambda_n}\dfrac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\partial\lambda}\right)\right)} \quad (2)$$

Etude des cas limites α=1, β=0 (homogène Neumann) et α=0, β=1 (homogène Dirichlet)

Pour ce qui est du passage à la limite α->0, β->1 (Dirichlet), la forme (1) donne directement la solution déjà énoncée précédemment :

$$z = Cos(\theta) \quad \mu_0 = Cos(\theta_0)$$

$$B_n = \int_{\mu_0}^{1} dz\ f_\theta(z)\ P_{\lambda_n}(z) \quad \left\| P_{\lambda_n}(z) \right\|^2 = \int_{\mu_0}^{1} dz\ P_{\lambda_n}(z)^2$$

$$\lambda_n \quad tq\ P_{\lambda_n}(\mu_0) = 0$$

$$T(\eta,\theta) = \sum_{n\neq 0,+\infty} -\frac{(2\lambda_n+1)}{\lambda_n} B_n \frac{\left(\dfrac{P_{\lambda_n}(Cosh(\eta))}{P_{\lambda_n}(Cosh(l_{\eta 1}))} - \dfrac{Q_{\lambda_n}(Cosh(\eta))}{Q_{\lambda_n}(Cosh(l_{\eta 1}))}\right)}{\left(\dfrac{P_{\lambda_n}(Cosh(l_{\eta 2}))}{P_{\lambda_n}(Cosh(l_{\eta 1}))} - \dfrac{Q_{\lambda_n}(Cosh(l_{\eta 2}))}{Q_{\lambda_n}(Cosh(l_{\eta 1}))}\right)} \frac{P_{\lambda_n}(Cos(\theta))}{P_{\lambda_n-1}(\mu_0)\dfrac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\partial\lambda}}$$

Pour le passage à la limite α->1, β->0, la forme (2) donne également la solution déjà énoncée précédemment (en y ajoutant la valeur propre nulle car la condition homogène est de Neumann) :

$$z = Cos(\theta) \quad \mu_0 = Cos(\theta_0)$$

$$\lambda_n \quad tq \quad \frac{\lambda_n}{\mu_0^{\ 2}-1}\left(\mu_0 P_{\lambda_n}(\mu_0) - P_{\lambda_n-1}(\mu_0)\right) = 0 \Rightarrow \lambda_n = 0 \quad ou \quad \mu_0 P_{\lambda_n}(\mu_0) = P_{\lambda_n-1}(\mu_0)$$

$$On\ rajoute\ la\ solution\ \lambda_n = 0 \Rightarrow B_0 = \int_{\mu_0}^{1} dz\ f_\theta(z) \quad et \quad \left\| P_0(z) \right\|^2 = \int_{\mu_0}^{1} dz\ = 1-\mu_0$$

$$\lambda_n > 0 \Rightarrow B_n = \int_{\mu_0}^{1} dz\ f_\theta(z)\ P_{\lambda_n}(z) \quad et \quad \left\| P_{\lambda_n}(z)^2 \right\| = \frac{\lambda_n P_{\lambda_n}(\mu_0)}{(2\lambda_n+1)}\left(\frac{\partial P_{\lambda_n-1}(\mu_0)}{\partial\lambda} - \mu_0 \frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\partial\lambda}\right)$$

$$T(r,\theta) = \frac{B_0}{1-\mu_0} \frac{Log\left(\dfrac{Tanh(l_{\eta 1}/2)}{Tanh(\eta/2)}\right)}{Log\left(\dfrac{Tanh(l_{\eta 1}/2)}{Tanh(l_{\eta 2}/2)}\right)} + \sum_{n\neq 0,+\infty} \frac{(2\lambda_n+1)B_n \dfrac{\left(\dfrac{P_{\lambda_n}(Cosh(\eta))}{P_{\lambda_n}(Cosh(l_{\eta 1}))} - \dfrac{Q_{\lambda_n}(Cosh(\eta))}{Q_{\lambda_n}(Cosh(l_{\eta 1}))}\right)}{\left(\dfrac{P_{\lambda_n}(Cosh(l_{\eta 2}))}{P_{\lambda_n}(Cosh(l_{\eta 1}))} - \dfrac{Q_{\lambda_n}(Cosh(l_{\eta 2}))}{Q_{\lambda_n}(Cosh(l_{\eta 1}))}\right)} P_{\lambda_n}(Cos(\theta))}{\lambda_n P_{\lambda_n}(\mu_0)\left(\dfrac{\partial P_{\lambda_n-1}(\mu_0)}{\partial\lambda} - \mu_0 \dfrac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\partial\lambda}\right)} \qquad (2)$$

Exemple : *Section sphéroïdale allongée pleine entre les angles θ_1,θ_2, en coordonnées sphéroïdales allongée (η,θ) soumise à des conditions aux limites de Dirichlet inhomogènes en* r=l_r. homogènes en θ_1 *et* θ_2

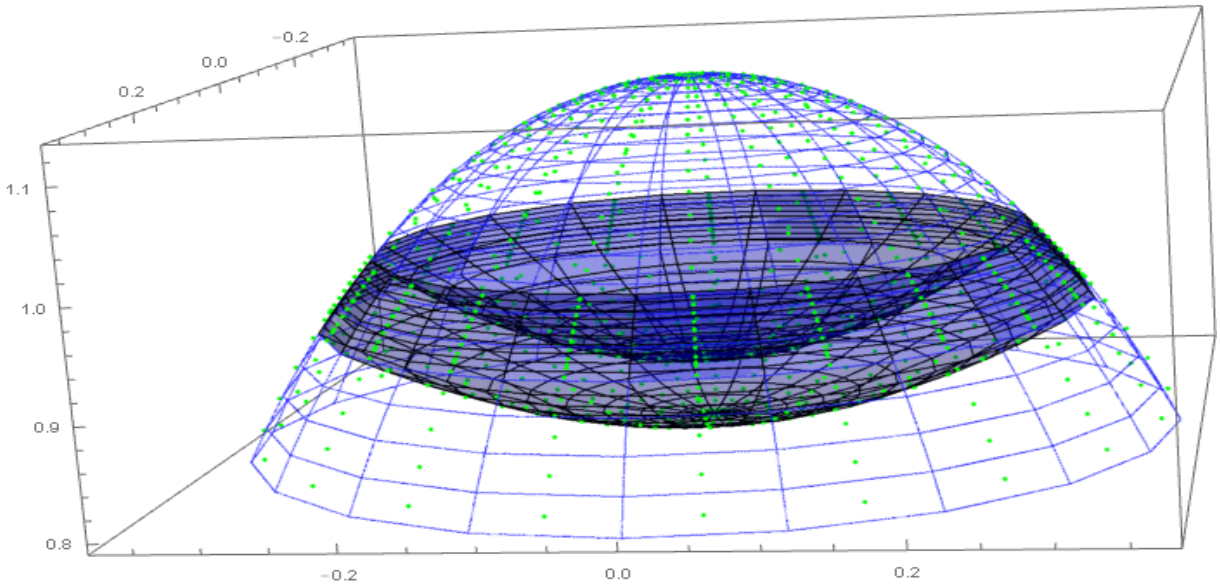
Soit le problème :

$$\Delta T(\eta,\theta)=0 \quad T(\eta,\theta)\ fini$$

$$T(\eta,\theta)\big|_{\eta=l_\eta}=f_\theta(Cos(\theta))$$

$$T(\eta,\theta)\big|_{\theta=\theta_1}=0$$

$$T(\eta,\theta)\big|_{\theta=\theta_2}=0$$



La solution doit comporter les mêmes contraintes que pour les solutions sur la sphère, à savoir

$T(\eta,\theta)\ fini$

$T(\eta,\theta)\ fonction\ paire\ en\ \theta\ soit\ \ T(\eta,-\theta)=T(\eta,\theta)$

$T(\eta,\theta)\quad ne\ comporte\ aucune\ singularité,\ doit\ être\ continue\ et\ dérivable$

Pour respecter la condition aux limites

$T(\eta,\theta)\big|_{\theta=\theta_1}=0$

$T(\eta,\theta)\big|_{\theta=\theta_2}=0$

on est amené à rechercher une extension des polynômes de Legendre de degré entier à des fonctions de Legendre de degré non entier λ_n $P_n(Cos(\theta))\to P_{\lambda_n}(Cos(\theta))$*, ainsi que des fonctions de Legendre de deuxième espèce :* $Q_n(Cos(\theta))\to Q_{\lambda_n}(Cos(\theta))$*. En respectant la contrainte de finitude et par principe de superposition on recherche la solution sous la forme d'une série :*

$$T(\eta,\theta)=\sum_{n\neq 0,+\infty}P_{\lambda_n}(Cosh(\eta))\Big(C_nP_{\lambda_n}(Cos(\theta))+D_nQ_{\lambda_n}(Cos(\theta))\Big)$$

$$T(\eta,\theta)\big|_{\theta=\theta_2}=0\Rightarrow C_nP_{\lambda_n}(Cos(\theta_2))+D_nQ_{\lambda_n}(Cos(\theta_2))=0\Rightarrow D_n=-C_n\frac{P_{\lambda_n}(Cos(\theta_2))}{Q_{\lambda_n}(Cos(\theta_2))}$$

$$\Rightarrow T(\eta,\theta)\propto\sum_{n\neq 0,+\infty}P_{\lambda_n}(Cosh(\eta))C_n\left(\frac{P_{\lambda_n}(Cos(\theta))}{P_{\lambda_n}(Cos(\theta_2))}-\frac{Q_{\lambda_n}(Cos(\theta))}{Q_{\lambda_n}(Cos(\theta_2))}\right)$$

$$T(\eta,\theta)\big|_{\theta=\theta_1}=0\Rightarrow\sum_{n\neq 0,+\infty}P_{\lambda_n}(Cosh(\eta))C_n\left(\frac{P_{\lambda_n}(Cos(\theta_1))}{P_{\lambda_n}(Cos(\theta_2))}-\frac{Q_{\lambda_n}(Cos(\theta_1))}{Q_{\lambda_n}(Cos(\theta_2))}\right)=0$$

$$\lambda_n\quad tq\quad\frac{P_{\lambda_n}(Cos(\theta_1))}{P_{\lambda_n}(Cos(\theta_2))}=\frac{Q_{\lambda_n}(Cos(\theta_1))}{Q_{\lambda_n}(Cos(\theta_2))}$$

$Comme\ \theta_2>\theta_1\Rightarrow Cos(\theta_2)<Cos(\theta_1)$

$on\ pose\ \mu_1=Cos(\theta_2)\ et\ \mu_2=Cos(\theta_1)\ de\ telle\ manière\ que\ \mu_1<\mu_2$

$$\lambda_n\quad tq\quad\frac{P_{\lambda_n}(\mu_2)}{P_{\lambda_n}(\mu_1)}=\frac{Q_{\lambda_n}(\mu_2)}{Q_{\lambda_n}(\mu_1)}$$

$$\Phi_{\lambda_n}(Cos(\theta))=\frac{P_{\lambda_n}(Cos(\theta))}{P_{\lambda_n}(Cos(\theta_2))}-\frac{Q_{\lambda_n}(Cos(\theta))}{Q_{\lambda_n}(Cos(\theta_2))}\quad et\ z=Cos(\theta)$$

$$\Phi_{\lambda_n}(z)=\frac{P_{\lambda_n}(z)}{P_{\lambda_n}(\mu_1)}-\frac{Q_{\lambda_n}(z)}{Q_{\lambda_n}(\mu_1)}$$

$$\left\|\Phi_{\lambda_n}(Cos(\theta))\right\|^2=\int_{\theta_1}^{\theta_2}d\theta\ Sin(\theta)\Big(\Phi_{\lambda_n}(Cos(\theta))\Big)^2=-\int_{\mu_2}^{\mu_1}dz\Big(\Phi_{\lambda_n}(z)\Big)^2=\int_{\mu_1}^{\mu_2}dz\Big(\Phi_{\lambda_n}(z)\Big)^2=\left\|\Phi_{\lambda_n}(z)\right\|^2$$

<u>*Exemple*</u>

si l'on prend l'angle $\theta_1=\pi/7\quad\theta_2=6\pi/7$*, alors les 10 premières valeurs propres* λ_n = `0.785441, 2.23009, 3.64994, 5.06115, 6.46833, 7.8733, 9.27695, 10.6797, 12.0819, 13.4837`

si l'on prend l'angle $\theta_1=\pi/7\quad\theta_2=5\pi/14$*, alors les 10 premières valeurs propres* λ_n = `4.1092, 8.80259, 13.4792, 18.1509, 22.8207, 27.4895, 32.1576, 36.8254, 41.493, 46.1603`

La prise en compte de la condition aux limites inhomogènes en r=l_r, donne :

$$\mu_1 = Cos(\theta_2);\ \mu_2 = Cos(\theta_1) \quad z = Cos(\theta) \quad \Phi_n(z) = \frac{P_{\lambda_n}(z)}{P_{\lambda_n}(\mu_1)} - \frac{Q_{\lambda_n}(z)}{Q_{\lambda_n}(\mu_1)} \qquad \left\|\Phi_{\lambda_n}(z)\right\|^2 = \int_{\mu_1}^{\mu_2} dz\ \Phi_{\lambda_n}(z)^2$$

$$\lambda_n \quad tq \quad \frac{P_{\lambda_n}(\mu_2)}{P_{\lambda_n}(\mu_1)} = \frac{Q_{\lambda_n}(\mu_2)}{Q_{\lambda_n}(\mu_1)} \quad B_n = \int_{\mu_1}^{\mu_2} dz\ f_\theta(z)\, P_{\lambda_n}(z) \quad C_n = \int_{\mu_1}^{\mu_2} dz\ f_\theta(z)\, Q_{\lambda_n}(z)$$

$$\left\|\Phi_{\lambda_n}(z)\right\|^2 = \frac{\lambda_n}{(2\lambda_n+1)}\Phi_{\lambda_n-1}(\mu_2)\frac{\partial\Phi_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial\lambda} \quad \textit{voir tableau synoptique en fin de section}$$

$$\Phi_{\lambda_n-1}(\mu_1) = \frac{P_{\lambda_n-1}(\mu_1)}{P_{\lambda_n}(\mu_1)} - \frac{Q_{\lambda_n-1}(\mu_1)}{Q_{\lambda_n}(\mu_1)} \quad \Phi_{\lambda_n-1}(\mu_2) = \frac{P_{\lambda_n-1}(\mu_2)}{P_{\lambda_n}(\mu_1)} - \frac{Q_{\lambda_n-1}(\mu_2)}{Q_{\lambda_n}(\mu_1)}$$

$$\frac{\partial\Phi_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial\lambda} = \frac{1}{P_{\lambda_n}(\mu_1)}\left[\frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial\lambda} - \frac{P_{\lambda_n}(\mu_2)}{P_{\lambda_n}(\mu_1)}\frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial\lambda}\right] - \frac{1}{Q_{\lambda_n}(\mu_1)}\left[\frac{\partial Q_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial\lambda} - \frac{Q_{\lambda_n}(\mu_2)}{Q_{\lambda_n}(\mu_1)}\frac{\partial Q_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial\lambda}\right]$$

$$T(\eta,\theta) = \sum_{n\neq 0,+\infty} \frac{\left(\frac{B_n}{P_{\lambda_n}(\mu_1)} - \frac{C_n}{Q_{\lambda_n}(\mu_1)}\right)}{\left\|\Phi_{\lambda_n}(z)\right\|^2}\frac{P_{\lambda_n}(Cosh(\eta))}{P_{\lambda_n}(Cosh(l_\eta))}\left(\frac{P_{\lambda_n}(Cos(\theta))}{P_{\lambda_n}(\mu_1)} - \frac{Q_{\lambda_n}(Cos(\theta))}{Q_{\lambda_n}(\mu_1)}\right)$$

.

Lorsque la fonction limite $f_\theta(z)=1$, on a avec les formes littérales des normes des fonctions propres :

$$\Phi_n(z) = \frac{P_{\lambda_n}(z)}{P_{\lambda_n}(\mu_1)} - \frac{Q_{\lambda_n}(z)}{Q_{\lambda_n}(\mu_1)} \qquad \left\|\Phi_{\lambda_n}(z)\right\|^2 = \int_{\mu_1}^{\mu_2} dz\ \Phi_{\lambda_n}(z)^2$$

$$(1) \Rightarrow B_n' = \frac{P_{\lambda_n+1}(\mu_2) - P_{\lambda_n-1}(\mu_2) - \left(P_{\lambda_n+1}(\mu_1) - P_{\lambda_n-1}(\mu_1)\right)}{P_{\lambda_n}(\mu_1)} \quad et \quad C_n' = \frac{Q_{\lambda_n+1}(\mu_2) - Q_{\lambda_n-1}(\mu_2) - \left(Q_{\lambda_n+1}(\mu_1) - Q_{\lambda_n-1}(\mu_1)\right)}{Q_{\lambda_n}(\mu_1)}$$

$$T(r,\theta) = \sum_{n\neq 0,+\infty} \frac{(B_n' - C_n')}{(2\lambda_n+1)\left\|\Phi_{\lambda_n}(z)\right\|^2}\frac{P_{\lambda_n}(Cosh(\eta))}{P_{\lambda_n}(Cosh(l_\eta))}\left(\frac{P_{\lambda_n}(Cos(\theta))}{P_{\lambda_n}(\mu_1)} - \frac{Q_{\lambda_n}(Cos(\theta))}{Q_{\lambda_n}(\mu_1)}\right)$$

ou bien

$$(2) \Rightarrow B_n' = \frac{P_{\lambda_n-1}(\mu_1) - P_{\lambda_n-1}(\mu_2)}{P_{\lambda_n}(\mu_1)} \quad et \quad C_n' = \frac{Q_{\lambda_n-1}(\mu_1) - Q_{\lambda_n-1}(\mu_2)}{Q_{\lambda_n}(\mu_1)}$$

$$T(r,\theta) = \sum_{n\neq 0,+\infty} \frac{1}{\lambda_n}\frac{(B_n' - C_n')}{\left\|\Phi_{\lambda_n}(z)\right\|^2}\frac{P_{\lambda_n}(Cosh(\eta))}{P_{\lambda_n}(Cosh(l_\eta))}\left(\frac{P_{\lambda_n}(Cos(\theta))}{P_{\lambda_n}(\mu_1)} - \frac{Q_{\lambda_n}(Cos(\theta))}{Q_{\lambda_n}(\mu_1)}\right)$$

ou bien

$$(3) \Rightarrow B_n' = \frac{P_{\lambda_n+1}(\mu_2) - P_{\lambda_n+1}(\mu_1)}{P_{\lambda_n}(\mu_1)} \quad et \quad C_n' = \frac{Q_{\lambda_n+1}(\mu_2) - Q_{\lambda_n+1}(\mu_1)}{Q_{\lambda_n}(\mu_1)}$$

$$T(r,\theta) = \sum_{n\neq 0,+\infty} \frac{1}{(\lambda_n+1)}\frac{(B_n' - C_n')}{\left\|\Phi_{\lambda_n}(z)\right\|^2}\frac{P_{\lambda_n}(Cosh(\eta))}{P_{\lambda_n}(Cosh(l_\eta))}\left(\frac{P_{\lambda_n}(Cos(\theta))}{P_{\lambda_n}(\mu_1)} - \frac{Q_{\lambda_n}(Cos(\theta))}{Q_{\lambda_n}(\mu_1)}\right)$$

.

Exemple : *Section sphéroïdale allongée pleine entre les angles θ_1,θ_2, en coordonnées sphéroïdales allongées (η,θ) soumise à des conditions aux limites de Dirichlet inhomogènes en* $\eta=l_\eta$ de Neumann homogènes en θ_1 *et* θ_2

Soit le problème :

$$\Delta T(\eta,\theta)=0 \quad T(r,\theta)\ fini$$

$$T(\eta,\theta)\big|_{\eta=l_\eta}=f_\theta(Cos(\theta))\ avec\ z=Cos(\theta)$$

$$T_z^{'}(r,\theta)\big|_{\theta=\theta_1}=0 \quad T_z^{'}(r,\theta)\big|_{\theta=\theta_2}=0$$

La solution doit comporter les mêmes contraintes que pour les solutions sur la sphère, à savoir

$$T(\eta,\theta)\ fini$$

$$T(\eta,\theta)\ fonction\ paire\ en\ \theta\ soit\ \ T(\eta,-\theta)=T(\eta,\theta)$$

$$T(\eta,\theta)\quad ne\ comporte\ aucune\ singularité,\ doit\ être\ continue\ et\ dérivable$$

On est amené comme dans l'exemple précédent à rechercher une série comportant les extensions des fonctions de Legendre de première et deuxième espèce de degré entier à des degrés non entier λ_n. *Soit* $P_n(Cos(\theta))\to P_{\lambda_n}(Cos(\theta))$, $Q_n(Cos(\theta))\to Q_{\lambda_n}(Cos(\theta))$. *En respectant la contrainte de finitude et par principe de superposition on recherche la solution sous la forme:*

$$T(\eta,\theta)=\sum_{n\neq 0,+\infty}P_{\lambda_n}(Cosh(\eta))\Big(C_nP_{\lambda_n}(Cos(\theta))+D_nQ_{\lambda_n}(Cos(\theta))\Big)\quad Comme\ \theta_2>\theta_1\Rightarrow Cos(\theta_2)<Cos(\theta_1)$$

$$on\ pose\ \mu_1=Cos(\theta_2)\ et\ \mu_2=Cos(\theta_1)\ de\ telle\ manière\ que\ \mu_1<\mu_2$$

$$P_{\lambda_n}^{'}(\mu_1)=\frac{\lambda_n}{\mu_1^{\ 2}-1}\Big(\mu_1P_{\lambda_n}(\mu_1)-P_{\lambda_n-1}(\mu_1)\Big)\quad P_{\lambda_n}^{'}(\mu_2)=\frac{\lambda_n}{\mu_2^{\ 2}-1}\Big(\mu_2P_{\lambda_n}(\mu_2)-P_{\lambda_n-1}(\mu_2)\Big)$$

$$Q_{\lambda_n}^{'}(\mu_1)=\frac{\lambda_n}{\mu_1^{\ 2}-1}\Big(\mu_1Q_{\lambda_n}(\mu_1)-Q_{\lambda_n-1}(\mu_1)\Big)\quad Q_{\lambda_n}^{'}(\mu_2)=\frac{\lambda_n}{\mu_2^{\ 2}-1}\Big(\mu_2Q_{\lambda_n}(\mu_2)-Q_{\lambda_n-1}(\mu_2)\Big)$$

$$T_z^{'}(r,z)\big|_{z=\mu_1}=0\Rightarrow C_n\frac{\lambda_n}{\mu_1^{\ 2}-1}\Big(\mu_1P_{\lambda_n}(\mu_1)-P_{\lambda_n-1}(\mu_1)\Big)+D_n\frac{\lambda_n}{\mu_1^{\ 2}-1}\Big(\mu_1Q_{\lambda_n}(\mu_1)-Q_{\lambda_n-1}(\mu_1)\Big)=0$$

$$\Rightarrow D_n=-C_n\frac{\Big(\mu_1P_{\lambda_n}(\mu_1)-P_{\lambda_n-1}(\mu_1)\Big)}{\Big(\mu_1Q_{\lambda_n}(\mu_1)-Q_{\lambda_n-1}(\mu_1)\Big)}$$

$$T(\eta,z)\propto\sum_{n\neq 0,+\infty}P_{\lambda_n}(Cosh(\eta))C_n\left(\frac{P_{\lambda_n}(z)}{P_{\lambda_n}'(\mu_1)}-\frac{Q_{\lambda_n}(z)}{Q_{\lambda_n}'(\mu_1)}\right)$$

$$T(\eta,z)\big|_{z=\mu_2}=0\Rightarrow\sum_{n\neq 0,+\infty}P_{\lambda_n}(Cosh(\eta))C_n\frac{\lambda_n}{\mu_2^{\ 2}-1}\left(\frac{\Big(\mu_2P_{\lambda_n}(\mu_2)-P_{\lambda_n-1}(\mu_2)\Big)}{\Big(\mu_1P_{\lambda_n}(\mu_1)-P_{\lambda_n-1}(\mu_1)\Big)}-\frac{\Big(\mu_2Q_{\lambda_n}(\mu_2)-Q_{\lambda_n-1}(\mu_2)\Big)}{\Big(\mu_1Q_{\lambda_n}(\mu_1)-Q_{\lambda_n-1}(\mu_1)\Big)}\right)=0$$

$$soit\ \lambda_n\quad tq\quad \lambda_n=0\quad ou\quad \frac{\Big(\mu_2P_{\lambda_n}(\mu_2)-P_{\lambda_n-1}(\mu_2)\Big)}{\Big(\mu_1P_{\lambda_n}(\mu_1)-P_{\lambda_n-1}(\mu_1)\Big)}=\frac{\Big(\mu_2Q_{\lambda_n}(\mu_2)-Q_{\lambda_n-1}(\mu_2)\Big)}{\Big(\mu_1Q_{\lambda_n}(\mu_1)-Q_{\lambda_n-1}(\mu_1)\Big)}\quad ou\quad \frac{P_{\lambda_n}^{'}(\mu_2)}{P_{\lambda_n}^{'}(\mu_1)}=\frac{Q_{\lambda_n}^{'}(\mu_2)}{Q_{\lambda_n}^{'}(\mu_1)}$$

$$\Phi_{\lambda_n}(z)=\frac{P_{\lambda_n}(z)}{P_{\lambda_n}'(\mu_1)}-\frac{Q_{\lambda_n}(z)}{Q_{\lambda_n}'(\mu_1)}\quad \Big\|\Phi_{\lambda_n}(z)\Big\|^2=\int_{\mu_1}^{\mu_2}dz\,\Phi_{\lambda_n}(z)^2$$

.

<u>*Exemple*</u>

si l'on prend l'angle $\theta_1 = \pi/7 \quad \theta_2 = \pi/2 - \theta_1 = 5\pi/14$*, alors les 20 premières valeurs propres* λ_n *=* `4.33461, 8.92499, 13.5624, 18.2138, 22.8712, 27.5316, 32.1938, 36.8571, 41.5211, 46.1857, 50.8506, 55.5158, 60.1813, 64.8469, 69.5127, 74.1786, 78.8445, 83.5106, 88.1767, 92.8428`

si l'on prend l'angle $\theta_1 = \pi/7 \quad \theta_2 = \pi - \theta_1 = 6\pi/7$*, alors les 20 premières valeurs propres* λ_n *=* `1.19646, 2.49885, 3.8465, 5.21496, 6.59421, 7.97964, 9.36888, 10.7606, 12.1541, 13.5489, 14.9445, 16.3409, 17.7378, 19.1352, 20.5328, 21.9308, 23.329, 24.7274, 26.126, 27.5247`

si l'on prend l'angle $\theta_1 = \pi/14 \quad \theta_2 = 3\pi/7$*, alors les 20 premières valeurs propres* λ_n *=* `2.60589, 5.30231, 8.04798, 10.8157, 13.5946, 16.3799, 19.1691, 21.9608, 24.7542, 27.5489, 30.3446, 33.1409, 35.9378, 38.7352, 41.5329, 44.3308, 47.129, 49.9274, 52.726, 55.5247`

La prise en compte de la condition aux limites inhomogènes en r=l$_r$*, donne* la solution du problème (sans oublier la solution de valeur propre nulle) :

$$z = Cos(\theta) \quad \mu_1 = Cos(\theta_2);\ \mu_2 = Cos(\theta_1)$$

$$\lambda_n \quad tq \quad \lambda_n = 0 \quad ou \quad \frac{\left(\mu_2 P_{\lambda_n}(\mu_2) - P_{\lambda_n - 1}(\mu_2)\right)}{\left(\mu_1 P_{\lambda_n}(\mu_1) - P_{\lambda_n - 1}(\mu_1)\right)} = \frac{\left(\mu_2 Q_{\lambda_n}(\mu_2) - Q_{\lambda_n - 1}(\mu_2)\right)}{\left(\mu_1 Q_{\lambda_n}(\mu_1) - Q_{\lambda_n - 1}(\mu_1)\right)}$$

$$P'_{\lambda_n}(\mu_1) = \frac{\lambda_n}{\mu_1^2 - 1}\left(\mu_1 P_{\lambda_n}(\mu_1) - P_{\lambda_n - 1}(\mu_1)\right) \quad P'_{\lambda_n}(\mu_2) = \frac{\lambda_n}{\mu_2^2 - 1}\left(\mu_2 P_{\lambda_n}(\mu_2) - P_{\lambda_n - 1}(\mu_2)\right)$$

$$Q'_{\lambda_n}(\mu_1) = \frac{\lambda_n}{\mu_1^2 - 1}\left(\mu_1 Q_{\lambda_n}(\mu_1) - Q_{\lambda_n - 1}(\mu_1)\right) \quad Q'_{\lambda_n}(\mu_2) = \frac{\lambda_n}{\mu_2^2 - 1}\left(\mu_2 Q_{\lambda_n}(\mu_2) - Q_{\lambda_n - 1}(\mu_2)\right)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial\lambda\partial z} = \frac{1}{P_{\lambda_n}'(\mu_1)}\left[\frac{\partial^2 P_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial\lambda\partial z} - \frac{P_{\lambda_n}'(\mu_2)}{P_{\lambda_n}'(\mu_1)}\frac{\partial^2 P_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial\lambda\partial z}\right] - \frac{1}{Q_{\lambda_n}'(\mu_1)}\left[\frac{\partial^2 Q_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial\lambda\partial z} - \frac{Q_{\lambda_n}'(\mu_2)}{Q_{\lambda_n}'(\mu_1)}\frac{\partial^2 Q_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial\lambda\partial z}\right]$$

$$\frac{\partial^2 P_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial\lambda\partial z} = \frac{\lambda_n}{\mu_1^2 - 1}\left(\mu_1 \frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial\lambda} - \frac{\partial P_{\lambda_n - 1}(\mu_1)}{\partial\lambda}\right) \quad \frac{\partial^2 P_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial\lambda\partial z} = \frac{\lambda_n}{\mu_2^2 - 1}\left(\mu_2 \frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial\lambda} - \frac{\partial P_{\lambda_n - 1}(\mu_2)}{\partial\lambda}\right)$$

$$\frac{\partial^2 Q_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial\lambda\partial z} = \frac{\lambda_n}{\mu_1^2 - 1}\left(\mu_1 \frac{\partial Q_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial\lambda} - \frac{\partial Q_{\lambda_n - 1}(\mu_1)}{\partial\lambda}\right) \quad \frac{\partial^2 Q_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial\lambda\partial z} = \frac{\lambda_n}{\mu_2^2 - 1}\left(\mu_2 \frac{\partial Q_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial\lambda} - \frac{\partial Q_{\lambda_n - 1}(\mu_2)}{\partial\lambda}\right)$$

$$\Phi_{\lambda_n}(z) = \frac{P_{\lambda_n}(z)}{P_{\lambda_n}'(\mu_1)} - \frac{Q_{\lambda_n}(z)}{Q_{\lambda_n}'(\mu_1)} \quad \left\|\Phi_0(z)\right\|^2 = \mu_2 - \mu_1 \quad \left\|\Phi_{\lambda_n}(z)\right\|^2 = -\frac{\left(1 - \mu_2^2\right)\Phi_{\lambda_n}(\mu_2)\dfrac{\partial^2 \Phi_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial z \partial\lambda}}{\left(2\lambda_n + 1\right)}$$

$$F_n = \frac{B_n}{P_{\lambda_n}'(\mu_1)} - \frac{C_n}{Q_{\lambda_n}'(\mu_1)} \quad B_n = \int_{\mu_1}^{\mu_2} dz\ f_\theta(z)\ P_{\lambda_n}(z) \quad C_n = \int_{\mu_1}^{\mu_2} dz\ f_\theta(z)\ Q_{\lambda_n}(z) \quad B_0 = \int_{\mu_1}^{\mu_2} dz\ f_\theta(z)$$

$$T(\eta,\theta) = \frac{B_0}{\left\|\Phi_0(z)\right\|^2} + \sum_{n \neq 0, +\infty} \frac{F_n \dfrac{P_{\lambda_n}\left(Cosh(\eta)\right)}{P_{\lambda_n}\left(Cosh(l_\eta)\right)}\left(\dfrac{P_{\lambda_n}(Cos(\theta))}{P_{\lambda_n}'(\mu_1)} - \dfrac{Q_{\lambda_n}(Cos(\theta))}{Q_{\lambda_n}'(\mu_1)}\right)}{\left\|\Phi_{\lambda_n}(z)\right\|^2}$$

$$T(\eta,\theta) = \frac{B_0}{\left(\mu_2 - \mu_1\right)} + \sum_{n \neq 0, +\infty} \frac{F_n \dfrac{P_{\lambda_n}\left(Cosh(\eta)\right)}{P_{\lambda_n}\left(Cosh(l_\eta)\right)}\left(\dfrac{P_{\lambda_n}(Cos(\theta))}{P_{\lambda_n}'(\mu_1)} - \dfrac{Q_{\lambda_n}(Cos(\theta))}{Q_{\lambda_n}'(\mu_1)}\right)}{\left\|\Phi_{\lambda_n}(z)\right\|^2}$$

Lorsque la fonction limite $f_\theta(z)=1$, on a

$$B_n = \int_{\mu_1}^{\mu_2} dz\, P_{\lambda_n}(z) \quad C_n = \int_{\mu_1}^{\mu_2} dz\, Q_{\lambda_n}(z)$$

en utilisant les équations (3)

$$\Rightarrow B_n = \frac{\left(\mu_2 P_{\lambda_n}(\mu_2) - P_{\lambda_n-1}(\mu_2)\right) - \left(\mu_1 P_{\lambda_n}(\mu_1) - P_{\lambda_n-1}(\mu_1)\right)}{\lambda_n + 1} \quad C_n = \frac{\left(\mu_2 Q_{\lambda_n}(\mu_2) - Q_{\lambda_n-1}(\mu_2)\right) - \left(\mu_1 Q_{\lambda_n}(\mu_1) - Q_{\lambda_n-1}(\mu_1)\right)}{\lambda_n + 1}$$

$$F_n = \frac{1}{\lambda_n + 1}\left(\frac{\left(\mu_2 P_{\lambda_n}(\mu_2) - P_{\lambda_n-1}(\mu_2)\right)}{\left(\mu_1 P_{\lambda_n}(\mu_1) - P_{\lambda_n-1}(\mu_1)\right)} - \frac{\left(\mu_2 Q_{\lambda_n}(\mu_2) - Q_{\lambda_n-1}(\mu_2)\right)}{\left(\mu_1 Q_{\lambda_n}(\mu_1) - Q_{\lambda_n-1}(\mu_1)\right)}\right) = 0$$

On retrouve donc la solution triviale, puisque $B_0=\mu_2-\mu_1$: $T(\eta,\theta)=1$.

Lorsque la fonction limite $f_\theta(z)$ présente un profil en fonction de Heaviside :

$$f_\theta(z)=1 \quad si\ z\in\left[\mu_1,\frac{\mu_1+\mu_2}{2}\right] \quad f_\theta(z)=0 \quad si\ z\notin\left[\mu_1,\frac{\mu_1+\mu_2}{2}\right]$$

$$B_0=\int_{\mu_1}^{\frac{\mu_1+\mu_2}{2}}dz\ =\frac{\mu_2-\mu_1}{2} \quad B_n=\int_{\mu_1}^{\frac{\mu_1+\mu_2}{2}}dz\ P_{\lambda_n}(z) \quad C_n=\int_{\mu_1}^{\frac{\mu_1+\mu_2}{2}}dz\ Q_{\lambda_n}(z)$$

en utilisant les équations (3)

$$\Rightarrow B_n=\frac{\left(\left(\frac{\mu_1+\mu_2}{2}\right)P_{\lambda_n}\left(\frac{\mu_1+\mu_2}{2}\right)-P_{\lambda_n-1}\left(\frac{\mu_1+\mu_2}{2}\right)\right)-\left(\mu_1P_{\lambda_n}(\mu_1)-P_{\lambda_n-1}(\mu_1)\right)}{\lambda_n+1}$$

$$C_n=\frac{\left(\left(\frac{\mu_1+\mu_2}{2}\right)Q_{\lambda_n}\left(\frac{\mu_1+\mu_2}{2}\right)-Q_{\lambda_n-1}\left(\frac{\mu_1+\mu_2}{2}\right)\right)-\left(\mu_1Q_{\lambda_n}(\mu_1)-Q_{\lambda_n-1}(\mu_1)\right)}{\lambda_n+1}$$

$$F_n=\left(\frac{\left(\left(\frac{\mu_1+\mu_2}{2}\right)P_{\lambda_n}\left(\frac{\mu_1+\mu_2}{2}\right)-P_{\lambda_n-1}\left(\frac{\mu_1+\mu_2}{2}\right)\right)}{\left(\mu_1P_{\lambda_n}(\mu_1)-P_{\lambda_n-1}(\mu_1)\right)}-\frac{\left(\left(\frac{\mu_1+\mu_2}{2}\right)Q_{\lambda_n}\left(\frac{\mu_1+\mu_2}{2}\right)-Q_{\lambda_n-1}\left(\frac{\mu_1+\mu_2}{2}\right)\right)}{\left(\mu_1Q_{\lambda_n}(\mu_1)-Q_{\lambda_n-1}(\mu_1)\right)}\right)$$

$$\Phi_{\lambda_n}(z)=\frac{P_{\lambda_n}(z)}{\left(\mu_1P_{\lambda_n}(\mu_1)-P_{\lambda_n-1}(\mu_1)\right)}-\frac{Q_{\lambda_n}(z)}{\left(\mu_1Q_{\lambda_n}(\mu_1)-Q_{\lambda_n-1}(\mu_1)\right)} \quad \left\|\Phi_{\lambda_n}(z)\right\|^2=\int_{\mu_1}^{\mu_2}dz\ \Phi_{\lambda_n}(z)^2$$

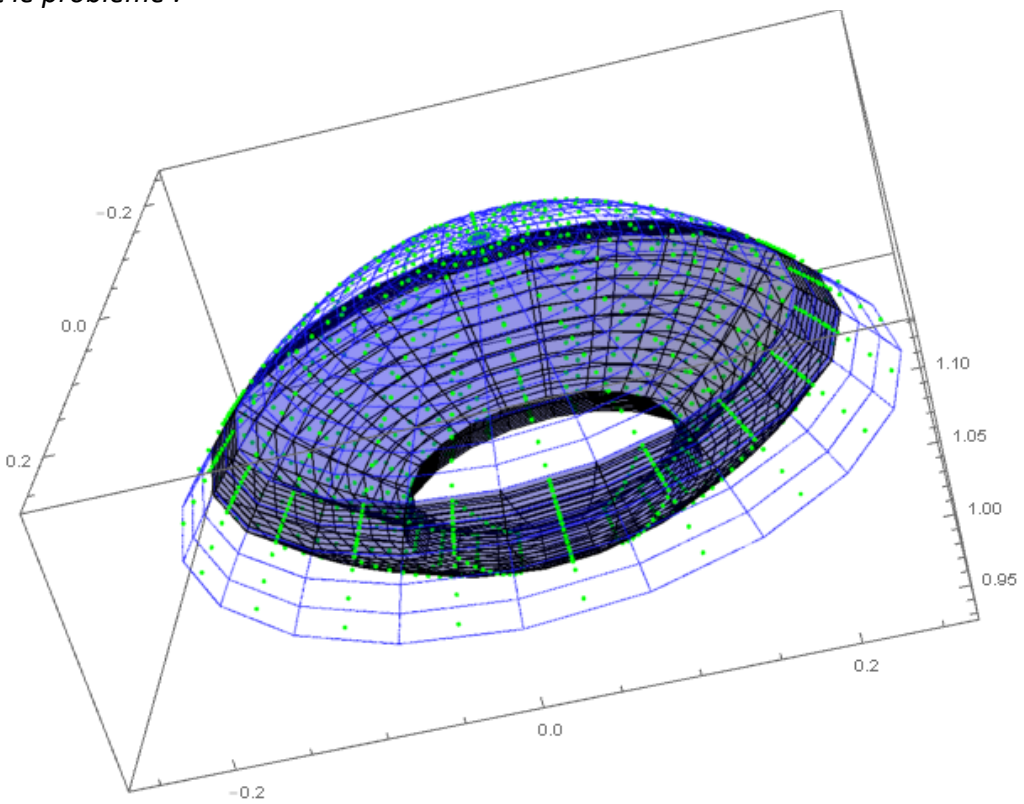
$$T(r,\theta)=\frac{1}{2}+\sum_{n\neq0,+\infty}\frac{F_n\ \frac{P_{\lambda_n}(Cosh(\eta))}{P_{\lambda_n}(Cosh(l_\eta))}\left(\frac{P_{\lambda_n}(Cos(\theta))}{\left(\mu_1P_{\lambda_n}(\mu_1)-P_{\lambda_n-1}(\mu_1)\right)}-\frac{Q_{\lambda_n}(Cos(\theta))}{\left(\mu_1Q_{\lambda_n}(\mu_1)-Q_{\lambda_n-1}(\mu_1)\right)}\right)}{(\lambda_n+1)\left\|\Phi_{\lambda_n}(z)\right\|^2}$$

.

Exemple : *Section sphéroïdale allongée creuse entre les angles θ_1,θ_2, en coordonnées sphéroïdales allongées (η,θ) soumise à des conditions aux limites de Dirichlet inhomogènes en $\eta=l_{\eta 1}$ et inhomogènes en $\eta=l_{\eta 2}$,* homogènes en θ_1 *et* θ_2.

Soit le problème :

$$\Delta T(\eta,\theta)=0 \quad T(\eta,\theta)\ fini$$
$$T(\eta,\theta)\big|_{\eta=l_{\eta 1}}=0 \quad T(\eta,\theta)\big|_{\eta=l_{\eta 2}}=f_\theta(Cos(\theta))$$
$$T(\eta,\theta)\big|_{\theta=\theta_1}=0 \quad T(\eta,\theta)\big|_{\theta=\theta_2}=0$$



En reprenant les résultats d'un exemple précédent nous avons :

$$\mu_1=Cos(\theta_2);\ \mu_2=Cos(\theta_1) \quad \lambda_n \quad tq \quad \frac{P_{\lambda_n}(\mu_2)}{P_{\lambda_n}(\mu_1)}=\frac{Q_{\lambda_n}(\mu_2)}{Q_{\lambda_n}(\mu_1)} \quad z=Cos(\theta)$$

$$B_n=\int_{\mu_1}^{\mu_2} dz\ f_\theta(z)\,P_{\lambda_n}(z) \quad C_n=\int_{\mu_1}^{\mu_2} dz\ f_\theta(z)\,Q_{\lambda_n}(z) \quad \Phi_n(z)=\frac{P_{\lambda_n}(z)}{P_{\lambda_n}(\mu_1)}-\frac{Q_{\lambda_n}(z)}{Q_{\lambda_n}(\mu_1)}$$

$$\left\|\Phi_{\lambda_n}(z)\right\|^2=\frac{\lambda_n}{(2\lambda_n+1)}\Phi_{\lambda_n-1}(\mu_2)\frac{\partial\Phi_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial\lambda} \quad \textit{voir tableau synoptique en fin de section}$$

$$\Phi_{\lambda_n-1}(\mu_1)=\frac{P_{\lambda_n-1}(\mu_1)}{P_{\lambda_n}(\mu_1)}-\frac{Q_{\lambda_n-1}(\mu_1)}{Q_{\lambda_n}(\mu_1)} \quad \Phi_{\lambda_n-1}(\mu_2)=\frac{P_{\lambda_n-1}(\mu_2)}{P_{\lambda_n}(\mu_1)}-\frac{Q_{\lambda_n-1}(\mu_2)}{Q_{\lambda_n}(\mu_1)}$$

$$\frac{\partial\Phi_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial\lambda}=\frac{1}{P_{\lambda_n}(\mu_1)}\left[\frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial\lambda}-\frac{P_{\lambda_n}(\mu_2)}{P_{\lambda_n}(\mu_1)}\frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial\lambda}\right]-\frac{1}{Q_{\lambda_n}(\mu_1)}\left[\frac{\partial Q_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial\lambda}-\frac{Q_{\lambda_n}(\mu_2)}{Q_{\lambda_n}(\mu_1)}\frac{\partial Q_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial\lambda}\right]$$

$$T(\eta,\theta)=\sum_{n\neq 0,+\infty}\frac{\left(\dfrac{B_n}{P_{\lambda_n}(\mu_1)}-\dfrac{C_n}{Q_{\lambda_n}(\mu_1)}\right)}{\left\|\Phi_{\lambda_n}(z)\right\|^2}\frac{\left(\dfrac{P_{\lambda_n}(Cosh(\eta))}{P_{\lambda_n}(Cosh(l_{\eta 1}))}-\dfrac{Q_{\lambda_n}(Cosh(\eta))}{Q_{\lambda_n}(Cosh(l_{\eta 1}))}\right)}{\left(\dfrac{P_{\lambda_n}(Cosh(l_{\eta 2}))}{P_{\lambda_n}(Cosh(l_{\eta 1}))}-\dfrac{Q_{\lambda_n}(Cosh(l_{\eta 2}))}{Q_{\lambda_n}(Cosh(l_{\eta 1}))}\right)}\left(\frac{P_{\lambda_n}(Cos(\theta))}{P_{\lambda_n}(\mu_1)}-\frac{Q_{\lambda_n}(Cos(\theta))}{Q_{\lambda_n}(\mu_1)}\right)$$

Lorsque la fonction limite $f_\vartheta(z)=1$, on a avec les expressions formelles des normes des fonctions propres :

En utilisant les trois formes des intégrales indéfinies

$$(1) \Rightarrow B_n' = \frac{P_{\lambda_n+1}(\mu_2) - P_{\lambda_n-1}(\mu_2) - \left(P_{\lambda_n+1}(\mu_1) - P_{\lambda_n-1}(\mu_1)\right)}{P_{\lambda_n}(\mu_1)} \quad et \quad C_n' = \frac{Q_{\lambda_n+1}(\mu_2) - Q_{\lambda_n-1}(\mu_2) - \left(Q_{\lambda_n+1}(\mu_1) - Q_{\lambda_n-1}(\mu_1)\right)}{Q_{\lambda_n}(\mu_1)}$$

$$T(\eta,\theta) = \sum_{n\neq 0,+\infty} \frac{1}{(2\lambda_n+1)} \frac{(B_n'-C_n')}{\left\|\Phi_{\lambda_n}(z)\right\|^2} \frac{\left(\frac{P_{\lambda_n}(Cosh(\eta))}{P_{\lambda_n}(Cosh(l_{\eta 1}))} - \frac{Q_{\lambda_n}(Cosh(\eta))}{Q_{\lambda_n}(Cosh(l_{\eta 1}))}\right)}{\left(\frac{P_{\lambda_n}(Cosh(l_{\eta 2}))}{P_{\lambda_n}(Cosh(l_{\eta 1}))} - \frac{Q_{\lambda_n}(Cosh(l_{\eta 2}))}{Q_{\lambda_n}(Cosh(l_{\eta 1}))}\right)} \left(\frac{P_{\lambda_n}(Cos(\theta))}{P_{\lambda_n}(\mu_1)} - \frac{Q_{\lambda_n}(Cos(\theta))}{Q_{\lambda_n}(\mu_1)}\right)$$

$$(2)\, ou\ bien \Rightarrow B_n' = \frac{P_{\lambda_n-1}(\mu_1) - P_{\lambda_n-1}(\mu_2)}{P_{\lambda_n}(\mu_1)} \quad et \quad C_n' = \frac{Q_{\lambda_n-1}(\mu_1) - Q_{\lambda_n-1}(\mu_2)}{Q_{\lambda_n}(\mu_1)}$$

$$T(\eta,\theta) = \sum_{n\neq 0,+\infty} \frac{1}{\lambda_n} \frac{(B_n'-C_n')}{\left\|\Phi_{\lambda_n}(z)\right\|^2} \frac{\left(\frac{P_{\lambda_n}(Cosh(\eta))}{P_{\lambda_n}(Cosh(l_{\eta 1}))} - \frac{Q_{\lambda_n}(Cosh(\eta))}{Q_{\lambda_n}(Cosh(l_{\eta 1}))}\right)}{\left(\frac{P_{\lambda_n}(Cosh(l_{\eta 2}))}{P_{\lambda_n}(Cosh(l_{\eta 1}))} - \frac{Q_{\lambda_n}(Cosh(l_{\eta 2}))}{Q_{\lambda_n}(Cosh(l_{\eta 1}))}\right)} \left(\frac{P_{\lambda_n}(Cos(\theta))}{P_{\lambda_n}(\mu_1)} - \frac{Q_{\lambda_n}(Cos(\theta))}{Q_{\lambda_n}(\mu_1)}\right)$$

$$(3)\, ou\ bien \Rightarrow B_n' = \frac{P_{\lambda_n+1}(\mu_2) - P_{\lambda_n+1}(\mu_1)}{P_{\lambda_n}(\mu_1)} \quad et \quad C_n' = \frac{Q_{\lambda_n+1}(\mu_2) - Q_{\lambda_n+1}(\mu_1)}{Q_{\lambda_n}(\mu_1)}$$

$$T(\eta,\theta) = \sum_{n\neq 0,+\infty} \frac{1}{(\lambda_n+1)} \frac{(B_n'-C_n')}{\left\|\Phi_{\lambda_n}(z)\right\|^2} \frac{\left(\frac{P_{\lambda_n}(Cosh(\eta))}{P_{\lambda_n}(Cosh(l_{\eta 1}))} - \frac{Q_{\lambda_n}(Cosh(\eta))}{Q_{\lambda_n}(Cosh(l_{\eta 1}))}\right)}{\left(\frac{P_{\lambda_n}(Cosh(l_{\eta 2}))}{P_{\lambda_n}(Cosh(l_{\eta 1}))} - \frac{Q_{\lambda_n}(Cosh(l_{\eta 2}))}{Q_{\lambda_n}(Cosh(l_{\eta 1}))}\right)} \left(\frac{P_{\lambda_n}(Cos(\theta))}{P_{\lambda_n}(\mu_1)} - \frac{Q_{\lambda_n}(Cos(\theta))}{Q_{\lambda_n}(\mu_1)}\right)$$

.

Exemple : *Section sphéroïdale allongée creuse entre les angles θ_1,θ_2, en coordonnées sphéroïdales allongées (η,θ) soumise à des conditions aux limites de Dirichlet inhomogènes en $\eta=l_{\eta 1}$ et inhomogènes en $\eta=l_{\eta 2}$* , Neumann homogènes en θ_1 *et* θ_2

Soit le problème :

$$\Delta T(r,\theta)=0 \quad T(\eta,\theta)\big|_{\eta=l_{\eta 1}}=0 \quad T(\eta,\theta)\ fini$$
$$T(\eta,\theta)\big|_{\eta=l_{\eta 2}}=f_\theta(Cos(\theta))$$
$$T_z'(\eta,\theta)\big|_{\theta=\theta_1}=0 \quad T_z'(\eta,\theta)\big|_{\theta=\theta_2}=0$$

En suivant les résultats d'un exemple précédent, il vient :

$$B_0=\int_{\mu_1}^{\mu_2} dz\ f_\theta(z) \quad B_n=\int_{\mu_1}^{\mu_2} dz\ f_\theta(z)P_{\lambda_n}(z) \quad C_n=\int_{\mu_1}^{\mu_2} dz\ f_\theta(z)Q_{\lambda_n}(z) \quad F_n=\frac{B_n}{P_{\lambda_n}'(\mu_1)}-\frac{C_n}{Q_{\lambda_n}'(\mu_1)}$$

$$P_{\lambda_n}'(\mu_1)=\frac{\lambda_n}{\mu_1^{\ 2}-1}\left(\mu_1 P_{\lambda_n}(\mu_1)-P_{\lambda_n-1}(\mu_1)\right) \quad P_{\lambda_n}'(\mu_2)=\frac{\lambda_n}{\mu_2^{\ 2}-1}\left(\mu_2 P_{\lambda_n}(\mu_2)-P_{\lambda_n-1}(\mu_2)\right)$$

$$Q_{\lambda_n}'(\mu_1)=\frac{\lambda_n}{\mu_1^{\ 2}-1}\left(\mu_1 Q_{\lambda_n}(\mu_1)-Q_{\lambda_n-1}(\mu_1)\right) \quad Q_{\lambda_n}'(\mu_2)=\frac{\lambda_n}{\mu_2^{\ 2}-1}\left(\mu_2 Q_{\lambda_n}(\mu_2)-Q_{\lambda_n-1}(\mu_2)\right)$$

$$\frac{\partial^2\Phi_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial\lambda\partial z}=\frac{1}{P_{\lambda_n}'(\mu_1)}\left[\frac{\partial^2 P_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial\lambda\partial z}-\frac{P_{\lambda_n}'(\mu_2)}{P_{\lambda_n}'(\mu_1)}\frac{\partial^2 P_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial\lambda\partial z}\right]-\frac{1}{Q_{\lambda_n}'(\mu_1)}\left[\frac{\partial^2 Q_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial\lambda\partial z}-\frac{Q_{\lambda_n}'(\mu_2)}{Q_{\lambda_n}'(\mu_1)}\frac{\partial^2 Q_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial\lambda\partial z}\right]$$

$$\frac{\partial^2 P_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial\lambda\partial z}=\frac{\lambda_n}{\mu_1^{\ 2}-1}\left(\mu_1\frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial\lambda}-\frac{\partial P_{\lambda_n-1}(\mu_1)}{\partial\lambda}\right) \quad \frac{\partial^2 P_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial\lambda\partial z}=\frac{\lambda_n}{\mu_2^{\ 2}-1}\left(\mu_2\frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial\lambda}-\frac{\partial P_{\lambda_n-1}(\mu_2)}{\partial\lambda}\right)$$

$$\frac{\partial^2 Q_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial\lambda\partial z}=\frac{\lambda_n}{\mu_1^{\ 2}-1}\left(\mu_1\frac{\partial Q_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial\lambda}-\frac{\partial Q_{\lambda_n-1}(\mu_1)}{\partial\lambda}\right) \quad \frac{\partial^2 Q_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial\lambda\partial z}=\frac{\lambda_n}{\mu_2^{\ 2}-1}\left(\mu_2\frac{\partial Q_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial\lambda}-\frac{\partial Q_{\lambda_n-1}(\mu_2)}{\partial\lambda}\right)$$

$$\Phi_{\lambda_n}(z)=\frac{P_{\lambda_n}(z)}{P_{\lambda_n}'(\mu_1)}-\frac{Q_{\lambda_n}(z)}{Q_{\lambda_n}'(\mu_1)} \quad \|\Phi_0(z)\|^2=\mu_2-\mu_1 \quad \|\Phi_{\lambda_n}(z)\|^2=-\frac{\left(1-\mu_2^{\ 2}\right)\Phi_{\lambda_n}(\mu_2)\dfrac{\partial^2\Phi_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial z\partial\lambda}}{(2\lambda_n+1)}$$

$$T(\eta,\theta)=\frac{B_0}{(\mu_2-\mu_1)}\frac{Log\left(\dfrac{Tanh(l_{\eta 1}/2)}{Tanh(\eta/2)}\right)}{Log\left(\dfrac{Tanh(l_{\eta 1}/2)}{Tanh(l_{\eta 2}/2)}\right)}+$$

$$F_n\frac{\left(\dfrac{P_{\lambda_n}(Cosh(\eta))}{P_{\lambda_n}(Cosh(l_{\eta 1}))}-\dfrac{Q_{\lambda_n}(Cosh(\eta))}{Q_{\lambda_n}(Cosh(l_{\eta 1}))}\right)}{\left(\dfrac{P_{\lambda_n}(Cosh(l_{\eta 2}))}{P_{\lambda_n}(Cosh(l_{\eta 1}))}-\dfrac{Q_{\lambda_n}(Cosh(l_{\eta 2}))}{Q_{\lambda_n}(Cosh(l_{\eta 1}))}\right)}\left(\frac{P_{\lambda_n}(Cos(\theta))}{P_{\lambda_n}'(\mu_1)}-\frac{Q_{\lambda_n}(Cos(\theta))}{Q_{\lambda_n}'(\mu_1)}\right)$$

$$+\sum_{n\neq 0,+\infty}\frac{}{\|\Phi_{\lambda_n}(z)\|^2}$$

Lorsque la fonction limite $f_\theta(z)=1$, on a

$$B_n = \int_{\mu_1}^{\mu_2} dz\, P_{\lambda_n}(z) \quad C_n = \int_{\mu_1}^{\mu_2} dz\, Q_{\lambda_n}(z)$$

en utilisant les équations (3)

$$\Rightarrow B_n = \frac{\left(\mu_2 P_{\lambda_n}(\mu_2) - P_{\lambda_n-1}(\mu_2)\right) - \left(\mu_1 P_{\lambda_n}(\mu_1) - P_{\lambda_n-1}(\mu_1)\right)}{\lambda_n+1} \quad C_n = \frac{\left(\mu_2 Q_{\lambda_n}(\mu_2) - Q_{\lambda_n-1}(\mu_2)\right) - \left(\mu_1 Q_{\lambda_n}(\mu_1) - Q_{\lambda_n-1}(\mu_1)\right)}{\lambda_n+1}$$

$$F_n = \frac{1}{\lambda_n+1}\left(\frac{\left(\mu_2 P_{\lambda_n}(\mu_2) - P_{\lambda_n-1}(\mu_2)\right)}{P_{\lambda_n}'(\mu_1)} - \frac{\left(\mu_2 Q_{\lambda_n}(\mu_2) - Q_{\lambda_n-1}(\mu_2)\right)}{P_{\lambda_n}'(\mu_1)}\right) = 0$$

$$T(\eta,\theta) = \frac{Log\left(\dfrac{Tanh(l_{\eta 1}/2)}{Tanh(\eta/2)}\right)}{Log\left(\dfrac{Tanh(l_{\eta 1}/2)}{Tanh(l_{\eta 2}/2)}\right)}$$

On retrouve bien la solution triviale, puisque $B_0=\mu_2-\mu_1$:

Lorsque la fonction limite $f_\theta(z)$ présente un profil en fonction de Heaviside, il vient :

$$f_\theta(z) = 1 \quad si\ z \in \left[\mu_1, \frac{\mu_1+\mu_2}{2}\right] \quad f_\theta(z) = 0 \quad si\ z \notin \left[\mu_1, \frac{\mu_1+\mu_2}{2}\right] \quad \Phi_{\lambda_n}(z) = \frac{P_{\lambda_n}(z)}{P_{\lambda_n}'(\mu_1)} - \frac{Q_{\lambda_n}(z)}{Q_{\lambda_n}'(\mu_1)}$$

Il vient

$$F_n = \left(\frac{\left(\left(\frac{\mu_1+\mu_2}{2}\right)P_{\lambda_n}\left(\frac{\mu_1+\mu_2}{2}\right) - P_{\lambda_n-1}\left(\frac{\mu_1+\mu_2}{2}\right)\right)}{P_{\lambda_n}'(\mu_1)} - \frac{\left(\left(\frac{\mu_1+\mu_2}{2}\right)Q_{\lambda_n}\left(\frac{\mu_1+\mu_2}{2}\right) - Q_{\lambda_n-1}\left(\frac{\mu_1+\mu_2}{2}\right)\right)}{Q_{\lambda_n}'(\mu_1)}\right)$$

$$T(r,\theta) = \frac{1}{2}\frac{Log\left(\dfrac{Tanh(l_{\eta 1}/2)}{Tanh(\eta/2)}\right)}{Log\left(\dfrac{Tanh(l_{\eta 1}/2)}{Tanh(l_{\eta 2}/2)}\right)} +$$

$$+ \sum_{n\neq 0,+\infty} \frac{\lambda_n^{\,2}}{(\lambda_n+1)(\mu_1^{\,2}-1)^2} \frac{F_n \dfrac{\left(\dfrac{P_{\lambda_n}(Cosh(\eta))}{P_{\lambda_n}(Cosh(l_{\eta 1}))} - \dfrac{Q_{\lambda_n}(Cosh(\eta))}{Q_{\lambda_n}(Cosh(l_{\eta 1}))}\right)}{\left(\dfrac{P_{\lambda_n}(Cosh(l_{\eta 2}))}{P_{\lambda_n}(Cosh(l_{\eta 1}))} - \dfrac{Q_{\lambda_n}(Cosh(l_{\eta 2}))}{Q_{\lambda_n}(Cosh(l_{\eta 1}))}\right)}\left(\dfrac{P_{\lambda_n}(Cos(\theta))}{P_{\lambda_n}'(\mu_1)} - \dfrac{Q_{\lambda_n}(Cos(\theta))}{Q_{\lambda_n}'(\mu_1)}\right)}{\left\|\Phi_{\lambda_n}(z)\right\|^2}$$

.

Exemple : problème de Dirichlet sur un cône sphéroïdal non borné ou hyperboloïde à deux nappes infini

$$\Delta T(\eta,\theta)=0 \quad (\eta,\theta)\in\{0\le\eta<\infty, 0\le\theta<\theta_0\}$$

$$T(\eta,\theta)\big|_{\theta=\theta_0}=\begin{cases}T_0 & 0\le\eta\le l_\eta\\ 0 & l_\eta\le\eta<\infty\end{cases} \quad Lim_{\eta\to\infty}T(\eta,\theta)=0$$

Cet exemple a déjà été abordé dans le système de coordonnées sphériques sur un cône. Dans ce contexte, il s'agissait de reprendre les résultats d'une article de ROKURO MUKI , ELI STEIRNBERG, « Steady-State Heat Conduction in a Circular Cone », Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP, July 1960, Volume 11, Issue 4, pp 306–315. L'autre intérêt de traiter cet exemple dans le cadre du système sphéroïdal allongé, c'est de pouvoir comparer les résultats obtenus par deux méthodes totalement différente, la première ici présente par séparation des variables avec des fonctions de Legendre classique, la deuxième avec la transformation intégrale de Mehler-Fock faisant intervenir des fonctions coniques de Mehler. Dans le cas du cône sphéroïdal c'est à dire d'un hyperboloïde, nous reporterons certains résultats à l'identique à partir du moment où le système de fonctions propres angulaires est exactement le même. Le problème étant séparé en deux sous-problèmes, la solution développée en série se présente sous la forme :

$$\lambda_n \quad tq\ P_{\lambda_n}(\mu_0)=0 \quad \mu_0=Cos(\theta_0) \quad \Omega_1=\{(\eta,\theta),0\le\eta\le l_\eta,\theta\in[0,\theta_0]\} \quad \Omega_2=\{(\eta,\theta),l_\eta\le\eta<\infty,\theta\in[0,\theta_0]\}$$

$$T_{\Omega1}(\eta,\theta)=T_0+\sum_{n\neq0,+\infty}\frac{(2\lambda_n+1)}{\lambda_n}\frac{B_n}{P_{\lambda_n-1}(\mu_0)\dfrac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\partial\lambda_n}}\frac{P_{\lambda_n}(Cosh(\eta))}{P_{\lambda_n}(Cosh(l_\eta))}P_{\lambda_n}(Cos(\theta)) \quad (\eta,\theta)\in\Omega_1$$

$$T_{\Omega2}(r,\theta)=-\sum_{n\neq0,+\infty}\frac{(2\lambda_n+1)}{\lambda_n}\frac{C_n}{P_{\lambda_n-1}(\mu_0)\dfrac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\partial\lambda_n}}\frac{Q_{\lambda_n}(Cosh(\eta))}{Q_{\lambda_n}(Cosh(l_\eta))}P_{\lambda_n}(Cos(\theta)) \quad (\eta,\theta)\in\Omega_2$$

Pour cela on considère le comportement asymptotique des fonctions de Legendre dans l'intervalle [-1,+1] et en dehors sur [1,+∞) :

$$\forall\lambda_n>0 \quad , \quad \lim_{\theta\to0^+}P_{\lambda_n}(Cos(\theta))=1 \quad \lim_{\theta\to0^+}Q_{\lambda_n}(Cos(\theta))=+\infty$$

$$\lim_{\eta\to0^+}P_{\lambda_n}(Cosh(\eta))=1 \quad \lim_{\eta\to0^+}Q_{\lambda_n}(Cosh(\eta))=+\infty$$

$$\lim_{\eta\to+\infty}P_{\lambda_n}(Cosh(\eta))=\infty \quad \lim_{\eta\to+\infty}Q_{\lambda_n}(Cosh(\eta))=0$$

Ce qui conduit dans le domaine intérieur et extérieur aux deux solutions proposées.

La décomposition de l'unité s'écrit tout comme dans le cas des coordonnées sphériques :

$$1=-\sum_{n\neq0,+\infty}\frac{(2\lambda_n+1)}{\lambda_n(\lambda_n+1)\dfrac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\partial\lambda_n}}P_{\lambda_n}(Cos(\theta))$$

$$Avec\ les\ normes\ \|P_{\lambda_n}(z)\|^2=-\frac{\lambda_n}{(2\lambda_n+1)}\frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\partial\lambda_n}P_{\lambda_n-1}(\mu_0)\Rightarrow 1=\sum_{n\neq0,+\infty}\frac{P_{\lambda_n-1}(\mu_0)}{(\lambda_n+1)\|P_{\lambda_n}(z)\|^2}P_{\lambda_n}(Cos(\theta))$$

.

Soit les solutions :

$$T_{\Omega 1}(\eta,\theta)=\sum_{n\neq 0,+\infty}\left[-T_0\frac{(2\lambda_n+1)}{\lambda_n(\lambda_n+1)\dfrac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\partial\lambda_n}}+\frac{(2\lambda_n+1)}{\lambda_n}\frac{B_n}{P_{\lambda_n-1}(\mu_0)\dfrac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\partial\lambda_n}}\frac{P_{\lambda_n}(Cosh(\eta))}{P_{\lambda_n}(Cosh(l_\eta))}\right]P_{\lambda_n}(Cos(\theta))$$

$$\Rightarrow T_{\Omega 1}(\eta,\theta)=\sum_{n\neq 0,+\infty}\frac{(2\lambda_n+1)}{\lambda_n P_{\lambda_n-1}(\mu_0)\dfrac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\partial\lambda_n}}\left[-\frac{T_0P_{\lambda_n-1}(\mu_0)}{(\lambda_n+1)}+B_n\frac{P_{\lambda_n}(Cosh(\eta))}{P_{\lambda_n}(Cosh(l_\eta))}\right]P_{\lambda_n}(Cos(\theta))$$

$$T_{\Omega 2}(\eta,\theta)=-\sum_{n\neq 0,+\infty}\frac{(2\lambda_n+1)}{\lambda_n}\frac{C_n}{P_{\lambda_n-1}(\mu_0)\dfrac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\partial\lambda_n}}\frac{Q_{\lambda_n}(Cosh(\eta))}{Q_{\lambda_n}(Cosh(l_\eta))}P_{\lambda_n}(Cos(\theta))$$

.

La condition de continuité des solutions et celle de continuité de la dérivée première radiale donnent le système d'équations algébriques :

$$T_{\Omega 1}(\eta,\theta)\big|_{\eta=l_\eta}=T_{\Omega 2}(r,\theta)\big|_{\eta=l_\eta}\Rightarrow B_n+C_n=\frac{T_0P_{\lambda_n-1}(\mu_0)}{(\lambda_n+1)}$$

$$\left.\frac{\partial T_{\Omega 1}(\eta,\theta)}{\partial\eta}\right|_{\eta=l_\eta}=\left.\frac{\partial T_{\Omega 2}(\eta,\theta)}{\partial\eta}\right|_{\eta=l_\eta}\Rightarrow B_n\frac{P_{\lambda_n}'(Cosh(l_\eta))}{P_{\lambda_n}(Cosh(l_\eta))}+C_n\frac{Q_{\lambda_n}'(Cosh(l_\eta))}{Q_{\lambda_n}(Cosh(l_\eta))}=0$$

.

Soit les coefficients du développement en série :

$$B_n=\frac{T_0P_{\lambda_n-1}(\mu_0)}{(\lambda_n+1)}\frac{P_{\lambda_n}(Cosh(l_\eta))Q_{\lambda_n}'(Cosh(l_\eta))}{\left[P_{\lambda_n}(Cosh(l_\eta))Q_{\lambda_n}'(Cosh(l_\eta))-P_{\lambda_n}'(Cosh(l_\eta))Q_{\lambda_n}(Cosh(l_\eta))\right]}$$

$$C_n=-\frac{T_0P_{\lambda_n-1}(\mu_0)}{(\lambda_n+1)}\frac{P_{\lambda_n}'(Cosh(l_\eta))Q_{\lambda_n}(Cosh(l_\eta))}{\left[P_{\lambda_n}(Cosh(l_\eta))Q_{\lambda_n}'(Cosh(l_\eta))-P_{\lambda_n}'(Cosh(l_\eta))Q_{\lambda_n}(Cosh(l_\eta))\right]}.$$

En introduisant la valeur du Wronskien, il vient :

$$P_{\lambda_n}(Cosh(l_\eta))Q_{\lambda_n}'(Cosh(l_\eta))-P_{\lambda_n}'(Cosh(l_\eta))Q_{\lambda_n}(Cosh(l_\eta))=\frac{1}{1-Cosh^2(l_\eta)}=-\frac{1}{Sinh^2(l_\eta)}$$

$$B_n=-Sinh^2(l_\eta)\frac{T_0P_{\lambda_n-1}(\mu_0)}{(\lambda_n+1)}P_{\lambda_n}(Cosh(l_\eta))Q_{\lambda_n}'(Cosh(l_\eta))$$

$$C_n=Sinh^2(l_\eta)\frac{T_0P_{\lambda_n-1}(\mu_0)}{(\lambda_n+1)}P_{\lambda_n}'(Cosh(l_\eta))Q_{\lambda_n}(Cosh(l_\eta))$$

Sans le facteur $Sinh(l_\eta)$!

$$\left[P_{\lambda_n}(Cosh(l_\eta))Q_{\lambda_n}'(Cosh(l_\eta))-P_{\lambda_n}'(Cosh(l_\eta))Q_{\lambda_n}(Cosh(l_\eta))\right]=$$
$$=\lambda_n\left[P_{\lambda_n-1}(Cosh(l_\eta))Q_{\lambda_n}(Cosh(l_\eta))-P_{\lambda_n}(Cosh(l_\eta))Q_{\lambda_n-1}(Cosh(l_\eta))\right]$$

$$\Rightarrow\left[P_{\lambda_n-1}(Cosh(l_\eta))Q_{\lambda_n}(Cosh(l_\eta))-P_{\lambda_n}(Cosh(l_\eta))Q_{\lambda_n-1}(Cosh(l_\eta))\right]=-\frac{1}{\lambda_n}$$

.

Les solutions s'expriment donc avec des nouveaux coefficients comme suit :

$$P_{\lambda_n}'(Cosh(l_\eta)) = \frac{\lambda_n}{Sinh(l_\eta)}\left[Cosh(l_\eta)P_{\lambda_n}(Cosh(l_\eta)) - P_{\lambda_n-1}(Cosh(l_\eta))\right]$$

$$Q_{\lambda_n}'(Cosh(l_\eta)) = \frac{\lambda_n}{Sinh(l_\eta)}\left[Cosh(l_\eta)Q_{\lambda_n}(Cosh(l_\eta)) - Q_{\lambda_n-1}(Cosh(l_\eta))\right]$$

$$\left[P_{\lambda_n}(Cosh(l_\eta))Q_{\lambda_n}'(Cosh(l_\eta)) - P_{\lambda_n}'(Cosh(l_\eta))Q_{\lambda_n}(Cosh(l_\eta))\right] =$$

$$= \frac{\lambda_n}{Sinh(l_\eta)}\left[P_{\lambda_n-1}(Cosh(l_\eta))Q_{\lambda_n}(Cosh(l_\eta)) - P_{\lambda_n}(Cosh(l_\eta))Q_{\lambda_n-1}(Cosh(l_\eta))\right]$$

$$\Rightarrow \frac{B_n}{P_{\lambda_n-1}(\mu_0)P_{\lambda_n}(Cosh(l_\eta))} = \frac{T_0}{(\lambda_n+1)}\frac{\left[Cosh(l_\eta)Q_{\lambda_n}(Cosh(l_\eta)) - Q_{\lambda_n-1}(Cosh(l_\eta))\right]}{\left[P_{\lambda_n-1}(Cosh(l_\eta))Q_{\lambda_n}(Cosh(l_\eta)) - P_{\lambda_n}(Cosh(l_\eta))Q_{\lambda_n-1}(Cosh(l_\eta))\right]}$$

$$= \frac{T_0}{(\lambda_n+1)}\beta_n$$

$$\Rightarrow \frac{C_n}{P_{\lambda_n-1}(\mu_0)Q_{\lambda_n}(Cosh(l_\eta))} = -\frac{T_0}{(\lambda_n+1)}\frac{\left[Cosh(l_\eta)P_{\lambda_n}(Cosh(l_\eta)) - P_{\lambda_n-1}(Cosh(l_\eta))\right]}{\left[P_{\lambda_n-1}(Cosh(l_\eta))Q_{\lambda_n}(Cosh(l_\eta)) - P_{\lambda_n}(Cosh(l_\eta))Q_{\lambda_n-1}(Cosh(l_\eta))\right]}$$

$$= -\frac{T_0}{(\lambda_n+1)}\xi_n$$

$$\Rightarrow \beta_n = \frac{\left[Cosh(l_\eta)Q_{\lambda_n}(Cosh(l_\eta)) - Q_{\lambda_n-1}(Cosh(l_\eta))\right]}{\left[P_{\lambda_n-1}(Cosh(l_\eta))Q_{\lambda_n}(Cosh(l_\eta)) - P_{\lambda_n}(Cosh(l_\eta))Q_{\lambda_n-1}(Cosh(l_\eta))\right]}$$

$$\Rightarrow \beta_n = -\lambda_n\left[Cosh(l_\eta)Q_{\lambda_n}(Cosh(l_\eta)) - Q_{\lambda_n-1}(Cosh(l_\eta))\right]$$

$$\Rightarrow \xi_n = \frac{\left[Cosh(l_\eta)P_{\lambda_n}(Cosh(l_\eta)) - P_{\lambda_n-1}(Cosh(l_\eta))\right]}{\left[P_{\lambda_n-1}(Cosh(l_\eta))Q_{\lambda_n}(Cosh(l_\eta)) - P_{\lambda_n}(Cosh(l_\eta))Q_{\lambda_n-1}(Cosh(l_\eta))\right]}$$

$$\Rightarrow \xi_n = -\lambda_n\left[Cosh(l_\eta)P_{\lambda_n}(Cosh(l_\eta)) - P_{\lambda_n-1}(Cosh(l_\eta))\right]$$

Ces solutions sont alors les suivantes :

$$\beta_n = \frac{\left[Cosh(l_\eta)Q_{\lambda_n}(Cosh(l_\eta)) - Q_{\lambda_n-1}(Cosh(l_\eta))\right]}{\left[P_{\lambda_n-1}(Cosh(l_\eta))Q_{\lambda_n}(Cosh(l_\eta)) - P_{\lambda_n}(Cosh(l_\eta))Q_{\lambda_n-1}(Cosh(l_\eta))\right]}$$

$$\beta_n = -\lambda_n\left[Cosh(l_\eta)Q_{\lambda_n}(Cosh(l_\eta)) - Q_{\lambda_n-1}(Cosh(l_\eta))\right]$$

$$\xi_n = \frac{\left[Cosh(l_\eta)P_{\lambda_n}(Cosh(l_\eta)) - P_{\lambda_n-1}(Cosh(l_\eta))\right]}{\left[P_{\lambda_n-1}(Cosh(l_\eta))Q_{\lambda_n}(Cosh(l_\eta)) - P_{\lambda_n}(Cosh(l_\eta))Q_{\lambda_n-1}(Cosh(l_\eta))\right]}$$

$$\xi_n = -\lambda_n\left[Cosh(l_\eta)P_{\lambda_n}(Cosh(l_\eta)) - P_{\lambda_n-1}(Cosh(l_\eta))\right]$$

$$T_{\Omega 1}(\eta,\theta) = T_0\sum_{n\neq 0,+\infty}\frac{(2\lambda_n+1)}{\lambda_n(\lambda_n+1)\frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\partial\lambda_n}}\left[-1+\beta_n P_{\lambda_n}(Cosh(\eta))\right]P_{\lambda_n}(Cos(\theta))$$

$$T_{\Omega 2}(\eta,\theta) = T_0\sum_{n\neq 0,+\infty}\frac{(2\lambda_n+1)}{\lambda_n(\lambda_n+1)\frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\partial\lambda_n}}\xi_n Q_{\lambda_n}(Cosh(\eta))\,P_{\lambda_n}(Cos(\theta))$$

Il est facile de vérifier la condition de continuité, afin de s'assurer de l'absence d'erreur de calcul, elle est assurée par la relation suivante entre les deux coefficients :

$$\beta_n = \frac{\left[Cosh(l_\eta)Q_{\lambda_n}(Cosh(l_\eta)) - Q_{\lambda_n-1}(Cosh(l_\eta))\right]}{\left[P_{\lambda_n-1}(Cosh(l_\eta))Q_{\lambda_n}(Cosh(l_\eta)) - P_{\lambda_n}(Cosh(l_\eta))Q_{\lambda_n-1}(Cosh(l_\eta))\right]}$$

$$\beta_n = -\lambda_n\left[Cosh(l_\eta)Q_{\lambda_n}(Cosh(l_\eta)) - Q_{\lambda_n-1}(Cosh(l_\eta))\right]$$

$$\xi_n = \frac{\left[Cosh(l_\eta)P_{\lambda_n}(Cosh(l_\eta)) - P_{\lambda_n-1}(Cosh(l_\eta))\right]}{\left[P_{\lambda_n-1}(Cosh(l_\eta))Q_{\lambda_n}(Cosh(l_\eta)) - P_{\lambda_n}(Cosh(l_\eta))Q_{\lambda_n-1}(Cosh(l_\eta))\right]}$$

$$\xi_n = -\lambda_n\left[Cosh(l_\eta)P_{\lambda_n}(Cosh(l_\eta)) - P_{\lambda_n-1}(Cosh(l_\eta))\right]$$

$$\Rightarrow \beta_n P_{\lambda_n}(Cosh(l_\eta)) - \xi_n Q_{\lambda_n}(Cosh(l_\eta)) = 1$$

$$Car \quad \left[Cosh(l_\eta)Q_{\lambda_n}(Cosh(l_\eta)) - Q_{\lambda_n-1}(Cosh(l_\eta))\right]P_{\lambda_n}(Cosh(l_\eta)) - \left[Cosh(l_\eta)P_{\lambda_n}(Cosh(l_\eta)) - P_{\lambda_n-1}(Cosh(l_\eta))\right]Q_{\lambda_n}(Cosh(l_\eta))$$

$$= P_{\lambda_n-1}(Cosh(l_\eta))Q_{\lambda_n}(Cosh(l_\eta)) - Q_{\lambda_n-1}(Cosh(l_\eta))P_{\lambda_n}(Cosh(l_\eta))$$

Ou bien encore

$$-\lambda_n\left[Cosh(l_\eta)Q_{\lambda_n}(Cosh(l_\eta)) - Q_{\lambda_n-1}(Cosh(l_\eta))\right]P_{\lambda_n}(Cosh(l_\eta)) +$$

$$+\lambda_n\left[Cosh(l_\eta)P_{\lambda_n}(Cosh(l_\eta)) - P_{\lambda_n-1}(Cosh(l_\eta))\right]Q_{\lambda_n}(Cosh(l_\eta)) =$$

$$= \lambda_n\left(Q_{\lambda_n-1}(Cosh(l_\eta))P_{\lambda_n}(Cosh(l_\eta)) - P_{\lambda_n-1}(Cosh(l_\eta))Q_{\lambda_n}(Cosh(l_\eta))\right)$$

$$= 1$$

Voyons maintenant le cas particulier de l'angle d'ouverture $\theta_0=\pi/2$. Dans ce cas l'hyperboloïde dégénère en le plan (x,y) tout entier, et les valeurs propres du problème aux limites de Dirichlet sont les entiers impairs :

$$\mu_0 = Cos(\theta_0) = Cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \Rightarrow \lambda_n = 2n+1 \quad \left.\frac{\partial P_\lambda(0)}{\partial \lambda}\right|_{\lambda_n=2n+1} = -(-1)^n \frac{2^{2n}\,(n!)^2}{(2n+1)!}$$

$$\beta_n = \frac{\left[Cosh(l_\eta)Q_{2n+1}(Cosh(l_\eta)) - Q_{2n}(Cosh(l_\eta))\right]}{\left[P_{2n}(Cosh(l_\eta))Q_{2n+1}(Cosh(l_\eta)) - P_{2n+1}(Cosh(l_\eta))Q_{2n}(Cosh(l_\eta))\right]}$$

$$\xi_n = \frac{\left[Cosh(l_\eta)P_{2n+1}(Cosh(l_\eta)) - P_{2n}(Cosh(l_\eta))\right]}{\left[P_{2n}(Cosh(l_\eta))Q_{2n+1}(Cosh(l_\eta)) - P_{2n+1}(Cosh(l_\eta))Q_{2n}(Cosh(l_\eta))\right]}$$

$$\beta_n = -(2n+1)\left[Cosh(l_\eta)Q_{2n+1}(Cosh(l_\eta)) - Q_{2n}(Cosh(l_\eta))\right]$$

$$\xi_n = -(2n+1)\left[Cosh(l_\eta)P_{2n+1}(Cosh(l_\eta)) - P_{2n}(Cosh(l_\eta))\right]$$

$$\frac{T_{\Omega 1}(\eta,\theta)}{T_0} = \sum_{n=0,+\infty} \frac{(4n+3)}{(2n+1)(2n+2)\dfrac{\partial P_{2n+1}(0)}{\partial \lambda}}\left[-1+\beta_n P_{2n+1}(Cosh(\eta))\right] P_{2n+1}(Cos(\theta))$$

$$\frac{T_{\Omega 2}(\eta,\theta)}{T_0} = \sum_{n\neq 0,+\infty} \frac{(4n+3)}{(2n+1)(2n+2)\dfrac{\partial P_{2n+1}(0)}{\partial \lambda}}\,\xi_n Q_{2n+1}(Cosh(\eta))\, P_{2n+1}(Cos(\theta))$$

.

En simplifiant avec le facteur d'échelle c=1, Sur le premier domaine, l'intervalle de valeur de z est séparé en deux, et le profil se présente de la manière suivante, sur le premier domaine séparé en deux sous-intervalles :

$$Disque\ de\ rayon\ r_0\ sur\ le\ plan\ (x,y) \quad r_0 = Sinh(l_\eta) \quad Cosh(l_\eta) = x_0 = \sqrt{1+r_0^{\,2}}$$

$$\left.\begin{array}{l} z = Cos(\theta) \in [0,1] \\ \eta = 0, \theta \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right] \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{T_{\Omega 1}(z)}{T_0} = \sum_{n=0,+\infty} (-1)^n \frac{(4n+3)(2n)!}{(2n+2)2^{2n}\,(n!)^2}[1-\beta_n]\,P_{2n+1}(z)$$

$$\left.\begin{array}{l} z = Cosh(\eta) \in \left[1, Cosh(l_\eta) = x_0 = \sqrt{1+r_0^{\,2}}\right] \\ \eta \in [0, l_\eta], \theta = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{T_{\Omega 1}(z)}{T_0} = \sum_{n=0,+\infty} (-1)^n \frac{(4n+3)(2n)!}{(2n+2)2^{2n}\,(n!)^2}[1-\beta_n P_{2n+1}(z)]$$

.

Et sur le deuxième domaine, il vient :

$$Disque\ de\ rayon\ r_0\ sur\ le\ plan\ (x,y) \quad r_0 = Sinh(l_\eta) \quad Cosh(l_\eta) = \sqrt{1+r_0^{\,2}}$$

$$\left.\begin{array}{l} z = Cosh(\eta) \in \left[x_0 = Cosh(l_\eta) = \sqrt{1+r_0^{\,2}}, +\infty\right] \\ \eta \in [l_\eta, \infty], \theta = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{T_{\Omega 2}(z)}{T_0} = \sum_{n\neq 0,+\infty} \frac{(4n+3)}{(2n+1)(2n+2)\dfrac{\partial P_{2n+1}(0)}{\partial \lambda}} \xi_n Q_{2n+1}(z)\, P_{2n+1}(1)$$

$$\Rightarrow \frac{T_{\Omega 2}(z)}{T_0} = -\sum_{n\neq 0,+\infty} \frac{(4n+3)(2n)!}{(2n+2)(-1)^n 2^{2n}\,(n!)^2} \xi_n Q_{2n+1}(z)$$

Ce qui donne la solution suivante sur l'axe z, en utilisant la correspondance entre le système sphéroïdal allongé et le système cartésien :

$$\beta_n = \frac{[x_0 Q_{2n+1}(x_0) - Q_{2n}(x_0)]}{[P_{2n}(x_0)Q_{2n+1}(x_0) - P_{2n+1}(x_0)Q_{2n}(x_0)]} \quad \xi_n = \frac{[x_0 P_{2n+1}(x_0) - P_{2n}(x_0)]}{[P_{2n}(x_0)Q_{2n+1}(x_0) - P_{2n+1}(x_0)Q_{2n}(x_0)]}$$

$$\beta_n = -(2n+1)[x_0 Q_{2n+1}(x_0) - Q_{2n}(x_0)] \quad \xi_n = -(2n+1)[x_0 P_{2n+1}(x_0) - P_{2n}(x_0)]$$

$$\beta_n P_{\lambda_n}(x_0) - \xi_n Q_{\lambda_n}(x_0) = 1$$

$$\left.\begin{array}{l} z = Cos(\theta) \\ \eta = 0, \theta \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right] \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{T_{\Omega 1}(z)}{T_0} = \sum_{n=0,+\infty} (-1)^n \frac{(4n+3)(2n)!}{(2n+2)2^{2n}\,(n!)^2}[1-\beta_n]\,P_{2n+1}(z)$$

$$\left.\begin{array}{l} z = Cosh(\eta) \in \left[1, Cosh(l_\eta) = x_0 = \sqrt{1+r_0^{\,2}}\right] \\ \eta \in [0, l_\eta] \quad , \theta = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{T_{\Omega 1}(\eta,0)}{T_0} = \sum_{n=0,+\infty} (-1)^n \frac{(4n+3)(2n)!}{(2n+2)2^{2n}\,(n!)^2}[1-\beta_n P_{2n+1}(z)]$$

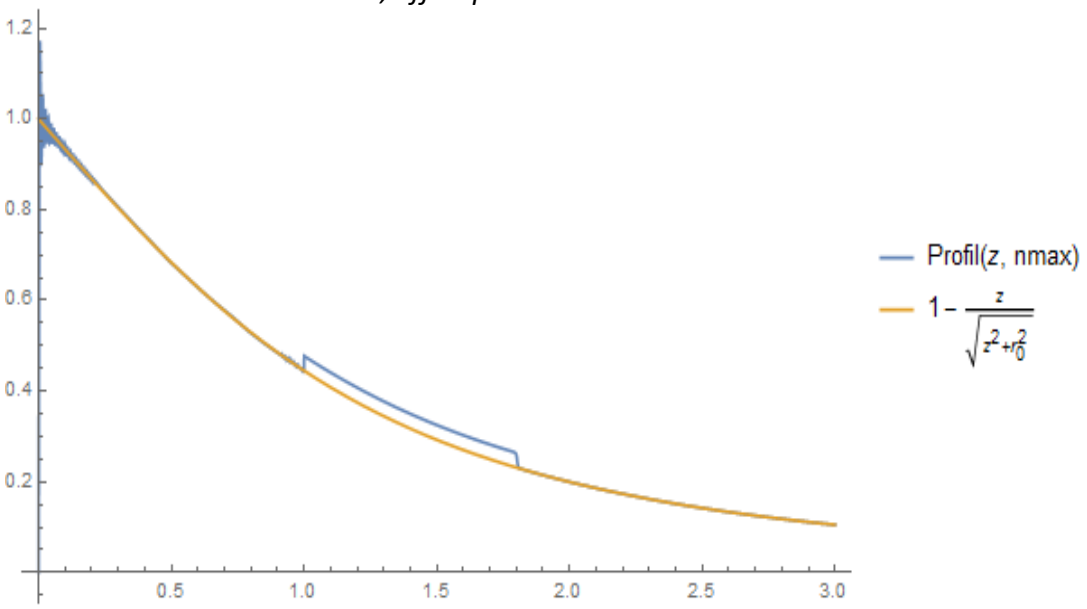
$$\left.\begin{array}{l} z = Cosh(\eta) \in \left[Cosh(l_\eta) = x_0 = \sqrt{1+r_0^{\,2}}, +\infty\right] \\ \eta \in [l_\eta, \infty], \theta = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{T_{\Omega 2}(\eta,\theta)}{T_0} = -\sum_{n\neq 0,+\infty} (-1)^n \frac{(4n+3)(2n)!}{(2n+2)2^{2n}\,(n!)^2} \xi_n Q_{2n+1}(z)$$

.

Ce profil est à rapprocher de la solution connue du profil qui s'avère être une fonction très simple :

$$\frac{T(z)}{T_0} = 1 - \left(\frac{z}{r_0}\right) \Big/ \sqrt{1 + \frac{z^2}{r_0^2}}$$

Le profil sur la figure ci-dessous reprend les solutions sur l'axe z, exposées précédemment. Le décrochement constaté entre [1,√(1+r_0^2)], diminue avec la prise en compte d'un nombre croissant de termes de la série, il est peut-être dû à une évaluation erronée des fonctions de Legendre de première pour z>1. Car dans le même temps au delà de la valeur √(1+r_0^2), la série avec les fonctions de deuxième espèce coïncident presque parfaitement. On note également que de toute façon la décomposition de l'unité a une très mauvaise convergence présentant beaucoup d'oscillation sur autour des valeurs z=0 et z=1, effet que l'on constate ci-dessous.



Remarque : concernant la simulation numérique, il arrive que les coefficients ξ_n présentent une divergence rapide avec l'augmentation d'indice, dans ce cas on commence par les coefficients β_n qui tendent rapidement à 0, puis on déduit les coefficients ξ_n par la formule, c'est le schéma 1, mais dans certains il faut calculer selon le schéma 2.

$$\textit{Schéma } 1 \quad \begin{cases} \beta_n = -(2n+1)\left[x_0 Q_{2n+1}(x_0) - Q_{2n}(x_0)\right] \\ \xi_n = \dfrac{\beta_n P_{2n+1}(x_0) - 1}{Q_{2n+1}(x_0)} \end{cases}$$

$$\textit{Schéma } 2 \quad \begin{cases} \xi_n = -(2n+1)\left[x_0 P_{2n+1}(x_0) - P_{2n}(x_0)\right] \\ \beta_n = \dfrac{1 + \xi_n Q_{2n+1}(x_0)}{P_{2n+1}(x_0)} \end{cases}$$

Problèmes aux limites sur des hyperboloïdes à deux nappes (cônes sphéroïdaux ou section coniques-sphéroïdales) homogènes dans la dimension radiale η, sans dépendance azimutale

Le choix des solutions suivantes permet de prendre en charge des problèmes aux limites homogène radiale et inhomogène angulaire sur un hyperboloïde de révolution à deux nappes :

$$R(\eta) = A\, P_{-\frac{1}{2}+i\tau}\left(Cosh(\eta)\right) + B\, Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}\left(Cosh(\eta)\right)$$

$$\Theta(\theta) = A\, P_{-\frac{1}{2}+i\tau}\left(Cos(\theta)\right) + B\, Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}\left(Cos(\theta)\right)$$

Tel qu'un problème de Dirichlet ou de Neumann sous la forme :

$$\Delta T(\eta,\theta) = 0 \quad (\eta,\theta) \in \left\{ l_{\eta 1} \le \eta \le l_{\eta 2}, 0 \le \theta < \theta_0 \right\} Lim_{\theta \to 0} T(\eta,\theta) \quad finie$$

$$\begin{cases} T(\eta,\theta)\big|_{\eta = l_{\eta 1}} = 0 \\ ou \\ \left.\dfrac{\partial T(\eta,\theta)}{\partial \theta}\right|_{\eta = l_{\eta 1}} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} T(\eta,\theta)\big|_{\eta = l_{\eta 2}} = 0 \\ ou \\ \left.\dfrac{\partial T(\eta,\theta)}{\partial \theta}\right|_{\eta = l_{\eta 2}} = 0 \end{cases} \quad T(\eta,\theta)\big|_{\theta = \theta_0} = f(\eta)$$

La finitude des solutions est gouvernée par les propriétés asymptotiques des fonctions de Legendre de première et deuxième espèce, à degré imaginaire (donc les fonctions coniques de Mehler) et à argument réel, à savoir notamment la valeur en z=1 :

$$Q_\nu(z) \approx -\frac{Log(z-1)}{2\Gamma(\nu+1)} + \frac{\dfrac{Log(2)}{2} - \gamma - \psi(\nu+1)}{\Gamma(\nu+1)} + O(z-1) \quad z \approx 1^+$$

$$\gamma \ Constante\ d'Euler \quad \psi(\nu) \quad fonction\ Digamma$$

$$\Rightarrow \lim_{\eta \to 1^+} Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}\left(Cosh(\eta)\right) = \infty \quad et \quad P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(1) = 1$$

Ainsi que la valeur en z=+∞ :

$$\lim_{z \to +\infty} Q_\nu(z) = 0 \quad et \quad \lim_{z \to +\infty} P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(z) = 0$$

.

<u>Commençons par le cas de l'intervalle η€[0,$l_{\eta 0}$], z=Cosh(η)->z€[1,z_0] :</u>

Il n'y a pas de conséquence liée au comportement des solutions en <u>η</u>=0 (z=1) dès lors que ces dernières sont finis. En écartant les fonctions de coniques de Mehler de deuxième espèce divergente en z=1, il reste à construire les solutions avec celles de première espèce. Il se trouve que la valeur z=1 est à l'origine des coordonnées, où s'annule la fonction p(x) dans l'expression de l'opérateur de Sturm-Liouville. C*e problème de Sturm-Liouville s'écrit comme suit :*

$$\frac{d}{dz}\left(p(z) \frac{dU(z)}{dz} \right) + \left[\lambda\, w(z) - s(z) \right] U(z) = 0$$

$$z = Cosh(\eta) \quad z \in [1, z_0] \quad z_0 \in [1, \infty] \quad p(z) = 1 - z^2 \quad s(z) = 0 \quad w(z) = 1$$

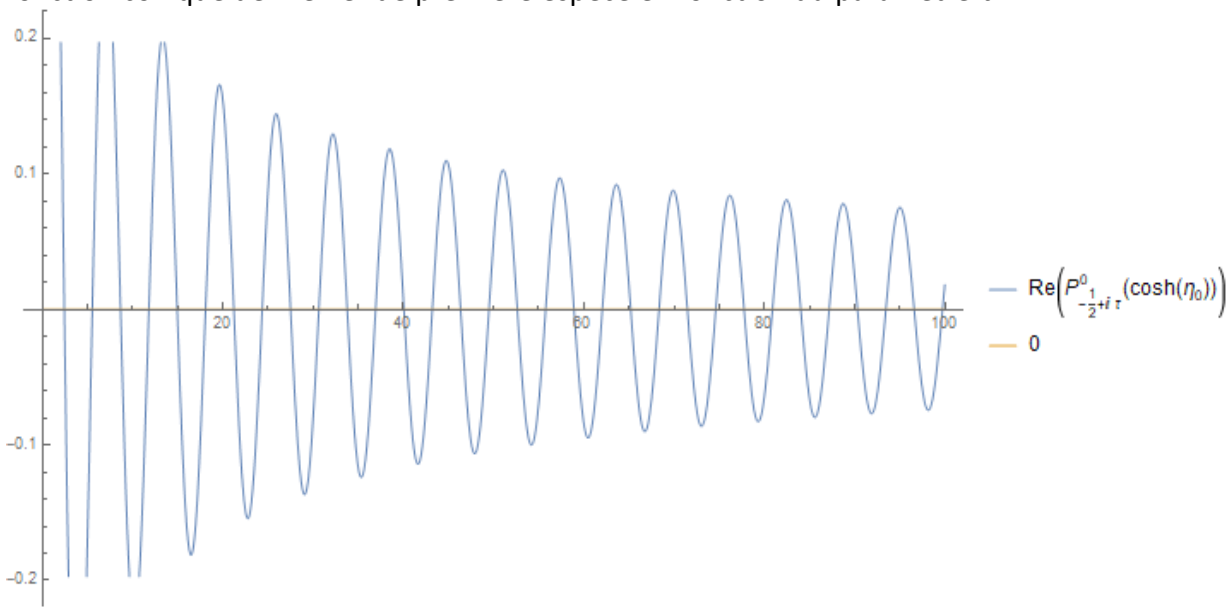
$$\Rightarrow \begin{cases} \left(1 - z^2\right) \dfrac{d^2 U(z)}{dz^2} - 2z \dfrac{dU(z)}{dz} - \left(\dfrac{1}{4} + \tau^2 \right) U(z) = \dfrac{d}{dz}\left(\left(1 - z^2\right) \dfrac{dU(z)}{dz} \right) - \left(\dfrac{1}{4} + \tau^2 \right) U(z) = 0 \\ p(z) < 0 \quad z \in [1, z_0] \end{cases}$$

$$Notation \quad \lambda = -\left(\frac{1}{4} + \tau^2 \right) = \nu(\nu+1) \Rightarrow \nu = -\frac{1}{2} + i\tau$$

Même si le problème de Sturm-Liouville est singulier, il possède les bonnes propriétés qui assurent qu'il existe donc un système de fonctions propres complet et orthogonal pour un problème aux limites homogène radial de ce type. Les valeurs propres de Sturm-Liouville sont négatives ce qui conduit pour les fonctions de Legendre à des valeurs propres discrètes imaginaires, celles du paramètres τ des fonctions coniques de Mehler. Par construction, la fonction Conique de Mehler de première espèce est à valeur réelle, et l'on peut vérifier numériquement que les solutions de l'équation transcendantale suivante existent : $\tau_n \quad tel\ que\ P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_0)=0 \quad z_0=Cosh(l_\eta)$

Par exemple pour une valeur z_0=Cosh(1), il vient les valeurs propres suivantes :
τn=2.42138, 5.52719, 8.65826, 11.7949, 14.9335, 18.0732, 21.2135, 24.3541, 27.4949, 30.6359, …

On peut illustrer graphiquement l'existence des solutions de l'équation transcendantale en traçant la fonction conique de Mehler de première espèce en fonction du paramètre τ.



<u>Cas de l'intervalle η€[l_{n1}, l_{n2}], z=Cosh(η) -> z€[z1=Cosh(l_{n1}),z2=Cosh(l_{n2})] :</u>

Dans ce cas le problème de Sturm-Liouville devient régulier avec des valeurs propres négatives (entraînant des paramètres imaginaires pour les fonctions propres), il existe un spectre discret de valeurs propres et un système orthogonal et complet de fonctions propres . Les fonctions coniques de Mehler de première et deuxième espèce forment un système de fonctions indépendantes. Toutefois la fonction de deuxième espèce est à valeur réelle. D'autre par sa partie imaginaire (voir les propriétés des fonctions coniques de Mehler sur l'intervalle [1,+∞] est proportionnelle à la fonction de première espèce. En conclusion un choix possible de fonctions indépendantes est constituée par :

$$P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(Cosh(\eta)) \quad , \quad \widetilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(Cosh(\eta))=\mathrm{Re}\left(Q_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(Cosh(\eta))\right)$$

Un autre choix possible de fonctions à valeur réelle indépendantes est donné par :

$$P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta)) = i\frac{Cotanh(\pi\tau)}{\pi}\left(Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta)) - Q_{-\frac{1}{2}-i\tau}(Cosh(\eta))\right)$$

$$L_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta)) = \frac{Cosh(\pi\tau)}{\pi}\left(Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta)) + Q_{-\frac{1}{2}-i\tau}(Cosh(\eta))\right)$$

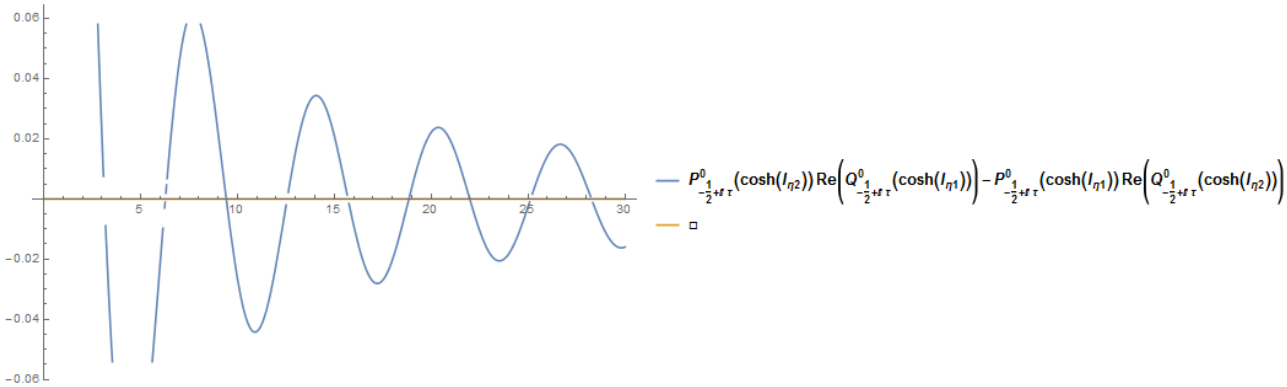
Les valeurs propres peut être construites par la résolution d'une équation transcendantale comme suit pour un problème homogène de Dirichlet en $l_{\eta 1}$ et $l_{\eta 2}$:

$$\tau_n \quad tel\ que \quad P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(Cosh(l_{\eta 1}))\tilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(Cosh(l_{\eta 2})) = \tilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(Cosh(l_{\eta 1}))P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(Cosh(l_{\eta 2})).$$

Contentons-nous de ce cas de figure sachant que les équations transcendantales dans le cas des conditions homogènes de Neumann, ou combinées Dirichlet/Neumann ne sont pas beaucoup plus difficile à obtenir. Même si cela n'est pas une preuve, voici le graphe de l'équation transcendantale en tant que fonction du paramètre τ, les solutions étant l'ensemble des points d'intersection avec l'axe des abscisse :

$$l_{\eta 1} = 1 \quad l_{\eta 2} = 2$$

$$F(\tau, l_{\eta 1}, l_{\eta 2}) = P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(l_{\eta 2}))\tilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(Cosh(l_{\eta 1})) - P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(Cosh(l_{\eta 1}))\tilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(l_{\eta 2}))$$



Pour l'exemple, avec $l_{\eta 1}$=1 $l_{\eta 2}$=*2* voici le jeu de valeurs propres τ_n :
τ_n =3.1319869898174106382, 6.2779019008125322845, 9.4211834216040919190, 12.563654676027245805, 15.705782929423131877, 18.847735498245959850,21.989586404634429313, 25.131373298661280558, 28.273117314492634571,31.414831218507219320, 34.556523172690331259,
Et avec les valeurs $l_{\eta 1}$=4 $l_{\eta 2}$=*6* voici le jeu de valeurs propres τ_n : 1.57078, 3.14158, 4.71238, 6.28318, 7.85416, 9.42466, 10.9407

<u>Cas de l'intervalle η€[0,+∞] :</u>

Dans ce cas il n'est pas possible de construire un système discret et complet de fonctions propres ayant les bonnes propriétés sur les deux bornes de l'intervalle. L'on peut s'inspirer de la forme des solutions préconisées par la séparation des variables par un développement intégral et non pas sous forme de série, grâce à l'existence de la transformation intégrale de Mehler-Fock.

Cas de l'intervalle η€[$l_{\eta 0}$,+∞], z=Cosh(η)->z€[z0=Cosh($l_{\eta 0}$),+∞] :

Cette fois-ci, les deux fonctions de coniques de Mehler de première espèce et deuxième espèce s'annulent en z=+∞. *Dans ces conditions toutes les valeurs de τ sont licites pour construire une solution. Tout se passe donc comme si les valeurs propres possédaient un spectre continu. Il suffit de choisir la fonction suivante pour respecter la condition aux limites homogène et la condition à l'infini:*

$$\Phi_\tau(\eta) = P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(Cosh(\eta))\widetilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(Cosh(l_{\eta 0})) - \widetilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(Cosh(\eta))P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(Cosh(l_{\eta 0})) \Rightarrow \Phi_\tau(l_{\eta 0}) = 0$$

Dans ce cas il n'est toujours pas possible de construire un système discret et complet de fonctions propres ayant les bonnes propriétés sur les deux bornes de l'intervalle. En s'inspirant de la forme des solutions préconisées par la séparation des variables, on développe une intégrale proche de la formulation de la transformation intégrale de Mehler-Fock.

Problème aux limites sur l'intervalle [0,$l_{\eta 0}$]

Revenons aux cas d'un intervalle fini du problème aux limites. La solution d'un problème aux limites de Dirichlet de la forme :

$$\Delta T(\eta,\theta) = 0 \quad (\eta,\theta) \in \{0 \le \eta \le l_{\eta 0}, 0 \le \theta < \theta_0\} \quad Lim_{\substack{\theta\to 0\\ \eta\to 0}} T(\eta,\theta) \quad finie$$

$$T(\eta,\theta)\big|_{\eta = l_{\eta 0}} = 0 \quad T(\eta,\theta)\big|_{\theta=\theta_0} = f(\eta)$$

est alors la suivante :

$$\Phi_{\tau_n}(\eta) = P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(Cosh(\eta)) \quad \|\Phi_{\tau_n}(\eta)\|^2 = \int_0^{l_{\eta 0}} d\eta\, Sinh(\eta)(\Phi_{\tau_n}(\eta))^2 \quad B_n = \int_0^{l_{\eta 0}} d\eta\, Sinh(\eta) f(\eta) P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(Cosh(\eta))$$

$$T(\eta,\theta) = \sum_{n\neq 0,+\infty} \frac{B_n}{\|\Phi_{\tau_n}(\eta)\|^2} P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(Cosh(\eta)) \frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(Cos(\theta))}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(\mu_0)} \qquad \mu_0 = Cos(\theta_0)$$

Comment calculer les normes de ces fonctions propres ? En revenant à un procédé classique de variation du paramètre, on peut tenter de trouver une expression de cette norme :

$$\frac{d}{dz}\left[(1-z^2)\frac{d}{dz}y_1(z)\right] - \frac{1+4\tau_1^{\,2}}{4}y_1(z) = 0 \quad \frac{d}{dz}\left[(1-z^2)\frac{d}{dz}y_2(z)\right] - \frac{1+4\tau_2^{\,2}}{4}y_1(z) = 0$$

$$\Rightarrow \left[(1-z^2)(y_2(z)y_1'(z) - y_1(z)y_2'(z))\right]_{z_1}^{z_2} + (\tau_2-\tau_1)(\tau_2+\tau_1)\int_{z_1}^{z_2} dz\, y_1(z)y_2(z) = 0$$

$$\tau_2 = \tau_1 + d\tau \quad y_2(z) \approx y_1(z) + d\tau\frac{\partial y_1(z)}{d\tau} \quad y_2'(z) \approx \frac{\partial y_1(z)}{\partial z} + d\tau\frac{\partial^2 y_1(z)}{d\tau\,\partial z}$$

$$\Rightarrow \int_{z_1}^{z_2} dz\,(y(z))^2 = \frac{1}{2\tau}\left[(z^2-1)\left(\frac{\partial y(z)}{\partial z}\frac{\partial y(z)}{d\tau} - y(z)\frac{\partial^2 y(z)}{d\tau\,\partial z}\right)\right]_{z_1}^{z_2}$$

Appliqué aux fonctions propres cela donne :

$$\Phi_{\tau_n}(\eta) = P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(Cosh(\eta)) \quad z = Cosh(\eta) \Rightarrow dz = Sinh(\eta)d\eta$$

$$\|\Phi_{\tau_n}(\eta)\|^2 = \int_0^{l_{\eta 0}} d\eta\, Sinh(\eta)\,(\Phi_{\tau_n}(\eta))^2 = \frac{1}{2\tau_n}\left[Sinh(\eta)\left(\frac{\partial\Phi_{\tau_n}(\eta)}{\partial\eta}\frac{\partial\Phi_{\tau_n}(\eta)}{d\tau} - \Phi_{\tau_n}(\eta)\frac{\partial^2\Phi_{\tau_n}(\eta)}{d\eta\,\partial z}\right)\right]_0^{l_{\eta 0}}.$$

Pour ce problème de Dirichlet c'est encore plus particulièrement :

$$\Phi_{\tau_n}(l_{\eta 0})=0 \Rightarrow \left\|\Phi_{\tau_n}(\eta)\right\|^2=\frac{1}{2\tau_n}Sinh(\eta)\frac{\partial\Phi_{\tau_n}(l_{\eta 0})}{\partial\eta}\frac{\partial\Phi_{\tau_n}(l_{\eta 0})}{d\tau} \quad Sinh(\eta)\frac{\partial\Phi_{\tau_n}(\eta)}{\partial\eta}=Sinh^2(\eta)\left[\frac{dP_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z)}{dz}\right]$$

$$\left.\begin{array}{l} z=Cosh(\eta) \\ z^2-1=Sinh^2(\eta)\end{array}\right\} \qquad \frac{dP_\nu(z)}{dz}=\frac{\nu}{z^2-1}\left(zP_\nu(z)-P_{\nu-1}(z)\right)\Rightarrow \frac{dP_\nu(z)}{dz}=-\frac{\nu}{z^2-1}P_{\nu-1}(z)\Leftarrow P_\nu(z)=0$$

$$\nu=-\frac{1}{2}+i\tau_n \Rightarrow Sinh^2(\eta)\frac{dP_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z)}{dz}=\left(-\frac{1}{2}+i\tau_n\right)\left[Cosh(\eta)P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(Cosh(\eta))-P_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(Cosh(\eta))\right]$$

$$\Rightarrow Sinh(l_{\eta 0})\frac{\partial\Phi_{\tau_n}(l_{\eta 0})}{\partial\eta}=\left(\frac{1}{2}-i\tau_n\right)P_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(Cosh(l_{\eta 0}))$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \left\|\Phi_{\tau_n}(\eta)\right\|^2=\frac{(1-2i\tau_n)}{4\tau_n}P_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(Cosh(l_{\eta 0}))\frac{\partial}{d\tau}P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(Cosh(l_{\eta 0})) \\ \left\{\left\|\Phi_{\tau_n}(\eta)\right\|^2=\frac{(1-2i\tau_n)}{4\tau_n}P_{\frac{1}{2}-i\tau_n}(Cosh(l_{\eta 0}))\frac{\partial}{d\tau}P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(Cosh(l_{\eta 0}))\right.\end{array}\right.$$

D'après la formule de dérivation, le produit suivant doit être réel :

$$\left(\frac{1}{2}-i\tau_n\right)P_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(Cosh(l_{\eta 0}))=\left(\frac{1}{2}-i\tau_n\right)P_{\frac{1}{2}-i\tau_n}(Cosh(l_{\eta 0}))$$

.

Il en est manifestement de même pour l'expression : $\frac{\partial}{d\tau}P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(Cosh(l_{\eta 0}))$

En effet pour la première expression, la formule de dérivation donne :

$$\left.\begin{array}{l} z=Cosh(l_{\eta 0}) \\ P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(l_{\eta 0})=0 \\ \nu=-\frac{1}{2}+i\tau_n\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\frac{dP_\nu(z)}{dz}\right|_{z=Cosh(l_{\eta 0})}=-\frac{\nu}{Sinh^2(l_{\eta 0})}P_{\nu-1}(Cosh(l_{\eta 0}))$$

$$On\ sait\ que\ P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z)\quad réel \Rightarrow \left.\frac{dP_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z)}{dz}\right|_{z=Cosh(l_{\eta 0})}\quad réel \Rightarrow \left(-\frac{1}{2}+i\tau_n\right)P_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(Cosh(l_{\eta 0}))\quad réel$$

$$Or\ P_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(Cosh(l_{\eta 0}))=P_{\frac{1}{2}-i\tau_n}(Cosh(l_{\eta 0}))\Rightarrow\left(\frac{1}{2}-i\tau_n\right)P_{\frac{1}{2}-i\tau_n}(Cosh(l_{\eta 0}))\quad réel$$

$$Au\ passage\quad \Rightarrow\left(\frac{1}{2}-i\tau_n\right)P_{\frac{1}{2}-i\tau_n}(z_0)=\left(\frac{1}{2}+i\tau_n\right)P_{\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_0)$$

Tout cela donne formellement la solution du problème pour une fonction limite constante, comme suit :

$$\Phi_{\tau_n}(\eta) = P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(Cosh(\eta)) \quad \left\|\Phi_{\tau_n}(\eta)\right\|^2 = \frac{1}{4\tau_n}(1-2i\tau_n)P_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(Cosh(l_{\eta 0}))\frac{\partial}{d\tau}P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(Cosh(l_{\eta 0}))$$

$$B_n = \int_0^{l_{\eta 0}} d\eta\ Sinh(\eta)f(\eta)P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(Cosh(\eta)) \quad \tau_n \quad tel\ que\ P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(Cosh(l_{\eta 0})) = 0$$

$$T(\eta,\theta) = \sum_{n\neq 0,+\infty} 4\tau_n B_n \frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(Cosh(\eta))}{(1-2i\tau_n)P_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(Cosh(l_{\eta 0}))\frac{\partial}{d\tau}P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(Cosh(l_{\eta 0}))}\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(Cos(\theta))}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(\mu_0)}$$

$$Si \quad f(\eta) = T_0 \Rightarrow B_n = T_0 \int_1^{Cosh(l_{\eta 0})} dz\ P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z) = \frac{2T_0}{1+2i\tau_n}\left[Cosh(\eta)P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(Cosh(\eta)) - P_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(Cosh(\eta))\right]_0^{l_{\eta 0}}$$

$$\Rightarrow B_n = T_0 \int_1^{Cosh(l_{\eta 0})} dz\ P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z) = -2T_0 \frac{P_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(Cosh(l_{\eta 0}))}{1+2i\tau_n}$$

$$T(\eta,\theta) = \sum_{n\neq 0,+\infty} \frac{B_n}{\left\|\Phi_{\tau_n}(\eta)\right\|^2} P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(Cosh(\eta))\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(Cos(\theta))}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(\mu_0)}$$

$$Or \quad \frac{B_n}{\left\|\Phi_{\tau_n}(\eta)\right\|^2} = \frac{-2T_0\dfrac{P_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(Cosh(l_{\eta 0}))}{1+2i\tau_n}}{\dfrac{1}{4\tau_n}(1-2i\tau_n)P_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(Cosh(l_{\eta 0}))\dfrac{\partial}{d\tau}P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(Cosh(l_{\eta 0}))}$$

$$\frac{B_n}{\left\|\Phi_{\tau_n}(\eta)\right\|^2} = -8T_0 \frac{\tau_n}{\left(1+4\tau_n{}^2\right)\dfrac{\partial}{d\tau}P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(Cosh(l_{\eta 0}))}$$

$$\Rightarrow T(\eta,\theta) = -8T_0 \sum_{n\neq 0,+\infty} \frac{\tau_n}{\left(1+4\tau_n{}^2\right)}\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(Cosh(\eta))}{\dfrac{\partial}{d\tau}P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(Cosh(l_{\eta 0}))}\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(Cos(\theta))}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(\mu_0)} \qquad \mu_0 = Cos(\theta_0)$$

.

<u>Pour un problème aux limites sur une section angulaire de la forme</u>

$$\Delta T(\eta,\theta)=0 \quad (\eta,\theta)\in\{0<\eta\le l_{\eta 0},\theta_1\le\theta<\theta_2\} \quad Lim_{\eta\to 0}T(\eta,\theta) \quad finie$$
$$T(\eta,\theta)\big|_{\eta=l_{\eta 0}}=0 \quad T(\eta,\theta)\big|_{\theta=\theta_1}=f_1(\eta) \quad T(\eta,\theta)\big|_{\theta=\theta_2}=f_2(\eta)$$

Les calculs sont tout à fait similaires aux problèmes précédents, avec des fonctions angulaires différentes. La solution générale est de la forme :

$$\Phi_{\tau_n}(\eta)=P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(Cosh(\eta)) \quad \left\|\Phi_{\tau_n}(\eta)\right\|^2=\int_0^{l_{\eta 0}}d\eta\ Sinh(\eta)\left(\Phi_{\tau_n}(\eta)\right)^2 \quad \mu_1=Cos(\theta_1) \qquad \mu_2=Cos(\theta_2)$$

$$\left\|\Phi_{\tau_n}(\eta)\right\|^2=\frac{1}{4\tau_n}(1-2i\tau_n)P_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}\left(Cosh(l_{\eta 0})\right)\frac{\partial}{d\tau}P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}\left(Cosh(l_{\eta 0})\right)$$

$$B_{1n}=\int_0^{l_{\eta 0}}d\eta\ Sinh(\eta)f_1(\eta)P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(Cosh(\eta)) \qquad B_{2n}=\int_0^{l_{\eta 0}}d\eta\ Sinh(\eta)f_2(\eta)P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(Cosh(\eta))$$

$$T(\eta,\theta)=\sum_{n\neq 0,+\infty}\frac{\left(B_{1n}\dfrac{\left\{\dfrac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(Cos(\theta))}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(\mu_2)}-\dfrac{Q^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(Cos(\theta))}{Q^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(\mu_2)}\right\}}{\left\{\dfrac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(\mu_1)}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(\mu_2)}-\dfrac{Q^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(\mu_1)}{Q^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(\mu_2)}\right\}}+B_{2n}\dfrac{\left\{\dfrac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(Cos(\theta))}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(\mu_1)}-\dfrac{Q^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(Cos(\theta))}{Q^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(\mu_1)}\right\}}{\left\{\dfrac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(\mu_2)}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(\mu_1)}-\dfrac{Q^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(\mu_2)}{Q^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(\mu_1)}\right\}}\right)}{\left\|\Phi_{\tau_n}(\eta)\right\|^2}P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(Cosh(\eta))$$

$$Comme \quad \left\{\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(\mu_2)}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(\mu_1)}-\frac{Q^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(\mu_2)}{Q^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(\mu_1)}\right\}=-\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(\mu_2)}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(\mu_1)}\frac{Q^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(\mu_2)}{Q^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(\mu_1)}\left\{\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(\mu_1)}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(\mu_2)}-\frac{Q^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(\mu_1)}{Q^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(\mu_2)}\right\}$$

$$T(\eta,\theta)=\sum_{n\neq 0,+\infty}\frac{\left(B_{1n}\left\{\dfrac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(Cos(\theta))}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(\mu_2)}-\dfrac{Q^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(Cos(\theta))}{Q^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(\mu_2)}\right\}-B_{2n}\dfrac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(\mu_1)}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(\mu_2)}\dfrac{Q^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(\mu_1)}{Q^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(\mu_2)}\left\{\dfrac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(Cos(\theta))}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(\mu_1)}-\dfrac{Q^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(Cos(\theta))}{Q^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(\mu_1)}\right\}\right)}{\left\|\Phi_{\tau_n}(\eta)\right\|^2\left\{\dfrac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(\mu_1)}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(\mu_2)}-\dfrac{Q^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(\mu_1)}{Q^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(\mu_2)}\right\}}P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(Cosh(\eta))$$

Pour le problème avec les fonctions limites constantes $T(\eta,\theta)\big|_{\theta=\theta_1}=T_1 \quad T(\eta,\theta)\big|_{\theta=\theta_2}=T_2$*, il vient les coefficients* B_n*,* C_n *et la solution du problème :*

$$\text{Du problème précédent}\quad \begin{cases} \dfrac{B_{1n}}{\left\|\Phi_{\tau_n}(\eta)\right\|^2}=-8T_1\dfrac{\tau_n}{\left(1+4\tau_n{}^2\right)\dfrac{\partial}{d\tau}P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}\left(Cosh\left(l_{\eta 0}\right)\right)} \\[2ex] \dfrac{B_{2n}}{\left\|\Phi_{\tau_n}(\eta)\right\|^2}=-8T_2\dfrac{\tau_n}{\left(1+4\tau_n{}^2\right)\dfrac{\partial}{d\tau}P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}\left(Cosh\left(l_{\eta 0}\right)\right)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow T(\eta,\theta)=-8\sum_{n\neq 0,+\infty}\left[\begin{array}{l} \dfrac{\tau_n}{\left(1+4\tau_n{}^2\right)\dfrac{\partial}{d\tau}P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}\left(Cosh\left(l_{\eta 0}\right)\right)}\times\dfrac{1}{\left\{\dfrac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(\mu_1)}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(\mu_2)}-\dfrac{Q^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(\mu_1)}{Q^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(\mu_2)}\right\}}P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}\left(Cosh(\eta)\right)\times \\ \times\left(\begin{array}{l} T_1\left\{\dfrac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}\left(Cos(\theta)\right)}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(\mu_2)}-\dfrac{Q^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}\left(Cos(\theta)\right)}{Q^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(\mu_2)}\right\}- \\ -T_2\dfrac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(\mu_1)}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(\mu_2)}\dfrac{Q^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(\mu_1)}{Q^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(\mu_2)}\left\{\dfrac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}\left(Cos(\theta)\right)}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(\mu_1)}-\dfrac{Q^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}\left(Cos(\theta)\right)}{Q^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(\mu_1)}\right\} \end{array}\right) \end{array}\right].$$

<u>*Problème aux limites sur l'intervalle* $[l_{\eta 1},l_{\eta 2}]$</u>

La solution d'un problème aux limites de Dirichlet de la forme :

$$\Delta T(\eta,\theta)=0 \quad (\eta,\theta)\in\left\{l_{\eta 1}\le\eta\le l_{\eta 2},0\le\theta<\theta_0\right\} \quad Lim_{\theta\to 0}T(\eta,\theta) \quad finie$$

$$T(\eta,\theta)\big|_{\eta=l_{\eta 1}}=0 \quad T(\eta,\theta)\big|_{\eta=l_{\eta 2}}=0 \quad T(\eta,\theta)\big|_{\theta=\theta_0}=f(\eta)$$

est alors la suivante :

$$\Phi_{\tau_n}(\eta)=\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}\left(Cosh(\eta)\right)}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}\left(Cosh\left(l_{\eta 1}\right)\right)}-\frac{\widetilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}\left(Cosh(\eta)\right)}{\widetilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}\left(Cosh\left(l_{\eta 1}\right)\right)} \quad \left\|\Phi_{\tau_n}(\eta)\right\|^2=\int_{l_{\eta 1}}^{l_{\eta 2}}d\eta\ Sinh(\eta)\left(\Phi_{\tau_n}(\eta)\right)^2$$

$$B_n=\int_{l_{\eta 1}}^{l_{\eta 2}}d\eta\ Sinh(\eta)f(\eta)P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}\left(Cosh(\eta)\right) \quad C_n=\int_{l_{\eta 1}}^{l_{\eta 2}}d\eta\ Sinh(\eta)f(\eta)\widetilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}\left(Cosh(\eta)\right)$$

$$\tau_n \quad tel\ que \quad P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}\left(Cosh\left(l_{\eta 2}\right)\right)\widetilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}\left(Cosh\left(l_{\eta 1}\right)\right)=P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}\left(Cosh\left(l_{\eta 1}\right)\right)\widetilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}\left(Cosh\left(l_{\eta 2}\right)\right)$$

$$T(\eta,\theta)=\sum_{n\neq 0,+\infty}\frac{\left(\dfrac{B_n}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}\left(Cosh\left(l_{\eta 1}\right)\right)}-\dfrac{C_n}{\widetilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}\left(Cosh\left(l_{\eta 1}\right)\right)}\right)}{\left\|\Phi_{\tau_n}(\eta)\right\|^2}\Phi_{\tau_n}(\eta)\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}\left(Cos(\theta)\right)}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(\mu_0)}.$$

En revenant à un procédé classique de variation du paramètre, on peut tenter de trouver une expression de cette norme :

$$\frac{d}{dz}\left[\left(1-z^2\right)\frac{d}{dz}y_1(z)\right]-\frac{1+4\tau_1{}^2}{4}y_1(z)=0 \quad \frac{d}{dz}\left[\left(1-z^2\right)\frac{d}{dz}y_2(z)\right]-\frac{1+4\tau_2{}^2}{4}y_1(z)=0$$

$$\Rightarrow \left[\left(1-z^2\right)\left(y_2(z)y_1'(z)-y_1(z)y_2'(z)\right)\right]_{z_1}^{z_2}+\left(\tau_2-\tau_1\right)\left(\tau_2+\tau_1\right)\int_{z_1}^{z_2}dz\; y_1(z)y_2(z)=0$$

$$\tau_2=\tau_1+d\tau \quad y_2(z)\approx y_1(z)+d\tau\frac{\partial y_1(z)}{d\tau} \quad y_2'(z)\approx\frac{\partial y_1(z)}{\partial z}+d\tau\frac{\partial^2 y_1(z)}{d\tau\,\partial z}$$

$$\Rightarrow \int_{z_1}^{z_2}dz\;\left(y(z)\right)^2=\frac{1}{2\tau}\left[\left(z^2-1\right)\left(\frac{\partial y(z)}{\partial z}\frac{\partial y(z)}{d\tau}-y(z)\frac{\partial^2 y(z)}{d\tau\,\partial z}\right)\right]_{z_1}^{z_2}$$

Appliqué aux fonctions propres cela donne :

$$\Phi_{\tau_n}(\eta)=\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}\left(Cosh(\eta)\right)}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}\left(Cosh\left(l_{\eta 1}\right)\right)}-\frac{\widetilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}\left(Cosh(\eta)\right)}{\widetilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}\left(Cosh\left(l_{\eta 1}\right)\right)}$$

$$z=Cosh(\eta)\Rightarrow dz=Sinh(\eta)d\eta$$

$$\left\|\Phi_{\tau_n}(\eta)\right\|^2=\int_{z_1}^{z_2}d\eta\;Sinh(\eta)\left(\Phi_{\tau_n}(\eta)\right)^2=\frac{1}{2\tau}\left[Sinh(\eta)\left(\frac{\partial\Phi_{\tau_n}(\eta)}{\partial\eta}\frac{\partial\Phi_{\tau_n}(\eta)}{d\tau}-\Phi_{\tau_n}(\eta)\frac{\partial^2\Phi_{\tau_n}(\eta)}{d\eta\,\partial z}\right)\right]_{l_{\eta 1}}^{l_{\eta 2}}.$$

Pour ce problème de Dirichlet c'est encore plus particulièrement :

$$z_1 = Cosh(l_{\eta 1}) \quad z_2 = Cosh(l_{\eta 2}) \quad \Phi_{\tau_n}(\eta) = \frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(Cosh(\eta))}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)} - \frac{\widetilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(Cosh(\eta))}{\widetilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)}$$

$$\Phi_{\tau_n}(l_{\eta 1}) = \Phi_{\tau_n}(l_{\eta 2}) = 0 \Rightarrow \left\|\Phi_{\tau_n}(\eta)\right\|^2 = \frac{1}{2\tau_n}\left[Sinh(\eta)\frac{\partial \Phi_{\tau_n}(\eta)}{\partial \eta}\frac{\partial \Phi_{\tau_n}(\eta)}{d\tau}\right]_{l_{\eta 1}}^{l_{\eta 2}}$$

$$z = Cosh(\eta) \Rightarrow Sinh(\eta)\frac{\partial \Phi_{\tau_n}(\eta)}{\partial \eta} = Sinh^2(\eta)\mathrm{Re}\left[\frac{\dfrac{\partial P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z)}{\partial z}}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)} - \frac{\dfrac{\partial Q_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z)}{\partial z}}{\widetilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)}\right]$$

$$Sinh^2(\eta)\mathrm{Re}\left[\frac{d\begin{Bmatrix}P\\Q\end{Bmatrix}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z)}{dz}\right] = \mathrm{Re}\left[\left(-\frac{1}{2}+i\tau_n\right)\left[z\begin{Bmatrix}P\\Q\end{Bmatrix}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z) - \begin{Bmatrix}P\\Q\end{Bmatrix}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z)\right]\right]$$

$$Sinh(\eta)\frac{\partial \Phi_{\tau_n}(\eta)}{\partial \eta}\bigg|_{\substack{\eta=l_{\eta 1}\\ \eta=l_{\eta 2}}} = \mathrm{Re}\left[\left(-\frac{1}{2}+i\tau_n\right)\left\{\begin{array}{l} z\dfrac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z)}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)} - z\dfrac{\widetilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z) + iQ^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z)}{\widetilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)} \\ + \dfrac{\widetilde{Q}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z) + iQ^{imag}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z)}{\widetilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)} - \dfrac{\widetilde{P}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z) + iP^{imag}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z)}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)} \end{array}\right\}\bigg|_{\substack{\eta=l_{\eta 1}\\ \eta=l_{\eta 2}}}\right]$$

$$Sinh(\eta)\frac{\partial \Phi_{\tau_n}(\eta)}{\partial \eta}\bigg|_{\substack{\eta=l_{\eta 1}\\ \eta=l_{\eta 2}}} = \mathrm{Re}\left[\left(-\frac{1}{2}+i\tau_n\right)\left\{\begin{array}{l} z\dfrac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z)}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)} - z\dfrac{\widetilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z)}{\widetilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)} + \dfrac{\widetilde{Q}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z)}{\widetilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)} - \dfrac{\widetilde{P}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z)}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)} \\ -i\left(z\dfrac{Q^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z)}{\widetilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)} - \dfrac{Q^{imag}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z)}{\widetilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)} + \dfrac{P^{imag}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z)}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)}\right) \end{array}\right\}\bigg|_{\substack{\eta=l_{\eta 1}\\ \eta=l_{\eta 2}}}\right].$$

Pour obtenir l'expression de la norme :

$$Sinh(\eta)\frac{\partial\Phi_{\tau_n}(\eta)}{\partial\eta}\Bigg|_{\substack{\eta=l_{\eta1}\\ \eta=l_{\eta2}}}=\left\{\begin{array}{l}-\frac{1}{2}\left\{z\left(\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z)}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)}-\frac{\widetilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z)}{\widetilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)}\right)+\frac{\widetilde{Q}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z)}{\widetilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)}-\frac{\widetilde{P}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z)}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)}\right\}+\\ +\tau_n\left\{z\frac{Q^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z)}{\widetilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)}-\frac{Q^{imag}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z)}{\widetilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)}+\frac{P^{imag}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z)}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)}\right\}\Bigg|\Bigg|_{\substack{z=z_1\\ z=z_2}}\end{array}\right\}$$

$$Sinh(\eta)\frac{\partial\Phi_{\tau_n}(\eta)}{\partial\eta}\Bigg|_{\substack{\eta=l_{\eta1}\\ \eta=l_{\eta2}}}=\left\{\frac{1}{2}\left\{\frac{\widetilde{P}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z)}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)}-\frac{\widetilde{Q}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z)}{\widetilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)}\right\}+\tau_n\left\{z\frac{Q^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z)}{\widetilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)}-\frac{Q^{imag}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z)}{\widetilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)}+\frac{P^{imag}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z)}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)}\right\}\Bigg|\Bigg|_{\substack{z=z_1\\ z=z_2}}\right\}$$

$$\left\|\Phi_{\tau_n}(\eta)\right\|^2=\frac{1}{2\tau_n}\left[\begin{array}{l}\frac{\partial\Phi_{\tau_n}(l_{\eta2})}{d\tau}\left[\frac{1}{2}\left\{\frac{\widetilde{P}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_2)}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)}-\frac{\widetilde{Q}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_2)}{\widetilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)}\right\}+\tau_n\left\{z_2\frac{Q^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_2)}{\widetilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)}-\frac{Q^{imag}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_2)}{\widetilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)}+\frac{P^{imag}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_2)}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)}\right\}\right]-\\ -\frac{\partial\Phi_{\tau_n}(l_{\eta1})}{d\tau}\left[\frac{1}{2}\left\{\frac{\widetilde{P}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_1)}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)}-\frac{\widetilde{Q}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_1)}{\widetilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)}\right\}+\tau_n\left\{z_1\frac{Q^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)}{\widetilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)}-\frac{Q^{imag}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_1)}{\widetilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)}+\frac{P^{imag}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_1)}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)}\right\}\right]\end{array}\right]$$

$$avec\qquad \frac{\partial\Phi_{\tau_n}(l_{\eta2})}{d\tau}=\frac{\frac{\partial P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_2)}{d\tau}}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)}-\frac{\frac{\partial\widetilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_2)}{d\tau}}{\widetilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)}\qquad \frac{\partial\Phi_{\tau_n}(l_{\eta1})}{d\tau}=\frac{\frac{\partial P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)}{d\tau}}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)}-\frac{\frac{\partial\widetilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)}{d\tau}}{\widetilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)}$$

.

Le calcul des coefficients B_n et C_n, donnant F_n est le suivant, lorsque la fonction limite est constante égale à T_0 :

$$B_n = \int_{l_{\eta 1}}^{l_{\eta 2}} d\eta\, Sinh(\eta)\, P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(Cosh(\eta)) = \int_{z_1=Cosh(l_{\eta 1})}^{z_2=Cosh(l_{\eta 2})} dz\, P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z)$$

$$C_n = \int_{l_{\eta 1}}^{l_{\eta 2}} d\eta\, Sinh(\eta)\, \widetilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(Cosh(\eta)) = \int_{Cosh(l_{\eta 1})}^{Cosh(l_{\eta 2})} dz\, \widetilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z) = \mathrm{Re}\left(\int_{z_1=Cosh(l_{\eta 1})}^{z_2=Cosh(l_{\eta 2})} dz\, Q_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z) \right)$$

$$\int_{z_1}^{z_2} dz\, P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z) = \frac{1}{\frac{1}{2}+i\tau_n}\left[zP_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z) - P_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z) \right]_{z_1}^{z_2} \qquad \int_{z_1}^{z_2} dz\, Q_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z) = \frac{1}{\frac{1}{2}+i\tau_n}\left[zQ_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z) - Q_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z) \right]_{z_1}^{z_2}$$

$$B_n = \mathrm{Re}\left[\frac{1}{\frac{1}{2}+i\tau_n}\left[zP_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z) - P_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z) \right]_{z_1}^{z_2} \right] \qquad C_n = \mathrm{Re}\left[\frac{1}{\frac{1}{2}+i\tau_n}\left[zQ_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z) - Q_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z) \right]_{z_1}^{z_2} \right]$$

$$\frac{B_n}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)} - \frac{C_n}{\widetilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)} = \frac{B_n \widetilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1) - C_n P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)\widetilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)} = \frac{F_n}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)\widetilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)}$$

$$F_n = \mathrm{Re}\left[\frac{1}{\frac{1}{2}+i\tau_n}\left[z\widetilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z) - \widetilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)P_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z) - zP_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)Q_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z) + P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)Q_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z) \right]_{z_1}^{z_2} \right]$$

$$= \mathrm{Re}\left[\frac{1}{\frac{1}{2}+i\tau_n}\left[z\left(\widetilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z) - P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)Q_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z) \right) - \widetilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)P_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z) + P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)Q_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z) \right]_{z_1}^{z_2} \right]$$

$$= \mathrm{Re}\left[\frac{1}{\frac{1}{2}+i\tau_n}\left[\begin{array}{l} z\left(\widetilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z) - P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)\widetilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z) - i\, P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)Q^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z) \right) - \\ -\widetilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)\widetilde{P}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z) - i\widetilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)P^{imag}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z) + P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)\widetilde{Q}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z) + iP_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)Q^{imag}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z) \end{array} \right]_{z_1}^{z_2} \right]$$

$$Comme \quad \left[z\left(\widetilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z) - P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)\widetilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z) \right) \right]_{z_1}^{z_2} = 0$$

$$F_n = \mathrm{Re}\left[\frac{2(1-2i\tau_n)}{1+4\tau_n^{\,2}} \left[\begin{array}{l} iP_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)Q^{imag}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z) - i\, z\, P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)Q^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z) - i\widetilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)P^{imag}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z) + \\ + P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)\widetilde{Q}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z) - \widetilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)\widetilde{P}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z) \end{array} \right]_{z_1}^{z_2} \right]$$

$$F_n = \frac{2}{1+4\tau_n^{\,2}} \left\{ \begin{array}{l} P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)\widetilde{Q}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_2) - \widetilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)P_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_2) - P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)\widetilde{Q}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_1) + \widetilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)P_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_1) + \\ + 2\tau_n \left(\begin{array}{l} P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)Q^{imag}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_2) - P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)Q^{imag}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_1) + \\ + \widetilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)P^{imag}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_1) - \widetilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)P^{imag}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_2) + \\ + z_1 P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)Q^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1) - z_2 P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)Q^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_2) \end{array} \right) \end{array} \right\}$$

.

Ce qui donne formellement la solution du problème aux limites pour une fonction limite constante T_0, comme suit :

$$z_1 = Cosh(l_{\eta 1}) \quad z_2 = Cosh(l_{\eta 2}) \quad \mu_0 = Cos(\theta_0) \qquad \Phi_{\tau_n}(\eta) = \frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(Cosh(\eta))}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)} - \frac{\widetilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(Cosh(\eta))}{\widetilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)}$$

$$\tau_n \quad tel\ que \quad P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_2)\widetilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1) = P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)\widetilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_2)$$

$$\left\|\Phi_{\tau_n}(\eta)\right\|^2 = \int_{z_1}^{z_2} d\eta\, Sinh(\eta)\left(\Phi_{\tau_n}(\eta)\right)^2 \quad ou\ bien$$

$$\left\|\Phi_{\tau_n}(\eta)\right\|^2 = \frac{1}{2\tau_n}\left[\begin{array}{l} \dfrac{\partial\Phi_{\tau_n}(l_{\eta 2})}{d\tau}\left[\dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{P_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_2)}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)} - \dfrac{\widetilde{Q}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_2)}{\widetilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)}\right\} + \tau_n\left\{z_2\dfrac{Q^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_2)}{\widetilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)} - \dfrac{Q^{imag}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_2)}{\widetilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)} + \dfrac{P^{imag}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_2)}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)}\right\}\right] - \\ -\dfrac{\partial\Phi_{\tau_n}(l_{\eta 1})}{d\tau}\left[\dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{P_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_1)}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)} - \dfrac{\widetilde{Q}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_1)}{\widetilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)}\right\} + \tau_n\left\{z_1\dfrac{Q^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)}{\widetilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)} - \dfrac{Q^{imag}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_1)}{\widetilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)} + \dfrac{P^{imag}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_1)}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)}\right\}\right] \end{array}\right]$$

$$avec \qquad \frac{\partial\Phi_{\tau_n}(l_{\eta 2})}{d\tau} = \frac{\dfrac{\partial P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_2)}{d\tau}}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)} - \frac{\dfrac{\partial\widetilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_2)}{d\tau}}{\widetilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)} \qquad \frac{\partial\Phi_{\tau_n}(l_{\eta 1})}{d\tau} = \frac{\dfrac{\partial P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)}{d\tau}}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)} - \frac{\dfrac{\partial\widetilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)}{d\tau}}{\widetilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)}$$

$$F_n = \frac{2T_0}{1+4\tau_n{}^2}\left\{\begin{array}{l} P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)\widetilde{Q}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_2) - \widetilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)P_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_2) - P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)\widetilde{Q}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_1) + \widetilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)P_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_1) + \\ +2\tau_n\left(\begin{array}{l} P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)Q^{imag}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_2) - P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)Q^{imag}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_1) + \\ +\widetilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)P^{imag}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_1) - \widetilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)P^{imag}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_2) + \\ +z_1P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)Q^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1) - z_2P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)Q^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_2) \end{array}\right) \end{array}\right\}$$

$$T(\eta,\theta) = \sum_{n\neq 0,+\infty}\frac{F_n}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)\widetilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)}\left(\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(Cosh(\eta))}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)} - \frac{\widetilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(Cosh(\eta))}{\widetilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)}\right)\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(Cos(\theta))}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(\mu_0)}$$

<u>Pour un problème aux limites sur une section angulaire de la forme</u>

$$\Delta T(\eta,\theta)=0 \quad (\eta,\theta)\in\{0<l_{\eta 1}\le\eta\le l_{\eta 2},\theta_1\le\theta<\theta_2\} \quad Lim_{\eta\to 0}T(\eta,\theta) \quad finie$$
$$T(\eta,\theta)\big|_{\eta=l_{\eta 1}}=T(\eta,\theta)\big|_{\eta=l_{\eta 2}}=0 \quad T(\eta,\theta)\big|_{\theta=\theta_1}=f_1(\eta) \quad T(\eta,\theta)\big|_{\theta=\theta_2}=f_2(\eta)$$

Les calculs sont tout à fait similaires aux problèmes précédents, avec des fonctions angulaires différentes. La solution générale est de la forme :

$$\Phi_{\tau_n}(\eta)=\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(Cosh(\eta))}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)}-\frac{\widetilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(Cosh(\eta))}{\widetilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)} \qquad \left\|\Phi_{\tau_n}(\eta)\right\|^2=\int_0^{l_{\eta 0}}d\eta\ Sinh(\eta)\left(\Phi_{\tau_n}(\eta)\right)^2$$

$$\begin{Bmatrix}B_{1n}\\B_{2n}\end{Bmatrix}=\int_{l_{\eta 1}}^{l_{\eta 2}}d\eta\ Sinh(\eta)\begin{Bmatrix}f_1(\eta)\\f_2(\eta)\end{Bmatrix}\left(P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(Cosh(\eta))\widetilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)-\widetilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(Cosh(\eta))P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)\right)$$

$$\mu_1=Cos(\theta_1) \quad \mu_2=Cos(\theta_2) \quad z_1=Cosh(l_{\eta 1}) \quad z_2=Cosh(l_{\eta 2})$$

$$T(\eta,\theta)=\sum_{n\neq 0,+\infty}\left\{\frac{\left(B_{1n}\left\{\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(Cos(\theta))}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(\mu_2)}-\frac{Q^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(Cos(\theta))}{Q^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(\mu_2)}\right\}-B_{2n}\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(\mu_1)}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(\mu_2)}\frac{Q^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(\mu_1)}{Q^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(\mu_2)}\left\{\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(Cos(\theta))}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(\mu_1)}-\frac{Q^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(Cos(\theta))}{Q^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(\mu_1)}\right\}\right)}{\left\|\Phi_{\tau_n}(\eta)\right\|^2P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)\widetilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)\left\{\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(\mu_1)}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(\mu_2)}-\frac{Q^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(\mu_1)}{Q^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(\mu_2)}\right\}}\times\right.$$
$$\left.\times\left(\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(Cosh(\eta))}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)}-\frac{\widetilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(Cosh(\eta))}{\widetilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)}\right)\right\}.$$

Les coefficients B_{1n} et B_{2n} et la norme sont calculés de manière équivalente à l'exemple précédent, lorsque les deux fonctions limites sont constantes, à savoir :

$$\left\|\Phi_{\tau_n}(\eta)\right\|^2 = \frac{1}{2\tau_n}\left[\begin{array}{l} \dfrac{\partial\Phi_{\tau_n}(l_{\eta 2})}{d\tau}\left[\dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{P_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_2)}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)} - \dfrac{\widetilde{Q}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_2)}{\widetilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)}\right\} + \tau_n\left\{z_2\dfrac{Q^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_2)}{\widetilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)} - \dfrac{Q^{imag}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_2)}{\widetilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)} + \dfrac{P^{imag}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_2)}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)}\right\}\right] - \\ -\dfrac{\partial\Phi_{\tau_n}(l_{\eta 1})}{d\tau}\left[\dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{P_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_1)}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)} - \dfrac{\widetilde{Q}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_1)}{\widetilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)}\right\} + \tau_n\left\{z_1\dfrac{Q^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)}{\widetilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)} - \dfrac{Q^{imag}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_1)}{\widetilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)} + \dfrac{P^{imag}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_1)}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)}\right\}\right] \end{array}\right]$$

$$avec \qquad \frac{\partial\Phi_{\tau_n}(l_{\eta 2})}{d\tau} = \frac{\dfrac{\partial P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_2)}{d\tau}}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)} - \frac{\dfrac{\partial\widetilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_2)}{d\tau}}{\widetilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)} \qquad \frac{\partial\Phi_{\tau_n}(l_{\eta 1})}{d\tau} = \frac{\dfrac{\partial P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)}{d\tau}}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)} - \frac{\dfrac{\partial\widetilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)}{d\tau}}{\widetilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)}$$

$$\begin{Bmatrix} B_{1n} \\ B_{2n} \end{Bmatrix} = \frac{2\begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix}}{1+4\tau_n^{\,2}}\left\{\begin{array}{l} P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)\widetilde{Q}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_2) - \widetilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)P_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_2) - P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)\widetilde{Q}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_1) + \widetilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)P_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_1) + \\ +2\tau_n\left(\begin{array}{l} P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)Q^{imag}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_2) - P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)Q^{imag}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_1) + \\ +\widetilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)P^{imag}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_1) - \widetilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)P^{imag}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_2) + \\ +z_1P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)Q^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1) - z_2P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)Q^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_2) \end{array}\right) \end{array}\right\}$$

Ce qui donne la solution :

$$\Phi_{\tau_n}(\eta)=\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(Cosh(\eta))}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)}-\frac{\widetilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(Cosh(\eta))}{\widetilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)}\qquad \left\|\Phi_{\tau_n}(\eta)\right\|^2=\int_0^{l_{\eta 0}}d\eta\ Sinh(\eta)\left(\Phi_{\tau_n}(\eta)\right)^2\quad ou\ bien$$

$$\frac{\partial\Phi_{\tau_n}(l_{\eta 2})}{d\tau}=\frac{\frac{\partial P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_2)}{d\tau}}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)}-\frac{\frac{\partial\widetilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_2)}{d\tau}}{\widetilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)}\qquad \frac{\partial\Phi_{\tau_n}(l_{\eta 1})}{d\tau}=\frac{\frac{\partial P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)}{d\tau}}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)}-\frac{\frac{\partial\widetilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)}{d\tau}}{\widetilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)}$$

$$\left\|\Phi_{\tau_n}(\eta)\right\|^2=\frac{1}{2\tau_n}\left[\begin{array}{l}\frac{\partial\Phi_{\tau_n}(l_{\eta 2})}{d\tau}\left[\frac{1}{2}\left\{\frac{P_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_2)}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)}-\frac{\widetilde{Q}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_2)}{\widetilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)}\right\}+\tau_n\left\{z_2\frac{Q^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_2)}{\widetilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)}-\frac{Q^{imag}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_2)}{\widetilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)}+\frac{P^{imag}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_2)}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)}\right\}\right]-\\ -\frac{\partial\Phi_{\tau_n}(l_{\eta 1})}{d\tau}\left[\frac{1}{2}\left\{\frac{P_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_1)}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)}-\frac{\widetilde{Q}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_1)}{\widetilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)}\right\}+\tau_n\left\{z_1\frac{Q^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)}{\widetilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)}-\frac{Q^{imag}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_1)}{\widetilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)}+\frac{P^{imag}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_1)}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)}\right\}\right]\end{array}\right]$$

$$\mu_1=Cos(\theta_1)\quad \mu_2=Cos(\theta_2)\quad z_1=Cosh(l_{\eta 1})\quad z_2=Cosh(l_{\eta 2})$$

$$B_n=\left\{\begin{array}{l}P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)\widetilde{Q}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_2)-\widetilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)P_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_2)-P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)\widetilde{Q}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_1)+\widetilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)P_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_1)+\\ +2\tau_n\left(\begin{array}{l}P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)Q^{imag}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_2)-P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)Q^{imag}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_1)+\\ +\widetilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)P^{imag}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_1)-\widetilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)P^{imag}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_2)+\\ +z_1P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)Q^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)-z_2P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)Q^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_2)\end{array}\right)\end{array}\right\}$$

$$T(\eta,\theta)=2\sum_{n\neq 0,+\infty}\frac{B_n}{1+4\tau_n{}^2}\left\{\begin{array}{l}\frac{\left(\begin{array}{l}T_1\left\{\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(Cos(\theta))}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(\mu_2)}-\frac{Q^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(Cos(\theta))}{Q^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(\mu_2)}\right\}-\\ -T_2\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(\mu_1)}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(\mu_2)}\frac{Q^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(\mu_1)}{Q^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(\mu_2)}\left\{\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(Cos(\theta))}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(\mu_1)}-\frac{Q^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(Cos(\theta))}{Q^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(\mu_1)}\right\}\end{array}\right)}{\left\|\Phi_{\tau_n}(\eta)\right\|^2P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)\widetilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)\left\{\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(\mu_1)}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(\mu_2)}-\frac{Q^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(\mu_1)}{Q^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(\mu_2)}\right\}}\times\\ \times\left(\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(Cosh(\eta))}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)}-\frac{\widetilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(Cosh(\eta))}{\widetilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)}\right)\end{array}\right\}$$

.

Problème aux limites sur l'intervalle [$l_{\eta 0}$,+∞]

La solution d'un problème aux limites de Dirichlet de la forme :

$$\Delta T(\eta,\theta)=0 \quad (\eta,\theta)\in\{l_{\eta 0}\le\eta<+\infty, 0\le\theta<\theta_0\} \quad Lim_{\substack{\theta\to 0\\ ou\\ \eta\to\infty}} T(\eta,\theta) \quad finie$$

$$T(\eta,\theta)\big|_{\eta=l_{\eta 0}}=0 \quad T(\eta,\theta)\big|_{\theta=\theta_0}=f(\eta)$$

est construite à partir d'une représentation intégrale de type de Mehler-Fock (voir plus loin).

Problème aux limites sur l'intervalle η€[0,+∞], z=Cosh(η)->z€[z0=1,+∞]

La solution d'un problème aux limites de Dirichlet de la forme :

$$\Delta T(\eta,\theta)=0 \quad (\eta,\theta)\in\{0\le\eta<+\infty \quad , \quad 0\le\theta<\theta_0\} \quad Lim_{\substack{\theta\to 0\\ ou\\ \eta\to\infty\\ ou\\ \eta\to 0}} T(\eta,\theta) \quad finie$$

$$T(\eta,\theta)\big|_{\theta=\theta_0}=f(\eta)$$

est construite à partir d'une représentation intégrale de type de Mehler-Fock (voir plus loin).

Représentation intégrale des solutions d'un problème aux limites inhomogène angulaire sur l'hyperboloïde de révolution à deux nappes infini

On a vu qu'il n'est pas possible de développer en série de fonctions propres la solution d'un problème inhomogène en dimension angulaire, soit sur un hyperboloïde à deux nappes complet, soit entre [0,+∞[ou [η_0,+∞[. En revanche, il est possible de tenter une représentation intégrale de la solution par construction d'après les fonctions issues de la séparation des variables. Propre à ce type de problème et en raison de la condition de finitude de la solution à l'origine des variables sphéroïdales, il vient par exemple pour un problème de Dirichlet :

$$\Delta T(\eta,\theta)=0 \quad (\eta,\theta)\in\{0\le\eta\le\infty, 0\le\theta<\theta_0\}$$

$$Lim_{\theta\to 0}T(\eta,\theta) \quad finie \quad Lim_{\eta\to 0}T(\eta,\theta) \quad finie \quad Lim_{\eta\to\infty}T(\eta,\theta) \quad finie$$

$$T(\eta,\theta)\big|_{\theta=\theta_0}=f(\eta)$$

Une construction de la solution du type :

$$T(\eta,\theta)=\int_0^{+\infty} d\tau\, g(\tau)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta))P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\theta)).$$

Rapportée à la condition aux limites, on écrirait :

$$T(\eta,\theta)=\int_0^{+\infty} d\tau\, F(\tau)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta))\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\theta))}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\theta_0))}.$$

Une telle construction est rendue possible grâce au théorème de Mehler-Fock qui introduit une transformation intégrale du même nom.

Théorème de Mehler-Fock et transformation intégrale de Mehler-Fock

Toute fonction f(η) peut se représenter sous la forme d'une double intégrale :

$$f(\eta)=\int_0^{+\infty} d\tau\, P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta))\,\tau\, Tanh(\pi\tau)\int_0^{+\infty} d\varsigma\, Sinh(\varsigma)f(\varsigma)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\varsigma))$$

On écrit donc la « transformée de Mehler Fock» comme l'intégrale qui suit :

$$F(\tau)=\tau\, Tanh(\pi\tau)\int_0^{+\infty} d\eta\, Sinh(\eta)f(\eta)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta)).$$

Et la transformée inverse de Mehler Fock comme suit :

$$f(\eta)=\int_0^{+\infty} d\tau\, P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta))\,F(\tau)$$

Sous les conditions suivantes des fonctions f(x) (ou η, x=Cosh(η)):

- la fonction f(x), x€[1,+∞] doit être continue par morceau, et bornée dans chaque sous-intervalle [x1,x2] de l'intervalle d'intégration [1,+∞] (ou [0,+∞] dans la variable η)
- les intégrales suivantes doivent être définies : $\int_0^a dx|f(x)|(x-1)^{\frac{3}{4}} \quad et \quad \int_a^{+\infty} dx|f(x)|(x)^{-\frac{1}{2}}Log(x).$

quelque soit la valeur a > 1 pris dans l'intervalle d'intégration.

- les deux conditions impliquent que la fonction est continue sur tout intervalle [0,a] pour a fini, qu'elle doit s'annuler à l'infini comme $e^{-x(½+ε)}$avec ε>0.

Si la fonction f possède une discontinuité à la valeur η au point de discontinuité, on écrira :

$$\frac{f(\eta+0)+f(\eta-0)}{2}=\int_0^{+\infty}d\tau\,\tau\,Tanh(\pi\tau)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta))\int_0^{+\infty}d\varsigma\,Sinh(\varsigma)f(\varsigma)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\varsigma))$$

$$\Leftrightarrow\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\int_0^{+\infty}d\tau\,\tau\,Tanh(\pi\tau)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)\int_1^{+\infty}dy\,f(y)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(y)\Leftarrow y=Cosh(\varsigma)$$

Une formulation équivalente s'obtient si dans la transformée de Mehler-Fock on change de variable d'intégration en posant x=Cosh(η), comme suit :

$$\begin{cases} f(x)=\int_0^{+\infty}d\tau\,F(\tau)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x) \\ \underbrace{\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\int_0^{+\infty}d\tau\,F(\tau)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)}_{Transformée\ inverse\ de\ Mehler-Fock} \end{cases} \quad et \quad \underbrace{F(\tau)=\tau\,Tanh(\pi\tau)\int_1^{+\infty}dx\;f(x)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)}_{Transformée\ de\ Mehler-Fock}.$$

Conditions sur les intégrales suivantes devant être finies pour un réel a > 1

$$\int_1^a dx|f(x)| \quad et \quad \int_a^{+\infty}dx|f(x)|(x)^{-\frac{1}{2}}Log(x)$$

<u>*Transformation intégrale de Mehler-Fock d'ordre supérieur*</u>

Plusieurs transformations intégrales ont reçu le vocable de « généralisation » de la transformation de Mehler-Fock. Celle présentée ici est tout simplement la généralisation aux cas de problèmes aux limites dépendant de l'angle azimutale, donnant une transformation utilisant les fonctions coniques associées de Mehler. Ainsi toute fonction f(η) peut se représenter sous forme intégrale d'une fonction F(τ), par la transformée générale inverse de Mehler-Fock :

$$f(\eta)=\int_0^{+\infty}d\tau\,P^{\mu}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta))\,F(\tau)\Leftrightarrow f(x)=\int_0^{+\infty}d\tau\,P^{\mu}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)\,F(\tau)\Leftarrow x=Cosh(\eta)$$

et la fonction transformée de Mehler-Fock d'ordre supérieur, s'écrit comme suit :

$$F(\tau)=\frac{\tau\,Sin(\pi\tau)}{\pi}\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu+i\tau\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu-i\tau\right)\int_0^{+\infty}d\eta\,Sinh(\eta)f(\eta)P^{\mu}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta))$$

$$\Leftrightarrow F(\tau)=\frac{\tau\,Sin(\pi\tau)}{\pi}\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu+i\tau\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu-i\tau\right)\int_1^{+\infty}dx\;f(x)P^{\mu}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)\Leftarrow x=Cosh(\eta)$$

on peut encore écrire :

$$f(\eta)=\int_0^{+\infty}d\tau\,P^{\mu}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta))\frac{\tau\,Sin(\pi\tau)}{\pi}\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu+i\tau\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu-i\tau\right)\int_0^{+\infty}d\varsigma\,Sinh(\varsigma)f(\varsigma)P^{\mu}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\varsigma))$$

$$\Leftrightarrow f(x)=\int_0^{+\infty}d\tau\,P^{\mu}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)\frac{\tau\,Sin(\pi\tau)}{\pi}\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu+i\tau\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu-i\tau\right)\int_0^{+\infty}dy\,f(y)P^{\mu}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(y)\quad\Leftarrow y=Cosh(\varsigma)$$

Les conditions sur les fonctions pour lesquelles la formule s'applique ne sont pas très clairement définies, aussi on ne s'étend pas trop sur le sujet. Par exemple les conditions suivantes assurent l'application de la double transformation :
- la fonction f(x) se comporte comme $O(x^{-1/2-\mu-\varepsilon})$ lorsque x tend vers l'infini
- la dérivée de f(x) est absolument intégrale sur tout intervalle fini entre 1 et l'infini
- la fonction f(x) s'annule en 0, f(0)=0

Toutefois il est plus que probable que pour une fonction bornée et à support bornée, le théorème peut s'appliquer.

Si la fonction f possède une discontinuité à la valeur η, on écrira au point de discontinuité :

$$\frac{f(\eta+0)+f(\eta-0)}{2}=\int_0^{+\infty}d\tau\left\{\begin{array}{l}P^{\mu}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta))\frac{\tau\,Sin(\pi\tau)}{\pi}\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu+i\tau\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu-i\tau\right)\times\\ \times\int_0^{+\infty}d\varsigma\,Sinh(\varsigma)f(\varsigma)P^{\mu}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\varsigma))\end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\int_0^{+\infty}d\tau\left\{\begin{array}{l}P^{\mu}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)\frac{\tau\,Sin(\pi\tau)}{\pi}\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu+i\tau\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu-i\tau\right)\times\\ \times\int_0^{+\infty}dy\,f(y)P^{\mu}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(y)\end{array}\right\}\quad\Leftarrow\left\{\begin{array}{l}y=Cosh(\varsigma)\\ x=Cosh(\eta)\end{array}\right.$$

<u>*Solution du problème aux limites de Dirichlet sur l'intervalle [0,+∞[*</u>

Illustrons cette construction pour le problème aux limites défini auparavant.

$$\Delta T(\eta,\theta)=0\quad(\eta,\theta)\in\{0\le\eta\le\infty,0\le\theta<\theta_0\}$$
$$Lim_{\theta\to0}T(\eta,\theta)\quad finie\quad Lim_{\eta\to0}T(\eta,\theta)\quad finie\quad Lim_{\eta\to\infty}T(\eta,\theta)\quad finie$$
$$T(\eta,\theta)\big|_{\theta=\theta_0}=f(\eta)$$

La fonction dans l'intégrale se révèle donc bien être la transformée de Mehler-Fock de la fonction limite du problème, à un facteur près dépendant du paramètre τ :

$$T(\eta,\theta)=\int_0^{+\infty}d\tau\,F(\tau)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta))\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\theta))}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\theta_0))}$$

$$avec\quad F(\tau)=\tau\,Tanh(\pi\tau)\int_0^{+\infty}d\eta\,Sinh(\eta)f(\eta)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta))=\tau\,Tanh(\pi\tau)\int_1^{+\infty}dx\,f(x)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)\,.$$

Exemple d'une fonction limite constante , à support bornée, sur un « rayon » l_η et nulle ailleurs.

Il vient la transformée de Mehler-Fock :

$$f(\eta)=\begin{cases}T_0 & \eta\in[0,l_\eta]\\ 0 & \eta\in]l_\eta,+\infty)\end{cases}\Rightarrow\frac{F(\tau)}{\tau\,Tanh(\pi\tau)}=T_0\int_0^{l_\eta}d\eta\,Sinh(\eta)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta))=T_0\int_1^{Cosh(l_\eta)}dz\,P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(z)$$

$$=\frac{T_0}{2\left(-\frac{1}{2}+i\tau\right)+1}\left[P_{-\frac{1}{2}+i\tau+1}(z)-P_{-\frac{1}{2}+i\tau-1}(z)\right]_1^{Cosh(l_\eta)}\Leftarrow\int dzP_\nu(z)=\frac{P_{\nu+1}(z)-P_{\nu-1}(z)}{2\nu+1}$$

$$\Rightarrow\frac{F(\tau)}{\tau\,Tanh(\pi\tau)}=\frac{T_0}{2i\tau}\left[P_{\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(l_\eta))-P_{-\frac{3}{2}+i\tau}(Cosh(l_\eta))\right]\quad Comme\quad P_\nu(z)=P_{-\nu-1}(z)$$

$$\Rightarrow\frac{F(\tau)}{\tau\,Tanh(\pi\tau)}=T_0\frac{\left[P_{\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(l_\eta))-P_{\frac{1}{2}-i\tau}(Cosh(l_\eta))\right]}{2i\tau}$$

$$Comme\quad P_{\bar\nu}(\bar z)=\overline{P_\nu(z)}\Rightarrow P_{\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(l_\eta))=\overline{P_{\frac{1}{2}-i\tau}(Cosh(l_\eta))}\Leftrightarrow P_{\frac{1}{2}-i\tau}(Cosh(l_\eta))=\overline{P_{\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(l_\eta))}$$

$$Posons\quad z=P_{\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(l_\eta))\Rightarrow\frac{\left[P_{\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(l_\eta))-P_{\frac{1}{2}-i\tau}(Cosh(l_\eta))\right]}{2i}=\frac{z-\bar z}{2i}$$

$$\Rightarrow F(\tau)\ à\ valeur\ réelle$$

La solution du problème aux limites d'un hyperboloïde à valeur constante à support borné sur sa surface latérale s'écrit donc :

$$T(\eta,\theta)=T_0\int_0^{+\infty}d\tau\,\tau\,Tanh(\pi\tau)\frac{\left[P_{\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(l_\eta))-P_{\frac{1}{2}-i\tau}(Cosh(l_\eta))\right]}{2i\tau}P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta))\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\theta))}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\theta_0))}$$

Avec un hyperboloïde d'angle d'ouverture droit, soit le plan (x,y), dont un disque de rayon Sinh(l_η) est portée à la valeur T_0, le profil sur l'axe z est obtenu comme suit :

$$z\in[0,1]\rightarrow\frac{T(0,\theta)}{T_0}=\int_0^{+\infty}d\tau\,\tau\,Tanh(\pi\tau)\frac{\left[P_{\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(l_\eta))-P_{\frac{1}{2}-i\tau}(Cosh(l_\eta))\right]}{2i\tau}\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\theta))}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(0)}$$

$$z\in[1,\infty]\rightarrow\frac{T(\eta,0)}{T_0}=\int_0^{+\infty}d\tau\,\tau\,Tanh(\pi\tau)\frac{\left[P_{\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(l_\eta))-P_{\frac{1}{2}-i\tau}(Cosh(l_\eta))\right]}{2i\tau}\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta))}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(0)}$$

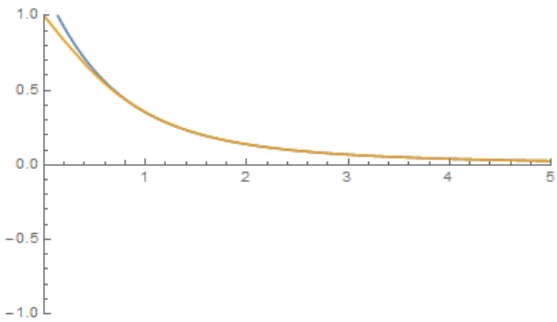
Avec la valeur connue de la fonction conique de Mehler d'ordre zéro, il vient :

$$P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(0)=\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{3}{4}+\frac{i\tau}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}-\frac{i\tau}{2}\right)}$$

$$z\in[0,1]\rightarrow\frac{T(0,\theta)}{T_0}=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}d\tau\left\{\begin{array}{l}Tanh(\pi\tau)\Gamma\left(\frac{3}{4}+\frac{i\tau}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}-\frac{i\tau}{2}\right)\times\\ \times\frac{\left[P_{\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(l_\eta))-P_{\frac{1}{2}-i\tau}(Cosh(l_\eta))\right]}{i}P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\theta))\end{array}\right\}$$

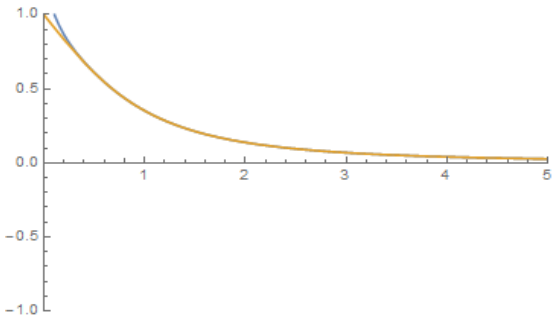
$$z\in[1,\infty]\rightarrow\frac{T(\eta,0)}{T_0}=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}d\tau\left\{\begin{array}{l}Tanh(\pi\tau)\Gamma\left(\frac{3}{4}+\frac{i\tau}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}-\frac{i\tau}{2}\right)\times\\ \times\frac{\left[P_{\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(l_\eta))-P_{\frac{1}{2}-i\tau}(Cosh(l_\eta))\right]}{i}P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta))\end{array}\right\}$$

Traçons les graphes de ce profil (chaque profil représente un intervalle d'intégration de plus en plus grand d'abord [0,5], [0,10] et [0,20], que l'on compare avec le profil connu d'un tel problème(voir le résultat en coordonnées sphériques) : $\frac{T(z)}{T_0}=1-\left(\frac{z}{Sinh(l_\eta)}\right)\Big/\sqrt{1+\left(\frac{z}{Sinh(l_\eta)}\right)^2}$



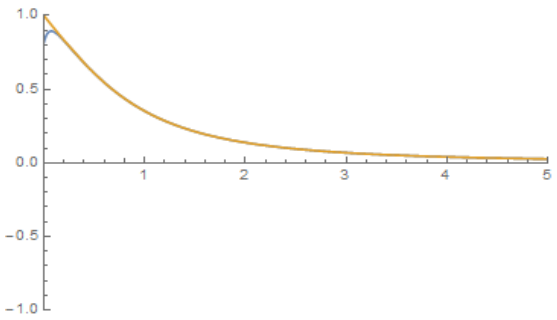
$$\frac{\text{NIntegrate}\left[\text{Re}\left(\Gamma\left(\frac{3}{4}-\frac{i\tau}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}+\frac{i\tau}{2}\right)\right)\tanh(\pi\tau)\,\text{Re}\left(\frac{P^0_{\frac{1}{2}+i\tau}(\cosh(l_\eta))-P^0_{\frac{1}{2}-i\tau}(\cosh(l_\eta))}{i}\right)P^0_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x),\{\tau,0,5\}\right]}{2\sqrt{\pi}}$$

$$1-\frac{x}{\sinh(l_\eta)\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sinh(l_\eta)}\right)^2}}$$



$$\frac{\text{NIntegrate}\left[\text{Re}\left(\Gamma\left(\frac{3}{4}-\frac{i\tau}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}+\frac{i\tau}{2}\right)\right)\tanh(\pi\tau)\,\text{Re}\left(\frac{P^0_{\frac{1}{2}+i\tau}(\cosh(l_\eta))-P^0_{\frac{1}{2}-i\tau}(\cosh(l_\eta))}{i}\right)P^0_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x),\{\tau,0,10\}\right]}{2\sqrt{\pi}}$$

$$1-\frac{x}{\sinh(l_\eta)\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sinh(l_\eta)}\right)^2}}$$



$$\frac{\text{NIntegrate}\left[\text{Re}\left(\Gamma\left(\frac{3}{4}-\frac{i\tau}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}+\frac{i\tau}{2}\right)\right)\tanh(\pi\tau)\,\text{Re}\left(\frac{P^0_{\frac{1}{2}+i\tau}(\cosh(l_\eta))-P^0_{\frac{1}{2}-i\tau}(\cosh(l_\eta))}{i}\right)P^0_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x),\{\tau,0,20\}\right]}{2\sqrt{\pi}}$$

$$1-\frac{x}{\sinh(l_\eta)\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sinh(l_\eta)}\right)^2}}$$

<u>Exemple d'une charge placée sur l'axe z des coordonnées induisant une charge sur l'une des nappes de l'hyperboloïde conducteur parfait, placée au potentiel nul .</u>

L'iso-surface d'angle constant θ=θ0 est une hyperboloïde à deux nappes :

$$\frac{z^2}{a^2\,Cos^2(\theta_0)}-\frac{x^2+y^2}{a^2\,Sin^2(\theta_0)}=1 \quad \rho=\sqrt{x^2+y^2}\Rightarrow\frac{z^2}{a^2\,Cos^2(\theta_0)}-\frac{\rho^2}{a^2\,Sin^2(\theta_0)}=1$$

$$\Rightarrow z=\pm a\,Cos(\theta_0)\sqrt{1+\frac{\rho^2}{a^2\,Sin^2(\theta_0)}}$$

$$L'\text{équation réduite de l'hyperbole}\quad \frac{z^2}{\alpha^2}-\frac{\rho^2}{\beta^2}=1\Rightarrow\begin{cases}\alpha=aCos(\theta_0)\\ \beta=aSin(\theta_0)\end{cases}$$

$$Distance\ focale\ c=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}=a$$

.

La charge placée sur l'axe z à la distance c engendre un potentiel de la forme :

$$T_q(\eta,\vartheta)=\frac{T_0}{\sqrt{x^2+y^2+(z-c)^2}}=\frac{T_0}{\sqrt{x^2+y^2+(z-c)^2}}\Leftarrow\begin{cases}x=a\,Sinh(\eta)\,Sin(\vartheta)Cos(\varphi)\\ y=a\,Sinh(\eta)\,Sin(\vartheta)Sin(\varphi)\\ z=a\,Cosh(\eta)\,Cos(\vartheta)\\ c=a\end{cases}$$

$$T_q(\eta,\vartheta)=\frac{T_0}{\sqrt{a^2\,Sinh^2(\eta)\,Sin^2(\vartheta)+(a\,Cosh(\eta)\,Cos(\vartheta)-a)^2}}=$$

$$=\frac{T_0}{\sqrt{a^2\,Sinh^2(\eta)\,Sin^2(\vartheta)+a^2\,Cosh^2(\eta)\,Cos^2(\vartheta)+a^2-2a^2\,Cosh(\eta)\,Cos(\vartheta)}}$$

$$=\frac{T_0}{\sqrt{a^2Cosh^2(\eta)+a^2\,Cos^2(\vartheta)-2a^2\,Cosh(\eta)\,Cos(\vartheta)}}$$

$$\Rightarrow T_q(\eta,\vartheta)=\frac{T_0}{a(Cosh(\eta)-Cos(\vartheta))}$$

Pour trouver la solution du problème de Dirichlet, on développe la solution sous la forme :

$$T(\eta,\vartheta)=T_s(\eta,\vartheta)+T_q(\eta,\vartheta)$$

$$\Rightarrow T(\eta,\vartheta_0)=0\Rightarrow T_s(\eta,\vartheta_0)=-\frac{T_0}{a(Cosh(\eta)-Cos(\vartheta_0))}.$$

Le potentiel Ts est calculé à l'aide de la transformation de Mehler-Fock sous la forme :

$$T_s(\eta,\theta)=\int_0^{+\infty} d\tau\, F(\tau) P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta))\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\theta))}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\theta_0))}$$

$$avec \quad F(\tau)=\tau\, Tanh(\pi\tau)\int_1^{+\infty} dx\, f(x) P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x) \quad f(x)=-\frac{T_0}{a(x-Cos(\vartheta_0))}$$

$$\Rightarrow F(\tau)=-\frac{T_0}{a}\tau\, Tanh(\pi\tau)\int_1^{+\infty} dx \frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)}{x-Cos(\vartheta_0)}$$

$$or \quad \int_1^{+\infty} dx \frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)}{x-Cos(\vartheta_0)}=\frac{\pi}{Cosh(\pi\tau)} P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-Cos(\vartheta_0))$$

$$\Rightarrow F(\tau)=-\frac{T_0\pi}{a}\frac{\tau\, Tanh(\pi\tau)}{Cosh(\pi\tau)} P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-Cos(\vartheta_0))$$

$$T_s(\eta,\theta)=-\frac{T_0\pi}{a}\int_0^{+\infty} d\tau \frac{\tau\, Tanh(\pi\tau)}{Cosh(\pi\tau)}\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-Cos(\vartheta_0))}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\theta_0))} P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta)) P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\theta))$$

$$T(\eta,\theta)=\frac{T_0}{a(Cosh(\eta)-Cos(\vartheta))}-\frac{T_0\pi}{a}\int_0^{+\infty} d\tau \frac{\tau\, Tanh(\pi\tau)}{Cosh(\pi\tau)}\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-Cos(\vartheta_0))}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\theta_0))} P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta)) P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\theta))$$

En prenant la forme de la transformée de Mehler-Fock cette fois-ci sur une angle θ quelconque, il vient :

$$T_s(\eta,\theta)=\int_0^{+\infty} d\tau\, F(\tau) P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta))\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\theta))}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\theta_0))}$$

$$f(x)=\frac{1}{(x-Cos(\vartheta))} \Rightarrow F(\tau)=\frac{\pi\tau\, Tanh(\pi\tau)}{Cosh(\pi\tau)} P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-Cos(\vartheta))$$

$$\Rightarrow \frac{1}{Cosh(\eta)-Cos(\vartheta)}=\pi\int_0^{+\infty} d\tau \frac{\tau\, Tanh(\pi\tau)}{Cosh(\pi\tau)} P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-Cos(\vartheta)) P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta))$$

$$T(\eta,\theta)=\frac{T_0\pi}{a}\int_0^{+\infty} d\tau \frac{\tau\, Tanh(\pi\tau)}{Cosh(\pi\tau)}\left[P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-Cos(\vartheta))-\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-Cos(\vartheta_0))}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\theta_0))} P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\theta))\right] P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta))$$

.

Soit une forme disons plus symétrique de la solution, qui permet de voir que la solution s'annule bien sur la surface de l'hyperboloïde :

$$T(\eta,\theta)=\frac{T_0\pi}{a}\int_0^{+\infty} d\tau \frac{\tau\, Tanh(\pi\tau)}{Cosh(\pi\tau)}\left\{\begin{array}{l}\left[P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-Cos(\vartheta)) P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\theta_0))-P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-Cos(\vartheta_0)) P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\theta))\right]\times \\ \times\dfrac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta))}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\theta_0))}\end{array}\right\}$$

.

Il reste à démontrer la formule utilisée précédemment :

$$\int_1^{+\infty} dx \frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)}{x-Cos(\vartheta_0)} = \frac{\pi}{Cosh(\pi\tau)} P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-Cos(\vartheta_0))$$

$$\Leftarrow \begin{cases} P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta)) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\eta} d\varsigma \frac{Cos(\tau\varsigma)}{\sqrt{2Cosh(\eta)-2Cosh(\varsigma)}} \\ P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x) = \dfrac{\sqrt{2}Cosh(\pi\tau)}{\pi}\displaystyle\int_0^{+\infty} d\varsigma \frac{Cos(\tau\varsigma)}{\sqrt{x+Cosh(\varsigma)}} \end{cases}$$

$$De\ plus \int_1^{+\infty} dx \frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)}{x-Cos(\vartheta_0)} = \frac{\sqrt{2}Cosh(\pi\tau)}{\pi}\int_1^{+\infty} dx \frac{1}{x-Cos(\vartheta_0)}\int_0^{+\infty} d\varsigma \frac{Cos(\tau\varsigma)}{\sqrt{x+Cosh(\varsigma)}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}Cosh(\pi\tau)}{\pi}\int_0^{+\infty} d\varsigma\, Cos(\tau\varsigma)\int_1^{+\infty} dx \frac{1}{x-Cos(\vartheta_0)}\frac{1}{\sqrt{x+Cosh(\varsigma)}}$$

$$\int_1^{+\infty} dx \frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)}{x-Cos(\vartheta_0)} = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} d\eta \int_0^{\eta} d\varsigma \frac{Sinh(\eta)}{Cosh(\eta)-Cos(\vartheta_0)}\frac{Cos(\tau\varsigma)}{\sqrt{2Cosh(\eta)-2Cosh(\varsigma)}}$$

$$Intervertissant\ l'ordre\ d'intégration\ selon\ la\ formule \int_0^{+\infty} d\eta \int_0^{\eta} d\varsigma\, f(\eta,\varsigma) = \int_0^{+\infty} d\varsigma \int_{\varsigma}^{+\infty} d\eta\, f(\eta,\varsigma)$$

$$\int_1^{+\infty} dx \frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)}{x-Cos(\vartheta_0)} = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_0^{+\infty} d\varsigma \int_{\varsigma}^{+\infty} d\eta \frac{Sinh(\eta)}{Cosh(\eta)-Cos(\vartheta_0)}\frac{Cos(\tau\varsigma)}{\sqrt{Cosh(\eta)-Cosh(\varsigma)}} \Leftarrow x = Cosh(\eta)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_0^{+\infty} d\varsigma\, Cos(\tau\varsigma)\int_{Cosh(\varsigma)}^{+\infty} dx \frac{1}{x-Cos(\vartheta_0)}\frac{1}{\sqrt{x-Cosh(\varsigma)}}$$

$$Or \int_{Cosh(\varsigma)}^{+\infty} dx \frac{1}{x-a}\frac{1}{\sqrt{x-b}} = \frac{\pi}{\sqrt{b-a}} \Rightarrow \int_1^{+\infty} dx \frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)}{x-Cos(\vartheta_0)} = \sqrt{2}\int_0^{+\infty} d\varsigma \frac{Cos(\tau\varsigma)}{\sqrt{Cosh(\varsigma)-Cos(\vartheta_0)}}$$

$$Comme\ \sqrt{2}\int_0^{+\infty} d\varsigma \frac{Cos(\tau\varsigma)}{\sqrt{Cosh(\varsigma)-Cos(\vartheta_0)}} = \frac{\pi}{Cosh(\pi\tau)} P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-Cos(\vartheta_0))$$

$$\int_1^{+\infty} dx \frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)}{x-Cos(\vartheta_0)} = \frac{\pi}{Cosh(\pi\tau)} P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-Cos(\vartheta_0)) \quad c.q.f.d$$

.

Exemple d'une charge placée à l'origine des coordonnées induisant une charge sur l'une des nappes de l'hyperboloïde conducteur parfait, placée au potentiel nul .

L'iso-surface d'angle constant θ=θ0 est une hyperboloïde à deux nappes :

$$\frac{z^2}{a^2\,Cos^2(\theta_0)}-\frac{x^2+y^2}{a^2\,Sin^2(\theta_0)}=1 \quad \rho=\sqrt{x^2+y^2}\Rightarrow\frac{z^2}{a^2\,Cos^2(\theta_0)}-\frac{\rho^2}{a^2\,Sin^2(\theta_0)}=1$$

$$\Rightarrow z=\pm a\,Cos(\theta_0)\sqrt{1+\frac{\rho^2}{a^2\,Sin^2(\theta_0)}} \quad Distance\ focale\ c=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}=a$$

$$L'équation\ réduite\ de\ l'hyperbole \quad \frac{z^2}{\alpha^2}-\frac{\rho^2}{\beta^2}=1\Rightarrow\begin{cases}\alpha=aCos(\theta_0)\\ \beta=aSin(\theta_0)\end{cases}$$

La charge placée à l'origine engendre un potentiel de la forme :

$$T_q(\eta,\vartheta)=\frac{T_0}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\Leftarrow\begin{cases}x=a\,Sinh(\eta)\,Sin(\vartheta)Cos(\varphi)\\ y=a\,Sinh(\eta)\,Sin(\vartheta)Sin(\varphi)\\ z=a\,Cosh(\eta)\,Cos(\vartheta)\end{cases}$$

$$T_q(\eta,\vartheta)=\frac{T_0}{a\sqrt{Sinh^2(\eta)\,Sin^2(\vartheta)+Cosh^2(\eta)\,Cos^2(\vartheta)}}=\frac{T_0}{a\sqrt{Cos^2(\vartheta)+Sinh^2(\eta)}}=\frac{T_0}{a\sqrt{Cosh^2(\eta)-Sin^2(\vartheta)}}$$

Pour trouver la solution du problème de Dirichlet, on développe la solution sous la forme :

$$T(\eta,\vartheta)=T_s(\eta,\vartheta)+T_q(\eta,\vartheta)\Rightarrow T(\eta,\vartheta_0)=0\Rightarrow T_s(\eta,\vartheta_0)=-\frac{T_0}{a\sqrt{Cosh^2(\eta)-Sin^2(\vartheta)}}$$

Le potentiel Ts est calculé à l'aide de la transformation de Mehler-Fock sous la forme :

$$T_s(\eta,\theta)=\int_0^{+\infty}d\tau\,F(\tau)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta))\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-Cos(\theta))}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-Cos(\theta_0))} \quad car \quad \theta\geq\theta_0$$

$$avec \quad F(\tau)=\tau\,Tanh(\pi\tau)\int_1^{+\infty}dx\,f(x)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x) \quad f(x)=-\frac{T_0}{a\sqrt{x^2-Sin^2(\vartheta_0)}}$$

$$\Rightarrow F(\tau)=-\frac{T_0}{a}\tau\,Tanh(\pi\tau)\int_1^{+\infty}dx\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)}{\sqrt{x^2-Sin^2(\vartheta_0)}} \quad or \quad \int_1^{+\infty}dx\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)}{\sqrt{x^2+\alpha^2-1}}=\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\alpha)}{2\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{i\tau}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}-\frac{i\tau}{2}\right)$$

$$\Rightarrow\int_1^{+\infty}dx\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)}{\sqrt{x^2-Sin^2(\vartheta_0)}}=\int_1^{+\infty}dx\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)}{\sqrt{x^2+Cos^2(\vartheta_0)-1}}=\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\vartheta_0))}{2\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{i\tau}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}-\frac{i\tau}{2}\right)$$

$$\Rightarrow F(\tau)=-\frac{T_0}{a}\tau\,Tanh(\pi\tau)\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\vartheta_0))}{2\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{i\tau}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}-\frac{i\tau}{2}\right) \quad Si\ Cos(\vartheta_0)\geq 0$$

$$T_s(\eta,\theta)=-\frac{T_0}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}d\tau\,\tau\,Tanh(\pi\tau)\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\vartheta_0))}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-Cos(\theta_0))}\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{i\tau}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}-\frac{i\tau}{2}\right)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta))P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-Cos(\theta))$$

$$T(\eta,\theta)=\frac{T_0}{a\sqrt{Cosh^2(\eta)-Sin^2(\vartheta)}}-$$

$$-\frac{T_0}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}d\tau\,\tau\,Tanh(\pi\tau)\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\vartheta_0))}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-Cos(\theta_0))}\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{i\tau}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}-\frac{i\tau}{2}\right)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta))P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-Cos(\theta))$$

En prenant la forme de la transformée de Mehler-Fock cette fois-ci sur une angle θ quelconque, il vient une solution sous une forme disons plus symétrique :

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2-Sin^2(\vartheta)}}\Rightarrow F(\tau)=\tau\,Tanh(\pi\tau)\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\vartheta))}{2\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{i\tau}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}-\frac{i\tau}{2}\right)$$

$$\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{Cosh^2(\eta)-Sin^2(\vartheta)}}=\int_0^{+\infty}d\tau\,\tau\,Tanh(\pi\tau)\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\vartheta))}{2\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{i\tau}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}-\frac{i\tau}{2}\right)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta))$$

$$T(\eta,\theta)=\frac{T_0}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}d\tau\left\{\begin{array}{l}\tau\,Tanh(\pi\tau)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta))\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{i\tau}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}-\frac{i\tau}{2}\right)\times\\ \left\{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\vartheta))-\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\vartheta_0))}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-Cos(\theta_0))}P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-Cos(\theta))\right\}\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow T(\eta,\theta)=\frac{T_0}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}d\tau\left\{\begin{array}{l}\tau\,Tanh(\pi\tau)\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta))}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-Cos(\theta_0))}\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{i\tau}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}-\frac{i\tau}{2}\right)\times\\ \times\left\{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\vartheta))P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-Cos(\theta_0))-P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\vartheta_0))P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-Cos(\theta))\right\}\end{array}\right\}.$$

Solution du problème aux limites de Dirichlet sur l'intervalle $[\eta_0,+\infty[$

Pour le problème de Dirichlet suivant :

$$\Delta T(\eta,\theta)=0 \quad (\eta,\theta)\in\{\eta_0\le\eta\le\infty, 0\le\theta<\theta_0\}$$

$$Lim_{\theta\to 0}T(\eta,\theta) \quad finie \quad Lim_{\eta\to 0}T(\eta,\theta) \quad finie \quad Lim_{\eta\to\infty}T(\eta,\theta) \quad finie$$

$$T(\eta,\theta)\big|_{\eta=\eta_0}=0 \quad T(\eta,\theta)\big|_{\theta=\theta_0}=f(\eta)$$

La solution recherchée se développe sous la forme :

$$T(\eta,\theta)=\int_0^{+\infty}d\tau\,F(\tau)\left[Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta_0))P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta))-Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta))P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta_0))\right]\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\theta))}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\theta_0))}$$

$$ou \quad T(\eta,\theta)=\int_0^{+\infty}d\tau\,G(\tau)\left[\begin{array}{l}\left\{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-Cosh(\eta_0))P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta))-P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta_0))P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-Cosh(\eta))\right\}\times\\ \times\dfrac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\theta))}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\theta_0))}\end{array}\right]$$

La fonction radiale est à valeur réelle, en effet :

$$\Phi(\eta)=Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta_0))P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta))-Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta))P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta_0))$$

$$Comme \quad Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(z)=\frac{\pi}{2Cosh(\pi\tau)}\left(P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-z)-iSinh(\pi\tau)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(z)\right)$$

$$\Rightarrow Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta_0))P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta))-Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta))P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta_0))=$$

$$=\frac{\pi}{2Cosh(\pi\tau)}\left\{\begin{array}{l}\left(P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-Cosh(\eta_0))-iSinh(\pi\tau)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta_0))\right)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta))-\\ -P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta_0))\left(P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-Cosh(\eta))-iSinh(\pi\tau)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta))\right)\end{array}\right\}$$

$$=\frac{\pi}{2Cosh(\pi\tau)}\left\{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-Cosh(\eta_0))P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta))-P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta_0))P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-Cosh(\eta))\right\}$$

$$Or \quad P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta)) \quad réel \quad et \quad P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-Cosh(\eta)) \quad réel$$

Et la fonction de l'intégrande se calcule à l'aide de la fonction limite par l'introduction de la transformation intégrale donnée ci-après.

Représentation intégrale modifiée dans le cas d'un problème aux limites de Dirichlet inhomogène sur [η_0,+∞[et homogène en $\eta = \eta_0$, première forme d'après l'article de N.A.BELOVA.Ia.S.UFLIAND, « Dirichlet problem for a toroidal segment », PMM Vol. 31, No. 1, 1967, pp. 59-63 »

Dans la suite de l'exposé, on utilise donc la propriété :

$$Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x) = \frac{\pi}{2Cosh(\pi\tau)}\left(P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-x) - iSinh(\pi\tau)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)\right)$$

De même les variables x et x_0 sont reliées aux variables en coordonnées sphéroïdales allongée de la manière suivante : $x = Cosh(\eta) \quad et \quad x_0 = Cosh(\eta_0)$.

La fonction limite f(η) admet une représentation en double intégrale de la forme :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} d\tau \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\pi\,\tau\,Sinh(\pi\tau)}{\left|\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\tau\right)\right|^2 \left|Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x_0)\right|^2 Cosh^2(\pi\tau)} \left[Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x_0)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x) - Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x_0)\right] \times \\ \times \int_{x_0}^{+\infty} dy f(y)\left[Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x_0)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(y) - Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(y)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x_0)\right] \end{array} \right\}$$

$$avec \quad \left|\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\tau\right)\right|^2 = \Gamma\left(\frac{1}{2}+i\tau\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-i\tau\right) = \frac{\pi}{Sin\left(\pi\left(\frac{1}{2}+i\tau\right)\right)} = \frac{\pi}{Cosh(\pi\,\tau)}$$

$$\Rightarrow f(x) = \int_0^{+\infty} d\tau \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\tau\,Tanh(\pi\tau)}{\left|Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x_0)\right|^2} \left[Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x_0)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x) - Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x_0)\right] \times \\ \times \int_{x_0}^{+\infty} dy f(y)\left[Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x_0)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(y) - Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(y)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x_0)\right] \end{array} \right\}.$$

que l'on décompose en deux transformations intégrales :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} d\tau\, F(\tau)\left[Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x_0)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x) - Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x_0)\right]$$

$$F(\tau) = \frac{\tau\,Tanh(\pi\tau)}{\left|Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x_0)\right|^2} \int_{x_0}^{+\infty} dx\, f(x)\left[Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x_0)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x) - Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x_0)\right].$$

En utilisant l'équivalence avec les fonctions de signe opposé, il vient :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} d\tau\, F(\tau)\left[P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-x_0)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x) - P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x_0)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-x)\right]$$

$$F(\tau) = \frac{\tau\,Tanh(\pi\tau)}{\left|Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x_0)\right|^2} \frac{\pi^2}{4Cosh^2(\pi\tau)} \int_{x_0}^{+\infty} dx\, f(x)\left[P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-x_0)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x) - P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x_0)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-x)\right].$$

Ce qui nous donne la forme intégrale suivante :

$$Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x_0)=\frac{\pi}{2Cosh(\pi\tau)}\left(P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-x_0)-iSinh(\pi\tau)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x_0)\right)$$

$$\Rightarrow\left|Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x_0)\right|^2=\frac{\pi^2}{4Cosh^2(\pi\tau)}\left(\left(P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-x_0)\right)^2+Sinh^2(\pi\tau)\left(P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x_0)\right)^2\right)$$

$$\Rightarrow F(\tau)=\frac{\tau\,Tanh(\pi\tau)}{\left(\left(P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-x_0)\right)^2+Sinh^2(\pi\tau)\left(P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x_0)\right)^2\right)}\int_{x_0}^{+\infty}dx\,f(x)\left[P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-x_0)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)-P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x_0)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-x)\right]$$

Soit pour résumé et en simplifiant les termes, les formules intégrales sont les suivantes :

$$f(x)=\int_0^{+\infty}d\tau\,F(\tau)\left[Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x_0)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)-Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x_0)\right]$$

$$F(\tau)=\frac{\tau\,Tanh(\pi\tau)}{\left|Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x_0)\right|^2}\int_{x_0}^{+\infty}dx\,f(x)\left[Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x_0)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)-Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x_0)\right]$$

.

ou bien

$$f(x)=\int_0^{+\infty}d\tau\,F(\tau)\left\{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-x_0)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)-P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x_0)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-x)\right\}$$

$$F(\tau)=\frac{\tau\,Tanh(\pi\tau)}{\left(\left(P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-x_0)\right)^2+Sinh^2(\pi\tau)\left(P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x_0)\right)^2\right)}\int_{x_0}^{+\infty}dx\,f(x)\left[P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-x_0)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)-P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x_0)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-x)\right]$$

Par condensation des deux transformations intégrales :

$$f(x)=\int_0^{+\infty}d\tau\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\tau\,Tanh(\pi\tau)}{\left|Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x_0)\right|^2}\left\{Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x_0)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)-Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x_0)\right\}\times\\ \times\displaystyle\int_{x_0}^{+\infty}dy\,f(y)\left\{Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x_0)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(y)-P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x_0)Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(y)\right\}\end{array}\right\}$$

ou

$$f(x)=\int_0^{+\infty}d\tau\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\tau\,Tanh(\pi\tau)}{\left(\left(P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-x_0)\right)^2+Sinh^2(\pi\tau)\left(P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x_0)\right)^2\right)}\left\{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-x_0)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)-P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x_0)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-x)\right\}\times\\ \times\displaystyle\int_{x_0}^{+\infty}dy\,f(y)\left\{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-x_0)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(y)-P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x_0)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-y)\right\}\end{array}\right\}$$

.

On retrouve la transformation de Mehler-Fock lorsque la borne inférieure de l'intervalle d'intégration tend vers zéro. Dans ce cas les deux termes suivant deviennent dominant :

$$Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x_0)\to\infty \quad P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-x_0)\to\infty$$

Il vient alors immédiatement :

$$f(x)=\int_0^{+\infty}d\tau\,\tau\,Tanh(\pi\tau)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)\int_1^{+\infty}dy\,f(y)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(y)$$

qui est la transformation intégrale et son inversion.

Remarque : L'article de Belova et Ufliand affirme que la fonction $Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x_0)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)-Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x_0)$ *est à valeur réelle quelque soit la valeur de x et x0, c'est bien le cas en effet la partie imaginaire de la fonction de deuxième espèce est proportionnelle à la fonction de première espèce qui est effectivement réelle (voir aussi une démonstration à partir des formules de connexion des fonctions de Legendre donnée dans les propriétés des fonctions coniques de Mehler) :*

$$Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)=\mathrm{Re}\left(Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)\right)+i\,\mathrm{Im}\left(Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)\right)\quad et\quad \mathrm{Im}\left(Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)\right)=\gamma(\tau)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)$$

$$\Rightarrow Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x_0)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)-Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x_0)=\mathrm{Re}\left(Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x_0)\right)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)-\mathrm{Re}\left(Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)\right)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x_0)$$

L'immédiate conséquence c'est que l'on peut employer la partie réelle de la fonction conique de deuxième espèce. On écrit donc immédiatement les formules de représentation intégrale comme suit :

$$f(x)=\int_0^{+\infty}d\tau\,F(\tau)\left[\mathrm{Re}\left(Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x_0)\right)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)-\mathrm{Re}\left(Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)\right)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x_0)\right]$$

$$F(\tau)=\frac{\tau\,Tanh(\pi\tau)}{\left|Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x_0)\right|^2}\int_{x_0}^{+\infty}dx\,f(x)\left[\mathrm{Re}\left(Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x_0)\right)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)-\mathrm{Re}\left(Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)\right)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x_0)\right]$$

Remarque : en analysant les résultats de cet article et le comparant aux résultats d'un article de nature similaire : A.F.Ulitko « On a generalization of the integral transformation of Mehler-Fock », SOVIET APPLIED MECHANICS, Prikladnaya Mekhmnika, Vot. 3, No. 5, pp. 45-49, 1967» , on peut montrer comme on va le voir ci-dessous que les deux représentations intégrales sont totalement équivalente.

Mais avant de montrer cette équivalence introduisons la forme alternative de représentation intégrale .

Représentation intégrale modifiée dans le cas d'un problème aux limites de Dirichlet inhomogène sur [η_0,+∞[, homogène en $\eta = \eta_0$, première forme d'après l'article de A.F.Ulitko « On a generalization of the integral transformation of Mehler-Fock », SOVIET APPLIED MECHANICS, Prikladnaya Mekhmnika, Vot. 3, No. 5, pp. 45-49, 1967»

Cet article introduit une nouvelle fonction indépendante logiquement combinaison linéaire des fonctions coniques de Mehler de première et deuxième espèce. La fonction est choisie de telle manière que ses valeurs sont réelles. On utilise ici les fonctions coniques suivantes, la première étant la classique fonctions coniques de Mehler de première espèce :

$$x = Cosh(\eta) \quad x_0 = Cosh(\eta_0)$$

$$P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x) = i\frac{Cotanh(\pi\tau)}{\pi}\left(Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x) - Q_{-\frac{1}{2}-i\tau}(x)\right) \qquad L_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x) = \frac{Cosh(\pi\tau)}{\pi}\left(Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x) + Q_{-\frac{1}{2}-i\tau}(x)\right)$$

La formule de transformation intégrale proposée dans l'article revêt la forme :

$$f(\eta) = \int_0^{+\infty} d\tau \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\tau\, Tanh(\pi\tau)}{\left(\left(Sinh(\pi\tau)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x_0)\right)^2 + \left(L_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x_0)\right)^2\right)} \left\{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x_0)L_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta)) - L_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x_0)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta))\right\} \times \\ \times \displaystyle\int_{\eta_0}^{+\infty} d\varsigma\, f(\varsigma)Sinh(\varsigma)\left\{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x_0)L_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\varsigma)) - L_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x_0)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\varsigma))\right\} \end{array} \right\}$$

$$\Leftrightarrow x = Cosh(\eta) \quad y = Cosh(\varsigma)$$

$$f(x) = \int_0^{+\infty} d\tau \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\tau\, Tanh(\pi\tau)}{\left(\left(Sinh(\pi\tau)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x_0)\right)^2 + \left(L_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x_0)\right)^2\right)} \left\{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x_0)L_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x) - L_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x_0)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)\right\} \times \\ \times \displaystyle\int_{x_0}^{+\infty} dy\, f(y)\left\{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x_0)L_{-\frac{1}{2}+i\tau}(y) - L_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x_0)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(y)\right\} \end{array} \right\}$$

Cette formule a le mérite de redonner la transformation intégrale de Mehler-Fock lorsque la borne inférieure de l'intervalle d'intégration tend vers zéro.

$$L_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x_0) = \frac{Cosh(\pi\tau)}{\pi}\left(Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x_0) + Q_{-\frac{1}{2}-i\tau}(x_0)\right) \approx \frac{Cosh(\pi\tau)}{\pi} Log\left(\frac{x_0+1}{x_0-1}\right).$$

Dans ce cas le terme diverge et devient le terme dominant de la transformation intégrale, il vient immédiatement :

$$f(x) \approx \lim_{x_0 \to 1} \int_0^{+\infty} d\tau \frac{\tau\, Tanh(\pi\tau)}{L_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x_0)^2} L_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x_0) L_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x_0) P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x) \int_{x_0}^{+\infty} dy\, f(y) P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(y)$$

$$\Rightarrow f(x) = \int_0^{+\infty} d\tau\, \tau\, Tanh(\pi\tau) P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x) \int_1^{+\infty} dy\, f(y) P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(y)$$

qui est la transformation intégrale et son inversion.

<u>*Équivalence des deux représentations intégrales de Belova-Ufliand et d'Ultiko*</u>

D'après la forme de la nouvelle fonction introduite par Ulitko, il vient :

$$P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x) = i\frac{Cotanh(\pi\tau)}{\pi}\left(Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x) - Q_{-\frac{1}{2}-i\tau}(x)\right) \qquad L_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x) = \frac{Cosh(\pi\tau)}{\pi}\left(Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x) + Q_{-\frac{1}{2}-i\tau}(x)\right)$$

$$\Rightarrow Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x) = \frac{\pi}{2Cosh(\pi\tau)}\left\{L_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x) - iSinh(\pi\tau) P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)\right\}$$

$$\Rightarrow \left|Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x_0)\right|^2 = \frac{\pi^2}{4Cosh^2(\pi\tau)}\left\{\left(L_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)\right)^2 + Sinh^2(\pi\tau)\left(P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)\right)^2\right\}$$

$$L_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x) = \frac{2Cosh(\pi\tau)}{\pi}\mathrm{Re}\left(Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)\right)$$

L'emploi des fonctions propres d'Ulitko conduit alors aux formules d'intégration suivantes :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} d\tau \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\tau\, Tanh(\pi\tau)}{\left(\left(Sinh(\pi\tau) P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x_0)\right)^2 + \left(L_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x_0)\right)^2\right)} \left\{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x_0) L_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x) - L_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x_0) P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)\right\} \times \\ \times \displaystyle\int_{x_0}^{+\infty} dy\, f(y) \left\{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x_0) L_{-\frac{1}{2}+i\tau}(y) - L_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x_0) P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(y)\right\} \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow f(x) = \int_0^{+\infty} d\tau \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\tau\, Tanh(\pi\tau)}{\left|Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x_0)\right|^2 \dfrac{4Cosh^2(\pi\tau)}{\pi^2}} \dfrac{4Cosh^2(\pi\tau)}{\pi^2} \left\{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x_0)\mathrm{Re}\left(Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)\right) - \mathrm{Re}\left(Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x_0)\right) P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)\right\} \times \\ \times \displaystyle\int_{x_0}^{+\infty} dy\, f(y) \left\{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x_0)\mathrm{Re}\left(Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(y)\right) - \mathrm{Re}\left(Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x_0)\right) P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(y)\right\} \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow f(x) = \int_0^{+\infty} d\tau \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\tau\, Tanh(\pi\tau)}{\left|Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x_0)\right|^2} \left\{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x_0)\mathrm{Re}\left(Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)\right) - \mathrm{Re}\left(Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x_0)\right) P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)\right\} \times \\ \times \displaystyle\int_{x_0}^{+\infty} dy\, f(y) \left\{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x_0)\mathrm{Re}\left(Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(y)\right) - \mathrm{Re}\left(Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x_0)\right) P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(y)\right\} \end{array} \right\}$$

Ce qui est exactement la forme employée par Belova. Pour conclure on décompose en deux transformations intégrales que l'on dénomme Belova-Ufliand-Ulitko comme suit :

$$\begin{cases} f(x) = \int_0^{+\infty} d\tau\, F(\tau)\left[\mathrm{Re}\left(Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x_0)\right)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x) - \mathrm{Re}\left(Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)\right)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x_0)\right] \\ F(\tau) = \dfrac{\tau\, Tanh(\pi\tau)}{\left|Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x_0)\right|^2}\int_{x_0}^{+\infty} dx\, f(x)\left[\mathrm{Re}\left(Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x_0)\right)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x) - \mathrm{Re}\left(Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)\right)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x_0)\right] \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} f(x) = \int_0^{+\infty} d\tau\, F(\tau)\left[L_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x_0)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x) - L_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x_0)\right] \\ F(\tau) = \dfrac{\tau\, Tanh(\pi\tau)}{\left(Sinh(\pi\tau)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x_0)\right)^2 + \left(L_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x_0)\right)^2}\int_{x_0}^{+\infty} dx\, f(x)\left[L_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x_0)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x) - L_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x_0)\right] \end{cases}$$

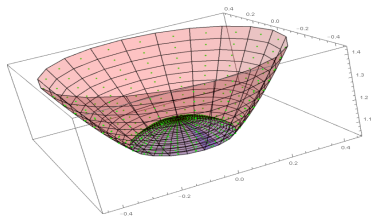
Forme intégrale des solutions des problèmes aux limites de Dirichlet sur des hyperboloïdes tronqués

Les formes intégrales données ci-dessus permettent de construire la solution du problème de Dirichlet suivant :

$\Delta T(\eta,\theta) = 0 \quad (\eta,\theta) \in \{\eta_0 \le \eta \le \infty, 0 \le \theta < \theta_0\}$

$Lim_{\theta\to 0} T(\eta,\theta) \quad finie \quad Lim_{\eta\to\infty} T(\eta,\theta) \quad finie$

$T(\eta,\theta)\big|_{\eta=\eta_0} = 0 \quad T(\eta,\theta)\big|_{\theta=\theta_0} = f(\eta)$



..

Et par identification des termes avec la forme d'Ulitko, il vient :

$Posons \quad x_0 = Cosh(\eta_0) \quad x = Cosh(\eta)$

$$T(x,\theta) = \int_0^{+\infty} d\tau\, F(\tau)\left\{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x_0)L_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x) - L_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x_0)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)\right\}\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\theta))}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\theta_0))}$$

$$avec\ F(\tau) = \frac{\tau\, Tanh(\pi\tau)}{\left(\left(Sinh(\pi\tau)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x_0)\right)^2 + \left(L_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x_0)\right)^2\right)}\int_{x_0}^{+\infty} dx\, f(x)\left\{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x_0)L_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x) - L_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x_0)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)\right\}$$

$$F(\tau) = \frac{\tau\, Tanh(\pi\tau)}{\left(\left(Sinh(\pi\tau)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x_0)\right)^2 + \left(L_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x_0)\right)^2\right)}\left\{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x_0)\int_{x_0}^{+\infty} dx\, f(x)L_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x) - L_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x_0)\int_{x_0}^{+\infty} dx\, f(x)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)\right\}$$

Et par identification des termes avec la forme de Belova et Ufliand, il vient :

$Posons \quad x_0 = Cosh(\eta_0) \quad x = Cosh(\eta)$

$$T(x,\theta) = \int_0^{+\infty} d\tau\, F(\tau)\left\{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x_0)\mathrm{Re}\left(Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)\right) - \mathrm{Re}\left(Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x_0)\right)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)\right\}\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\theta))}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\theta_0))}$$

$$avec\ F(\tau) = \frac{\tau\, Tanh(\pi\tau)\int_{x_0}^{+\infty} dx\, f(x)\left\{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x_0)\mathrm{Re}\left(Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)\right) - \mathrm{Re}\left(Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x_0)\right)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)\right\}}{\left|Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x_0)\right|^2}$$

$$Soit \quad F(\tau) = \frac{\tau\, Tanh(\pi\tau)}{\left|Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x_0)\right|^2}\left\{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x_0)\int_{x_0}^{+\infty} dx\, f(x)\mathrm{Re}\left(Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)\right) - \mathrm{Re}\left(Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x_0)\right)\int_{x_0}^{+\infty} dx\, f(x)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)\right\}$$

.

Prenons un exemple simple où la fonction est constante entre η€[lη0 et lη1] puis s'annule au delà :

$$f(\eta) = \begin{cases} T_0 & \eta \in [l_{\eta 0}, l_{\eta 1}] \\ 0 & \eta \in]l_{\eta 1}, +\infty) \end{cases} \Rightarrow \int_{Cosh(l_{\eta 0})}^{Cosh(l_{\eta 1})} dx\, P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x) = \frac{1}{2\left(-\frac{1}{2}+i\tau\right)+1}\left[P_{-\frac{1}{2}+i\tau+1}(z) - P_{-\frac{1}{2}+i\tau-1}(z)\right]_{Cosh(l_{\eta 0})}^{Cosh(l_{\eta 1})}$$

$$Idem\ avec \quad \int_{Cosh(l_{\eta 0})}^{Cosh(l_{\eta 1})} dx\, L_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x) = \frac{1}{2\left(-\frac{1}{2}+i\tau\right)+1}\left[L_{-\frac{1}{2}+i\tau+1}(z) - L_{-\frac{1}{2}+i\tau-1}(z)\right]_{Cosh(l_{\eta 0})}^{Cosh(l_{\eta 1})}$$

$$\Rightarrow \int_{Cosh(l_{\eta 0})}^{Cosh(l_{\eta 1})} dx\, P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x) = \frac{1}{2i\tau}\left[P_{\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(l_{\eta 1})) - P_{\frac{1}{2}-i\tau}(Cosh(l_{\eta 1})) - P_{\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(l_{\eta 0})) + P_{\frac{1}{2}-i\tau}(Cosh(l_{\eta 0}))\right]$$

$$\Rightarrow \int_{Cosh(l_{\eta 0})}^{Cosh(l_{\eta 1})} dx\, L_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x) = \frac{1}{2i\tau}\left[L_{\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(l_{\eta 1})) - L_{\frac{1}{2}-i\tau}(Cosh(l_{\eta 1})) - L_{\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(l_{\eta 0})) + L_{\frac{1}{2}-i\tau}(Cosh(l_{\eta 0}))\right].$$

On remarquera que les valeurs des fonctions coniques de première et deuxième espèce modifiées par Ulitko sont toutes deux réels. En effet d'après les propriétés miroirs des fonctions coniques (Legendre) et des fonctions construites L, il vient :

$$P_{\bar{\nu}}(x)=\overline{P_{\nu}(x)}\Rightarrow P_{\frac{1}{2}+i\tau}(x)=\overline{P_{\frac{1}{2}-i\tau}(x)}\Leftrightarrow P_{\frac{1}{2}-i\tau}(x)=\overline{P_{\frac{1}{2}+i\tau}(x)}\Rightarrow z=P_{\frac{1}{2}+i\tau}(x)\Rightarrow\frac{\left[P_{\frac{1}{2}+i\tau}(x)-P_{\frac{1}{2}-i\tau}(x)\right]}{2i}=\frac{z-\bar{z}}{2i}$$

Et de même :

$$L_{\frac{1}{2}+i\tau}(x)=\overline{L_{\frac{1}{2}-i\tau}(x)}\Leftrightarrow L_{\frac{1}{2}-i\tau}(x)=\overline{L_{\frac{1}{2}+i\tau}(x)}\Rightarrow Posons\quad z=L_{\frac{1}{2}+i\tau}(x)\Rightarrow\frac{\left[L_{\frac{1}{2}+i\tau}(x)-L_{\frac{1}{2}-i\tau}(x)\right]}{2i}=\frac{z-\bar{z}}{2i}.$$

Il reste à remarquer que les fonctions propres sont elles-mêmes à valeur réelle, pour la fonction conique de première espèce, nous l'avons déjà remarqué. Pour celle de deuxième espèce, il vient toujours avec la propriété miroir (voir également les propriétés des fonctions coniques de Mehler en fin de section):

$$\left.\begin{array}{l}Q_{\bar{\nu}}(x)=\overline{Q_{\nu}(x)}\\ Q_{-\nu-1}(x)=Q_{\nu}(x)-\pi\dfrac{Cos(\nu\pi)}{Sin(\pi\nu)}P_{\nu}(x)\end{array}\right\}\Rightarrow Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)=\overline{Q_{-\frac{1}{2}-i\tau}(x)}$$

$$et\quad \nu=-\frac{1}{2}+i\tau\Rightarrow Cotan(\nu\pi)=\frac{Cos\left(\pi\left(-\frac{1}{2}+i\tau\right)\right)}{Sin\left(\pi\left(-\frac{1}{2}+i\tau\right)\right)}=-i\frac{Sinh(\pi\tau)}{Cosh(\pi\tau)}=-iTanh(\pi\tau)$$

$$\Rightarrow Q_{-\frac{1}{2}-i\tau}(x)=Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)+i\pi Tanh(\pi\tau)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)\Rightarrow P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)=\frac{i}{\pi}Cotanh(\pi\tau)\left(Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)-Q_{-\frac{1}{2}-i\tau}(x)\right)$$

$$\Rightarrow Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)=\overline{Q_{-\frac{1}{2}-i\tau}(x)}=\overline{Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)}-i\pi Tanh(\pi\tau)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)$$

$$\Rightarrow Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)-\overline{Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)}=-i\pi Tanh(\pi\tau)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)$$

$$\Rightarrow P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)=\frac{i}{\pi}Cotanh(\pi\tau)\left(Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)-\overline{Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)}\right)$$

La solution du problème aux limites d'un hyperboloïde tronqué à valeur constante à support borné sur sa surface latérale, et nulle sur la troncature s'écrit donc :

$$Posons \quad x_0 = Cosh(\eta_0) \quad x = Cosh(\eta)$$

$$T(x,\theta) = \int_0^{+\infty} d\tau \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{Tanh(\pi\tau)F(\tau)}{\left(Sinh(\pi\tau)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x_0)\right)^2 + \left(L_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x_0)\right)^2} \times \\ \times \left\{ P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x_0)L_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x) - L_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x_0)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x) \right\} \dfrac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\theta))}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\theta_0))} \end{array} \right\}$$

$$F(\tau) = \left\{ \begin{array}{l} P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x_0)\left[\dfrac{L_{\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(l_{\eta 1})) - L_{\frac{1}{2}-i\tau}(Cosh(l_{\eta 1}))}{2i} - \dfrac{L_{\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(l_{\eta 0})) - L_{\frac{1}{2}-i\tau}(Cosh(l_{\eta 0}))}{2i} \right] - \\ - L_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x_0)\left[\dfrac{P_{\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(l_{\eta 1})) - P_{\frac{1}{2}-i\tau}(Cosh(l_{\eta 1}))}{2i} - \dfrac{P_{\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(l_{\eta 0})) - P_{\frac{1}{2}-i\tau}(Cosh(l_{\eta 0}))}{2i} \right] \end{array} \right\}.$$

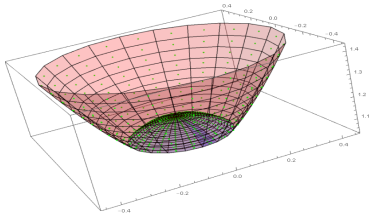
Représentation intégrale modifiée dans le cas d'un problème aux limites de Dirichlet sur [η_0,+∞[et Robin homogène en $\eta = \eta_0$, d'après l'article de N.A.BELOVA.Ia.S.UFLIAND, «Torsion of a truncated hyperboloid », PMM Vol. 34, No. 2, 1970, pp. 349-354»

Contrairement à l'article qui exhibe une solution à dépendance azimutale, ici nous nous restreignons volontairement à un problème axi-symétrique sans dépendance à l'angle ϕ. Les formes intégrales données ci-après permettent de construire la solution du problème aux limites suivant :

$$\Delta T(\eta,\theta)=0 \quad (\eta,\theta)\in\{\eta_0\le\eta\le\infty, 0\le\theta<\theta_0\}$$

$$Lim_{\theta\to 0}T(\eta,\theta) \quad finie \quad Lim_{\eta\to\infty}T(\eta,\theta) \quad finie \qquad \alpha_\theta\frac{\partial T(\eta,\theta)}{\partial\theta}+\beta_\theta T(\eta,\theta)\Big|_{\theta=\theta_0}=f(\eta)$$

$$x=Cosh(\eta) \quad dx=Sinh(\eta)d\eta \quad \frac{\alpha_\eta}{Sinh(\eta)}\frac{\partial T(\eta,\theta)}{\partial\eta}+\beta_\eta T(\eta,\theta)\Big|_{\eta=\eta_0}=0\Rightarrow\alpha_\eta\frac{\partial T(x,\theta)}{\partial x}+\beta_\eta T(x,\theta)\Big|_{\eta=\eta_0}=0$$



En posant : $x=Cosh(\eta) \quad et \quad x_0=Cosh(\eta_0)$*, et en appliquant les conditions aux limites, la forme de la solution est la suivante :*

$$Posons \quad D_\tau(\theta_0)=\beta_\theta P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\theta_0))-\alpha_\theta Sin(\theta_0)\frac{\partial P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\theta_0))}{\partial\theta}$$

$$y_\tau(x,x_0)=\left(\alpha_\eta\frac{\partial Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x_0)}{\partial x}+\beta_\eta Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x_0)\right)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)-\left(\alpha_\eta\frac{\partial P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x_0)}{\partial x}+\beta_\eta P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x_0)\right)Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)$$

$$\Rightarrow\alpha_\eta\frac{\partial y_\tau(x,x_0)}{\partial x}+\beta_\eta y_\tau(x,x_0)\Big|_{\eta=\eta_0}=0$$

$$\Rightarrow y_\tau(\eta,\eta_0)=\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{\alpha_\eta}{Sinh(\eta_0)}\frac{\partial Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta_0))}{\partial\eta}+\beta_\eta Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta_0))\right)\times P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta))-\\ -\left(\frac{\alpha_\eta}{Sinh(\eta_0)}\frac{\partial P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta_0))}{\partial\eta}+\beta_\eta P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta_0))\right)\times Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta))\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow\alpha_\eta\frac{\partial y_\tau(\eta,\eta_0)}{Sinh(\eta)\partial\eta}+\beta_\eta y_\nu(\eta,\eta_0)\Big|_{\eta=\eta_0}=0$$

$$\Rightarrow T(\eta,\theta)=\int_0^{+\infty}d\tau\,F(\tau)y_\tau(\eta,\eta_0)\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\theta))}{D_\tau(\theta_0)}$$

Cette forme de solution revient à rechercher un développement intégral spécifique de la fonction limite f(x), dont l'article exhibe la transformation inverse comme suit :

$$f(x)=\int_0^{+\infty} d\tau\, F(\tau) y_\tau(\eta,\eta_0) \Leftrightarrow F(\tau)=\frac{\tau\, Tanh(\pi\tau)}{\left(\left|\alpha_\eta \frac{\partial Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x_0)}{\partial x}+\beta_\eta Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x_0)\right|^2\right)}\int_{x_0}^{+\infty} dx\, f(x) y_\tau(x,x_0)$$

.

Résumons la forme de la solution formelle de ce type de problème :

$$\Delta T(\eta,\theta)=0 \quad (\eta,\theta)\in\{\eta_0\le\eta\le\infty, 0\le\theta<\theta_0\}$$

$$Lim_{\theta\to 0} T(\eta,\theta) \quad finie \quad Lim_{\eta\to\infty} T(\eta,\theta) \quad finie \qquad \alpha_\theta \frac{\partial T(\eta,\theta)}{\partial\theta}+\beta_\theta T(\eta,\theta)\Big|_{\theta=\theta_0}=f(\eta)$$

$$x=Cosh(\eta) \quad dx=Sinh(\eta)d\eta \quad \frac{\alpha_\eta}{Sinh(\eta)}\frac{\partial T(\eta,\theta)}{\partial\eta}+\beta_\eta T(\eta,\theta)\Big|_{\eta=\eta_0}=0 \Rightarrow \alpha_\eta \frac{\partial T(x,\theta)}{\partial x}+\beta_\eta T(x,\theta)\Big|_{\eta=\eta_0}=0$$

$$y_\tau(x,x_0)=\left(\alpha_\eta \frac{\partial Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x_0)}{\partial x}+\beta_\eta Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x_0)\right)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)-\left(\alpha_\eta \frac{\partial P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x_0)}{\partial x}+\beta_\eta P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x_0)\right)Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)$$

$$D_\tau(\theta_0)=\beta_\theta P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\theta_0))-\alpha_\theta Sin(\theta_0)\frac{\partial P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\theta_0))}{\partial\theta}$$

$$F(\tau)=\frac{\tau\, Tanh(\pi\tau)}{\left(\left|\alpha_\eta \frac{\partial Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x_0)}{\partial x}+\beta_\eta Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x_0)\right|^2\right)}\int_{x_0}^{+\infty} dx\, f(x) y_\tau(x,x_0) \Rightarrow T(\eta,\theta)=\int_0^{+\infty} d\tau\, F(\tau) y_\tau(\eta,x_0)\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\theta))}{D_\tau(\theta_0)}$$

On retrouve la solution précédente du problème homogène de Dirichlet sur la troncature, en posant α_η=0, β_η=1, α_ϑ=0, β_ϑ=1. Et pour le cas *α_η=1, β_η=0, α_ϑ=0, β_ϑ=1, on peut alors exhiber la solution pour un problème homogène de Neumann sur la troncature :*

$$\Delta T(\eta,\theta)=0 \quad (\eta,\theta)\in\{\eta_0\le\eta\le\infty, 0\le\theta<\theta_0\}$$

$$Lim_{\theta\to 0} T(\eta,\theta) \quad finie \quad Lim_{\eta\to\infty} T(\eta,\theta) \quad finie \qquad T(\eta,\theta)\big|_{\theta=\theta_0}=f(\eta)$$

$$x=Cosh(\eta) \quad \frac{\partial T(\eta,\theta)}{\partial\eta}\Big|_{\eta=\eta_0}=0 \Rightarrow \alpha_\eta \frac{\partial T(x,\theta)}{\partial x}\Big|_{x=x_0}=0 \quad y_\tau(x,x_0)=\frac{\partial Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x_0)}{\partial x}P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)-\frac{\partial P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x_0)}{\partial x}Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)$$

$$F(\tau)=\frac{\tau\, Tanh(\pi\tau)}{\left(\left|\frac{\partial Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x_0)}{\partial x}\right|^2\right)}\int_{x_0}^{+\infty} dx\, f(x) y_\tau(x,x_0) \Rightarrow T(\eta,\theta)=\int_0^{+\infty} d\tau\, F(\tau) y_\tau(\eta,x_0)\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\theta))}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\theta_0))}$$

.

On précise également que le noyau est bien une expression réelle :

$$y_\tau(x,x_0)=\left\{\left(\alpha_\eta\frac{\partial Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x_0)}{\partial x}+\beta_\eta Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x_0)\right)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)-\left(\alpha_\eta\frac{\partial P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x_0)}{\partial x}+\beta_\eta P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x_0)\right)Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)\right\}.$$

Car elle est formée par la combinaison linéaire des deux expressions qui sont toutes deux réelles :

$$y_{1\tau}(x,x_0)=Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x_0)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)-P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x_0)Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)\quad\in\mathbf{R}$$

$$y_{2\tau}(x,x_0)=\frac{\partial Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x_0)}{\partial x}P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)-\frac{\partial P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x_0)}{\partial x}Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)=\left.\frac{\partial y_{1\tau}(x,y)}{\partial y}\right|_{y=x_0}\quad\in\mathbf{R}$$

$$\Rightarrow y_\tau(x,x_0)=\alpha_\eta y_{2\tau}(x,x_0)+\beta_\eta y_{1\tau}(x,x_0)\quad\in\mathbf{R}$$

Le système de coordonnées sphéroïdales aplaties (oblate spheroidal)

Ce système de coordonnées est défini par le changement de variable : $\begin{array}{l} x = c\,Cosh(\eta)\,Sin(\vartheta)Cos(\varphi) \\ y = c\,Cosh(\eta)\,Sin(\vartheta)Sin(\varphi) \\ z = c\,Sinh(\eta)\,Cos(\vartheta) \end{array}$

Typiquement nous recherchons la solution du problème aux limites intérieur en coordonnées sphéroïdales aplaties sur un espace bornée dans les limites $\eta \in [0,+\infty]$; $\vartheta \in [0,\pi]$; $\varphi \in [0,2\pi]$ *soit* $\eta \in [\eta_1,\eta_2]$; $\vartheta \in [\vartheta_1,\vartheta_2]$; $\varphi \in [\varphi_1,\varphi_2]$. *Notons que sur la tranche θ=π/2, le système de coordonnées comporte un cercle limite lorsque η=0 :* $x^2+y^2=c^2 \quad z=0$. *Par contre l'iso-surface η=0 est donnée par le disque de rayon a sur le plan (x,y) (tracé concentrique de cercles successifs de rayon aSin(ϑ) sur le plan (x,y)).* $x = c\,Sin(\vartheta)Cos(\varphi) \quad y = c\,Sin(\vartheta)Sin(\varphi) \quad z=0$. *Dans ces conditions le domaine* $\eta \in [0,l_\eta]$; $\vartheta \in [0,\pi]$; $\varphi \in [0,2\pi]$ *paramètre bien complètement tout point intérieur du sphéroïde aplati en coordonnées cartésiennes.*

Le Jacobien en coordonnées sphéroïdales *aplaties* et la métrique sont :

$$J = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \vartheta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \vartheta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} cSinh(\eta)Sin(\vartheta)Cos(\varphi) & cCosh(\eta)Cos(\vartheta)Cos(\varphi) & -cCosh(\eta)Sin(\vartheta)Sin(\varphi) \\ cSinh(\eta)Sin(\vartheta)Sin(\varphi) & cCosh(\eta)Cos(\vartheta)Sin(\varphi) & cCosh(\eta)Sin(\vartheta)Cos(\varphi) \\ cCosh(\eta)Cos(\vartheta) & -cSinh(\eta)Sin(\vartheta) & 0 \end{pmatrix}$$

$$= c^3\ (\mathrm{Cosh}^3[\eta]^2\mathrm{Cos}[\vartheta]Sin[\vartheta] + \mathrm{Cosh}[\eta]^2\mathrm{Sinh}[\eta]Sin^3[\vartheta])$$

$$= c^3\ \mathrm{Cosh}[\eta]\mathrm{Sin}[\vartheta](\mathrm{Cosh}^2[\eta]\mathrm{Cos}^2[\vartheta] + \mathrm{Sinh}^2[\eta]Sin^2[\vartheta])$$

$$J = c^3\mathrm{Cosh}[\eta]\mathrm{Sin}[\vartheta](\mathrm{Cosh}^2[\eta]\mathrm{Co}^2\mathrm{s}[\vartheta] + (1 - \mathrm{Cos}^2[\vartheta])\mathrm{Sinh}^2[\eta])$$

$$J = c^3\mathrm{Cosh}[\eta]\mathrm{Sin}[\vartheta](\mathrm{Cos}^2[\vartheta] + \mathrm{Sinh}^2[\eta]) \quad or \quad \mathrm{Cos}^2[\vartheta] + \mathrm{Sinh}^2[\eta] = \mathrm{Cosh}^2[\eta] - \mathrm{Sin}^2[\vartheta]$$

$$J = c^3\mathrm{Cosh}[\eta]\mathrm{Sin}[\vartheta](1 - \mathrm{Sin}^2[\vartheta] + \mathrm{Cosh}^2[\eta] - 1)$$

$$J = c^3\mathrm{Cosh}[\eta]\mathrm{Sin}[\vartheta](\mathrm{Cosh}^2[\eta] - \mathrm{Sin}^2[\vartheta])$$

ou bien

$$J = c^3\mathrm{Cosh}[\eta]\mathrm{Sin}[\vartheta](Cos^2[\vartheta] + Sinh^2[\eta])$$

$$J = 0 \Leftrightarrow Cos[\vartheta] = \pm i\,Sinh[\eta] \Rightarrow singularité\ du\ Jacobien$$

$$ds^2 = c^2\left(\mathrm{Cosh}^2[\eta] - \mathrm{Sin}^2[\vartheta]\right)(d\eta^2 + d\theta^2) + c^2\mathrm{Cosh}^2[\eta]\mathrm{Sin}^2[\vartheta]d\varphi^2$$

ou bien

$$ds^2 = c^2\left(Cos^2[\vartheta] + Sinh^2[\eta]\right)(d\eta^2 + d\theta^2) + c^2\mathrm{Cosh}^2[\eta]\mathrm{Sin}^2[\vartheta]d\varphi^2$$

L'équation de Laplace en coordonnées sphéroïdales *aplaties* 3D (η,ϑ,φ) s'écrit sous la forme

$$\frac{1}{c^2\left(Cosh^2(\eta) - Sin^2(\theta)\right)}\left(\frac{\partial^2 T(\eta,\theta,\varphi)}{\partial \eta^2} + Tanh(\eta)\frac{\partial T(\eta,\theta,\varphi)}{\partial \eta} + \frac{\partial^2 T(\eta,\theta,\varphi)}{\partial \theta^2} + Cotan(\theta)\frac{\partial T(\eta,\theta,\varphi)}{\partial \theta}\right)$$

$$+ \frac{1}{c^2 Cosh^2(\eta)Sin^2(\theta)}\frac{\partial^2 T(\eta,\theta,\varphi)}{\partial \varphi^2} = 0 \quad Cotanh(\eta) = \frac{Cosh(\eta)}{Sinh(\eta)} \quad Tanh(\eta) = \frac{Sinh(\eta)}{Cosh(\eta)} \quad Cotan(\theta) = \frac{Cos(\theta)}{Sin(\theta)}$$

Le gradient dans ce système de coordonnées prenant la forme :

$$\overrightarrow{Grad\left(T(\eta,\theta,\phi)\right)} =$$

$$\frac{1}{c\sqrt{\left(Cosh^2(\eta)-Sin^2(\theta)\right)}}\left(\left(\frac{\partial T(\eta,\theta,\phi)}{\partial\eta}\right)\mathbf{I}_\eta+\left(\frac{\partial T(\eta,\theta,\phi)}{\partial\theta}\right)\mathbf{I}_\theta\right)+\frac{1}{c\,Cosh(\eta)Sin(\theta)}\left(\frac{\partial T(\eta,\theta,\phi)}{\partial\phi}\right)\mathbf{I}_\phi$$

Les conditions mixtes de Robin sur une iso-surface η=*Cste ou ϑ=Cste prennent alors la forme :*

$$Iso-surface\ \eta = Cste$$

$$C.L.\quad \alpha\,\frac{1}{\sqrt{\left(Cosh^2(\eta)-Sin^2(\theta)\right)}}\frac{\partial T(\eta,\vartheta,\varphi)}{\partial\eta}+\beta\,T(\eta,\vartheta,\varphi)\Big|_{\eta=\eta_0} = f_{\partial\Omega}(\vartheta,\varphi)$$

$$Iso-surface\ \vartheta = Cste$$

$$C.L.\quad \alpha\,\frac{1}{\sqrt{\left(Cosh^2(\eta)-Sin^2(\theta)\right)}}\frac{\partial T(\eta,\vartheta,\varphi)}{\partial\vartheta}+\beta\,T(\eta,\vartheta,\varphi)\Big|_{\vartheta=\vartheta_0} = f_{\partial\Omega}(\eta,\varphi)$$

Si les conditions sont homogènes, et dans le cadre de la méthode de séparation des variables, il vient :

$$Séparation\ des\ variables \Rightarrow T(\eta,\vartheta,\varphi) = R(\eta)\Theta(\vartheta)\Phi(\varphi)$$

$$\begin{cases} Iso-surface\ \eta = Cste \\ C.L.\quad \alpha\,\dfrac{1}{\sqrt{\left(Cosh^2(\eta)-Sin^2(\theta)\right)}}\dfrac{\partial R(\eta)}{\partial\eta}+\beta\,R(\eta)\Big|_{\eta=\eta_0} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} Iso-surface\ \vartheta = Cste \\ C.L.\quad \alpha\,\dfrac{1}{\sqrt{\left(Cosh^2(\eta)-Sin^2(\theta)\right)}}\dfrac{\partial \Theta(\vartheta)}{\partial\vartheta}+\beta\,\Theta(\vartheta)\Big|_{\vartheta=\vartheta_0} = \end{cases}$$

La variabilité radiale et angulaire de la condition aux limites introduit donc une difficulté de résolution supplémentaire puisque le système de valeur propre et fonction propre radiale ou angulaire dépendrait alors de la position sur l'iso-surface (en clair cela m'est insurmontable). Dans ce cas de figure on simplifie le problème en supposant, de manière <u>tout à fait académique et certainement irréaliste</u>, que la condition aux limites mixte possède des coefficients indépendant de l'espace. En conclusion des solutions sont exhibées volontairement avec des conditions mixtes fixes, comme suit :

$$C.L.\quad Iso-surface\ \eta = Cste \Rightarrow \alpha\,\frac{\partial R(\eta)}{\partial\eta}+\beta\,R(\eta)\Big|_{\eta=\eta_0} = 0 \quad Iso-surface\ \vartheta = Cste \Rightarrow \alpha\,\frac{\partial \Theta(\vartheta)}{\partial\vartheta}+\beta\,\Theta(\vartheta)\Big|_{\vartheta=\vartheta_0} = 0$$

ce qui permet d'ailleurs de condenser en une seule formule, les deux cas limites Dirichlet et Neumann. En revanche les problèmes avec condition de Neumann ou de Dirichlet sont eux susceptible d'être résolus entièrement par la méthode de séparation des variables.

<u>Iso-surfaces du système de coordonnées</u>

Les iso-surfaces η=Ctse, sont des ellipsoïdes de révolution données par la formule implicite :

$$\frac{x^2+y^2}{c^2\,Cosh^2(\eta)}+\frac{z^2}{c^2\,Sinh^2(\eta)}=1$$

Les iso-surfaces ϑ=Ctse, sont des hyperboloïdes de révolution à une seule nappe données par la formule implicite : $\dfrac{x^2+y^2}{c^2\,Sin^2(\theta)}-\dfrac{z^2}{c^2\,Cos^2(\theta)}=1$

Les iso-surfaces ϕ=Ctse, sont des plans $Tan(\varphi)=\dfrac{y}{x}$

Transformation du système de coordonnées sphéroidales aplati au système cylindrique

$$\left.\begin{cases} x = c\,Cosh(\eta)\,Sin(\vartheta)Cos(\varphi) \\ y = c\,Cosh(\eta)\,Sin(\vartheta)Sin(\varphi) \\ z = c\,Sinh(\eta)Cos(\vartheta) \end{cases}\right\} \quad \left.\rho = c\,Cosh(\eta)\,Sin(\vartheta)\right\} \quad \frac{z^2}{Sinh^2(\eta)} + \frac{\rho^2}{Cosh^2(\eta)} = c^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left(1+Sinh^2(\eta)\right)z^2 + \rho^2 Sinh^2(\eta) = c^2 Sinh^2(\eta)\left(1+Sinh^2(\eta)\right) \\ Cosh^2(\eta)z^2 + \rho^2\left(Cosh^2(\eta)-1\right) = c^2\left(Cosh^2(\eta)-1\right)Cosh^2(\eta) \end{cases}$$

$$Comme \quad \sqrt{\left(z^2+\rho^2+c^2\right)^2 - 4c^2\rho^2} = \sqrt{z^4+\rho^4+c^4+2z^2\rho^2-2c^2\rho^2+2z^2c^2} = \sqrt{\left(z^2+\rho^2-c^2\right)^2+4c^2z^2}$$

$$\lambda = Sinh^2(\eta) \Rightarrow c^2\lambda^2 + \lambda\left(c^2-\rho^2-z^2\right) - z^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \dfrac{z^2+\rho^2-c^2-\sqrt{\left(z^2+\rho^2-c^2\right)^2+4c^2z^2}}{2c^2} < 0 \\ \lambda_2 = \dfrac{z^2+\rho^2-c^2+\sqrt{\left(z^2+\rho^2-c^2\right)^2+4c^2z^2}}{2c^2} > 0 \end{cases}$$

$$\lambda = Cosh^2(\eta) \Rightarrow c^2\lambda^2 - \lambda\left(c^2+\rho^2+z^2\right) + \rho^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} 0 < \lambda_1 = \dfrac{z^2+\rho^2+c^2-\sqrt{\left(z^2+\rho^2+c^2\right)^2-4c^2\rho^2}}{2c^2} < 1 \\ \lambda_2 = \dfrac{z^2+\rho^2+c^2+\sqrt{\left(z^2+\rho^2+c^2\right)^2-4c^2\rho^2}}{2c^2} > 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Sinh(\eta) = \sqrt{\dfrac{z^2+\rho^2-c^2+\sqrt{\left(z^2+\rho^2-c^2\right)^2+4c^2z^2}}{2c^2}} \\ Cosh(\eta) = \sqrt{\dfrac{z^2+\rho^2+c^2+\sqrt{\left(z^2+\rho^2-c^2\right)^2-4c^2\rho^2}}{2c^2}} \end{cases}$$

D'autres formules de passage sont équivalentes :

$$\left.\begin{matrix} d_1{}^2 = (\rho+c)^2 + z^2 \\ d_2{}^2 = (\rho-c)^2 + z^2 \end{matrix}\right\} \quad Cosh(\eta) = \frac{d_1+d_2}{2c} \Rightarrow Sinh^2(\eta) = \frac{d_1{}^2+d_2{}^2+2d_1d_2-4c^2}{4c^2}$$

$$\Rightarrow d_1d_2 = \sqrt{(\rho+c)^2+z^2}\sqrt{(\rho-c)^2+z^2} = \sqrt{\left(\rho^2+c^2+z^2+2c\rho\right)\left(\rho^2+c^2+z^2-2c\rho\right)}$$

$$= \sqrt{\left(z^2+\rho^2+c^2\right)^2-4c^2\rho^2} = \sqrt{\left(z^2+\rho^2-c^2\right)^2+4c^2z^2} = \sqrt{z^4+\rho^4+c^4+2\rho^2z^2+2c^2z^2-2c^2\rho^2}$$

$$\frac{d_1{}^2+d_2{}^2}{2} = \frac{(\rho+c)^2+(\rho-c)^2+2z^2}{2} = z^2+c^2+\rho^2 \Rightarrow Sinh^2(\eta) = \frac{z^2+\rho^2-c^2+\sqrt{\left(z^2+\rho^2-c^2\right)^2+4c^2z^2}}{2c^2}$$

Pour la variable angulaire :

$$\frac{\rho^2}{Cos^2(\vartheta)}-\frac{z^2}{Sin^2(\vartheta)}=c^2 \Rightarrow \rho^2 Sin^2(\vartheta)-z^2Cos^2(\vartheta)=c^2Sin^2(\vartheta)Cos^2(\vartheta)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c^2Cos^2(\vartheta)\left(1-Cos^2(\vartheta)\right)=\rho^2\left(1-Cos^2(\vartheta)\right)-z^2Cos^2(\vartheta) \\ c^2Sin^2(\vartheta)\left(1-Sin^2(\vartheta)\right)=\rho^2Sin^2(\vartheta)-z^2\left(1-Sin^2(\vartheta)\right) \end{cases} \quad Or\ \sqrt{\left(z^2+\rho^2+c^2\right)^2-4c^2\rho^2}=\sqrt{\left(z^2+\rho^2-c^2\right)^2+4c^2z^2}$$

$$\lambda=Cos^2(\vartheta)\Rightarrow c^2\lambda(1-\lambda)=z^2(1-\lambda)-\rho^2\lambda \Rightarrow \begin{cases} 0<\lambda_1=\dfrac{2c^2+z^2+\rho^2-c^2-\sqrt{\left(z^2+\rho^2-c^2\right)^2+4c^2z^2}}{2c^2}<1 \\ \lambda_2=\dfrac{2c^2+z^2+\rho^2-c^2+\sqrt{\left(z^2+\rho^2-c^2\right)^2+4c^2z^2}}{2c^2}>1 \end{cases}$$

$$\lambda=Sin^2(\vartheta)\Rightarrow c^2\lambda(1-\lambda)=z^2\lambda-\rho^2(1-\lambda)\Rightarrow \begin{cases} 0<\lambda_1=\dfrac{\sqrt{\left(z^2+\rho^2-c^2\right)^2+4c^2z^2}-\left(z^2+\rho^2-c^2\right)}{2c^2}<1 \\ \lambda_2=\dfrac{-\sqrt{\left(z^2+\rho^2-c^2\right)^2+4c^2z^2}-\left(z^2+\rho^2-c^2\right)}{2c^2}<0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Cos^2(\vartheta)=\dfrac{c^2+z^2+\rho^2-\sqrt{\left(z^2+\rho^2+c^2\right)^2-4c^2\rho^2}}{2c^2} \\ Sin^2(\vartheta)=\dfrac{\sqrt{\left(z^2+\rho^2-c^2\right)^2+4c^2z^2}-\left(z^2+\rho^2-c^2\right)}{2c^2} \end{cases}$$

$$Cos^2(\vartheta)=\frac{c^2+z^2+\rho^2-\sqrt{\left(z^2+\rho^2+c^2\right)^2-4c^2\rho^2}}{2c^2}=\frac{\dfrac{{d_1}^2+{d_2}^2}{2}-d_1d_2}{2c^2}=\frac{(d_1-d_2)^2}{4c^2}\Rightarrow Cos(\vartheta)=\frac{d_1-d_2}{2c}$$

.

Considération sur l'indépendance et la dépendance des solutions, partie réelle, partie imaginaire

Avant d'aborder la question de la singularité du gradient, donnons quelques propriétés d'indépendance des solutions communément utilisées dans la résolution de problème aux limites en coordonnées sphéroïdales aplaties, car la particularité des solutions est d'introduire un argument imaginaire tant sur les fonctions de Legendre que les fonctions coniques de Mehler.

Commençons par les fonctions de Legendre de première et deuxième espèce de degré réel et d'argument imaginaire, dans ce cas les deux fonctions de première et deuxième espèce sont également à valeur imaginaire, avec des relations en partie réelle et imaginaire comme suit :

$$\textit{Symétrie du mirroir}$$

$$P_{\lambda_n}(\bar{z}) = \overline{P_{\lambda_n}(z)} \quad Q_{\lambda_n}(\bar{z}) = \overline{Q_{\lambda_n}(z)}$$

$$\Rightarrow P_{\lambda_n}^{réel}(i\ Sinh(\eta)) = \frac{P_{\lambda_n}(i\ Sinh(\eta)) + \overline{P_{\lambda_n}(i\ Sinh(\eta))}}{2} = \frac{P_{\lambda_n}(i\ Sinh(\eta)) + P_{\lambda_n}(-i\ Sinh(\eta))}{2}$$

$$\Rightarrow Q_{\lambda_n}^{réel}(i\ Sinh(\eta)) = \frac{Q_{\lambda_n}(i\ Sinh(\eta)) + \overline{Q_{\lambda_n}(i\ Sinh(\eta))}}{2} = \frac{Q_{\lambda_n}(i\ Sinh(\eta)) + Q_{\lambda_n}(-i\ Sinh(\eta))}{2}$$

$$P_{\lambda_n}^{imag}(i\ Sinh(\eta)) = \frac{P_{\lambda_n}(i\ Sinh(\eta)) - \overline{P_{\lambda_n}(i\ Sinh(\eta))}}{2i} = \frac{P_{\lambda_n}(i\ Sinh(\eta)) - P_{\lambda_n}(-i\ Sinh(\eta))}{2i}$$

$$Q_{\lambda_n}^{imag}(i\ Sinh(\eta)) = \frac{Q_{\lambda_n}(i\ Sinh(\eta)) - \overline{Q_{\lambda_n}(i\ Sinh(\eta))}}{2i} = \frac{Q_{\lambda_n}(i\ Sinh(\eta)) - Q_{\lambda_n}(-i\ Sinh(\eta))}{2i}$$

$$\textit{Formule de connection}$$

$$Q_{\lambda_n}(i\ Sinh(\eta)) = \frac{\pi}{2Sin(\lambda_n \pi)}\left(e^{-i\pi\lambda_n} P_{\lambda_n}(i\ Sinh(\eta)) - P_{\lambda_n}(-i\ Sinh(\eta))\right)$$

$$Q_{\lambda_n}(-i\ Sinh(\eta)) = -e^{i\pi\lambda_n} Q_{\lambda_n}(i\ Sinh(\eta))$$

$$\textit{Couple } P_{\lambda_n}^{réel}(i\ Sinh(\eta)), P_{\lambda_n}^{imag}(i\ Sinh(\eta)) \textit{ linéairement indépendant}$$

$$Q_{\lambda_n}(i\ Sinh(\eta)) = \frac{\pi}{2Sin(\pi\nu)}\left(\left(e^{-i\pi\lambda_n} - 1\right)P_{\lambda_n}^{réel}(i\ Sinh(\eta)) + i\left(e^{-i\pi\lambda_n} + 1\right)P_{\lambda_n}^{imag}(i\ Sinh(\eta))\right)$$

Lorsque le degré des fonctions de Legendre de première et deuxième espèce sont entiers, alors il vient les propriétés suivantes :

$$P_n(-i\ z) = (-1)^n P_n(i\ z)$$

$$P_n(\bar{z}) = \overline{P_n(z)}$$

$$P_{2n}(-i\ z) = P_{2n}(i\ z) \Rightarrow P_{2n}(i\ z) = \overline{P_{2n}(i\ z)} \quad \textit{purement réel}$$

$$P_{2n+1}(-i\ z) = -P_{2n+1}(i\ z) \Rightarrow P_{2n+1}(i\ z) = -\overline{P_{2n+1}(i\ z)} \quad \textit{purement imaginaire}$$

$$Q_n(-z) = -(-1)^n Q_n(z)$$

$$Q_n(\bar{z}) = \overline{Q_n(z)}$$

$$Q_n(-i\ z) = -(-1)^n Q_n(i\ z)$$

$$Q_n(\bar{z}) = \overline{Q_n(z)}$$

$$Q_{2n}(-i\ z) = -Q_{2n}(i\ z) \Rightarrow Q_{2n}(i\ z) = -\overline{Q_{2n}(i\ z)} \quad \textit{purement imaginaire}$$

$$Q_{2n+1}(-i\ z) = -Q_{2n+1}(i\ z) \Rightarrow Q_{2n+1}(i\ z) = \overline{Q_{2n+1}(i\ z)} \quad \textit{purement réel}$$

Autrement dit suivant la parité du degré entier, il faut osciller entre le choix de la partie réelle de la fonction de première espèce et la partie imaginaire de la fonction de deuxième espèce comme couple de fonctions indépendantes et inversement.

On rejoint la même conclusion sur les fonctions de degré non entiers, soit que l'on ne doit pas prendre les parties réelles ou imaginaires simultanément entre première et deuxième espèce comme couple de fonctions indépendantes.

Les choix des fonctions propres pour un problème homogène radiale sur l'hyperboloïde à deux nappes, met en jeu les fonctions coniques de Mehler d'argument réel (W est le Wronskien) avec les relations suivantes qui sont également valables quand l'argument est imaginaire (x=a+ib), (voir en fin de section les propriétés des fonctions coniques de Mehler) :

$$L_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)=\frac{Cosh(\pi\tau)}{\pi}\left(Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)+Q_{-\frac{1}{2}-i\tau}(x)\right)=\frac{2Cosh(\pi\tau)}{\pi}\mathrm{Re}\left(Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)\right)$$

$$\Rightarrow Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)=\frac{\pi}{2Cosh(\pi\tau)}\left\{L_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)-iSinh(\pi\tau)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)\right\}$$

$$\mathrm{Re}\left(Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)\right)=\frac{\pi}{2Cosh(\pi\tau)}L_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)\quad et\quad \mathrm{Im}\left(Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)\right)=-\frac{\pi}{2}Tanh(\tau\pi)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)$$

$$W\left\{P^0_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x),Q^0_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)\right\}=\frac{1}{(1-x^2)}\Rightarrow W\left\{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x),L_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)\right\}=\frac{2Cosh(\pi\tau)}{\pi(1-x^2)}$$

.

Pour le problème sur l'hyperboloïde à une nappe (argument purement imaginaire) en utilisant les parties réelles et imaginaires des fonctions coniques de Mehler d'argument imaginaire qu'elles sont indépendantes dans l'espèce et inter-espèces, comme suit (W est le Wronskien, et voir en fin de section sur les systèmes sphéroïdaux oblong et prolog les propriétés sur les fonctions coniques de Mehler) :

$$\begin{cases} Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(i\,x) = \dfrac{\pi}{2Cosh(\tau\pi)}\left(-ie^{\pi\tau}P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(i\,x) + P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-i\,x)\right) \\ Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-i\,x) = ie^{-\pi\tau}Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(i\,x) \end{cases}$$

$$Propriété\ Miroir\ P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ix) = \overline{P_{-\frac{1}{2}-i\tau}(ix)} = \overline{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix)}$$

$$F_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x) = \frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix) + P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ix)}{2} = \mathrm{Re}\left(P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix)\right) \Rightarrow F_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x) \quad valeur\ réelle$$

$$G_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x) = \frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix) - P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ix)}{2i} = \mathrm{Im}\left(P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix)\right) \Rightarrow G_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x) \quad valeur\ réelle$$

$$\begin{cases} Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix) = \dfrac{\pi}{2Cosh(\tau\pi)}\left((1-ie^{+\pi\tau})F_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x) + (e^{+\pi\tau}-i)G_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)\right) \\ P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix) = F_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x) + iG_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x) \\ P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ix) = F_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x) - iG_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x) \end{cases}$$

$$W\left\{P^{\mu}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix), Q^{\mu}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix)\right\} = ie^{\mu\pi i}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\tau+\mu\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\tau-\mu\right)(1+x^2)} \quad W\left\{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix), Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix)\right\} = \frac{i}{(1+x^2)}$$

$$W\left\{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix), P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ix)\right\} = \frac{2iCosh(\pi\tau)}{\pi(1+x^2)} \neq 0$$

$$W\left\{F_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x), G_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)\right\} = -\frac{Cosh(\pi\tau)}{\pi(1+x^2)} \neq 0$$

<u>Singularité du système de coordonnées sphéroïdales aplaties et régularité du gradient</u>

Dans le cas où le domaine d'étude de la solution de l'équation de Laplace comporte *la courbe* η*=0 et ϑ=π/2, alors l*e système *de coordonnées sphéroïdales aplaties comporte une singularité en* η*=0 et ϑ=π/2. Cela se traduit par l'annulation du Jacobien sur ces valeurs et la singularité "apparente" du gradient de toute fonction solution de l'équation de Laplace. La solution doit donc neutraliser la singularité apparente du gradient en assurant une valeur bornée à ce dernier soit :*

$(\eta,\theta,\phi)\in\Omega \; et \; (0,0,z)\in\Omega \; ou \; (0,\pi,z)\in\Omega$

$$\overrightarrow{Grad\big(T(\eta,\theta,\phi)\big)}=$$

$$\frac{1}{c\sqrt{\left(Cosh^2(\eta)-Sin^2(\theta)\right)}}\left(\left(\frac{\partial T(\eta,\theta,\phi)}{\partial\eta}\right)\mathbf{I}_\eta+\left(\frac{\partial T(\eta,\theta,\phi)}{\partial\theta}\right)\mathbf{I}_\theta\right)+\frac{1}{c\,Cosh(\eta)Sin(\theta)}\left(\frac{\partial T(\eta,\theta,\phi)}{\partial\phi}\right)\mathbf{I}_\phi$$

$$Grad\big(T(\eta,\theta,\phi)\big)^2=$$

$$\frac{1}{c^2\left(Cosh^2(\eta)-Sin^2(\theta)\right)}\left(\left(\frac{\partial T(\eta,\theta,\phi)}{\partial\eta}\right)^2+\left(\frac{\partial T(\eta,\theta,\phi)}{\partial\theta}\right)^2\right)+\frac{1}{c^2Cosh(\eta)^2\,Sin(\theta)^2}\left(\frac{\partial T(\eta,\theta,\phi)}{\partial\phi}\right)^2$$

$$Singularité\ du\ Jacobien\quad J\Big|_{\substack{\eta=0\\ \theta=0,\pi}}=c^3Cosh(\eta)Sin(\theta)\left(Cosh^2(\eta)-Sin^2(\theta)\right)=0$$

$$condition\ Grad\big(T(\eta,\theta,\phi)\big)\ reste\ bornée\ \forall\,\eta,\theta$$

$$Soit\quad \frac{1}{c^2\left(Cosh^2(\eta)-Sin^2(\theta)\right)}\left(\left(\frac{\partial T(\eta,\theta,\phi)}{\partial\eta}\right)^2+\left(\frac{\partial T(\eta,\theta,\phi)}{\partial\theta}\right)^2\right)+\frac{1}{c^2Cosh(\eta)^2\,Sin(\theta)^2}\left(\frac{\partial T(\eta,\theta,\phi)}{\partial\phi}\right)^2_{\substack{\eta=0\\ \theta=0,\pi}}\to Cste$$

$$Soit\ \left(\frac{\partial T(\eta,\theta,\phi)}{\partial\eta}\right)^2+\left(\frac{\partial T(\eta,\theta,\phi)}{\partial\theta}\right)^2\Bigg|_{\substack{\eta=0\\ \theta=0,\pi}}\propto Cste\left(Cosh^2(\eta)-Sin^2(\theta)\right)$$

$$et\ \left(\frac{\partial T(\eta,\theta,\phi)}{\partial\phi}\right)^2\Bigg|_{\substack{\eta=0\\ \theta=0,\pi}}\propto Cste\,Cosh(\eta)^2\,Sin(\theta)^2$$

Il s'avère qu'en général la seule contrainte du respect d'une solution finie pour l'équation de Laplace suffit à assurer la contrainte de régularité du gradient sur les systèmes de coordonnées usuels (sphérique, cylindrique, sphéroïdale allongé), mais ce n'est pas le cas ici.

<u>Régularité du gradient des solutions sur un sphéroïde complet aplati, fonctions de Legendre de degré entier et d'argument imaginaire</u>

Nous verrons par la suite que pour les solutions sur un sphéroïde complet aplati dont les conditions aux limites ne dépendent pas de l'angle ϕ, il faut chercher dans les combinaisons linéaires de polynômes de Legendre :

$$Partie\,radiale\Rightarrow A\,P_n\big(i\,Sinh(\eta)\big)+B\,Q_n\big(i\,Sinh(\eta)\big)$$

$$Partie\,radiale\Rightarrow A+B\,Arctan[Sinh(\eta)]$$

$$Partie\,angulaire\Rightarrow A\,P_n\big(Cos(\theta)\big)+B\,Q_n\big(Cos(\theta)\big)$$

Pour la partie angulaire, le choix de la solution finie demeure valable pour les angles ϑ=0 et ϑ=π (en dehors de la singularité ϑ=π/2), conduisant à l'annulation B=0

$$Partie\,angulaire\Rightarrow Lim_{\theta\to0,\pi}Q_n\big(Cos(\theta)\big)=\pm\infty\Rightarrow A\,P_n\big(Cos(\theta)\big)$$

Mais cette fois-ci, pour la partie radiale, les deux fonctions de Legendre de première et deuxième espèce ne diverge pas pour η=0, en effet nous avons :

$$Q_n(i\,z)=\frac{1}{2}\left(P_n(i\,z)Log\left(\frac{1+i\,z}{1-i\,z}\right)+\sum_{k=0}^{\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor}\frac{2n-4k-1}{(2k+1)(n-k)}P_{n-2k-1}(i\,z)\right)$$

$$P_n(0)=\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{1-n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2+n}{2}\right)}\qquad Q_n(0)=\frac{-\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{1+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2+n}{2}\right)}Sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

En choisissant les fonctions de Legendre de première espèce P sur la singularité (η=0,ϑ=π/2, annulation en Cos(ϑ) =±iSinh(η)), il vient pour l'expression du gradient G:

$$Soit\ à\ démontrer\ \left(\frac{\partial T(\eta,\theta)}{\partial\eta}\right)^2+\left(\frac{\partial T(\eta,\theta)}{\partial\theta}\right)^2\Bigg|_{\substack{\eta=0\\ \theta=\frac{\pi}{2}}}\propto Cste\left(Cosh^2(\eta)-Sin^2(\theta)\right)\quad T(\eta,\theta)=P_n\left(i\,Sinh(\eta)\right)P_n\left(Cos(\theta)\right)$$

$$\frac{\partial T(\eta,\theta)}{\partial\eta}=iCosh(\eta)P_n'\left(i\,Sinh(\eta)\right)P_n\left(Cos(\theta)\right)\quad \frac{\partial T(\eta,\theta)}{\partial\theta}=-Sin(\theta)P_n\left(i\,Sinh(\eta)\right)P_n'\left(Cos(\theta)\right)$$

$$G=\left(\frac{\partial T(\eta,\theta)}{\partial\eta}\right)^2+\left(\frac{\partial T(\eta,\theta)}{\partial\theta}\right)^2\Bigg|_{\substack{\eta=0\\ \theta=\frac{\pi}{2}}}$$

$$G=Sin^2(\theta)\left(P_n\left(i\,Sinh(\eta)\right)\right)^2\left(P_n'\left(Cos(\theta)\right)\right)^2-Cosh^2(\eta)\left(P_n'\left(i\,Sinh(\eta)\right)\right)^2\left(P_n\left(Cos(\theta)\right)\right)^2$$

$$Cos(\theta)=\pm i\,Sinh(\eta)\Rightarrow Cos^2(\theta)+Sinh^2(\eta)=0$$

$$G\big|_{Cos(\theta)=i\,Sinh(\eta)}=G\big|_{Cos(\theta)=-i\,Sinh(\eta)}=\left(P_n\left(Cos(\theta)\right)\right)^2\left(P_n'\left(Cos(\theta)\right)\right)^2\left(Sin^2(\theta)-Cosh^2(\eta)\right)$$

$$=-\left(P_n\left(Cos(\theta)\right)\right)^2\left(P_n'\left(Cos(\theta)\right)\right)^2\left(Cos^2(\theta)+Sinh^2(\eta)\right)=0$$

L'expression G ne faisant intervenir que des fonctions de Legendre de première espèce et d'indices entiers (soit un polynôme de Legendre) est un polynôme en Cos(ϑ) et iSinh(η). D'autres part le polynôme s'annule pour les valeurs définies par Cos(ϑ) =- iSinh(η) et Cos(ϑ) = iSinh(η). On peut donc trouver une factorisation telle que :

$$G\propto\left(Cos(\theta)+i\,Sinh(\eta)\right)\left(Cos(\theta)-i\,Sinh(\eta)\right)Polynôme(Cos(\theta),i\,Sinh(\eta))$$
$$\Rightarrow G\propto\left(Cos(\theta)^2+Sinh(\eta)^2\right)Polynôme(Cos(\theta),i\,Sinh(\eta))$$
$$\Rightarrow G\propto\left(Cosh^2(\eta)-Sin^2(\theta)\right)Polynôme(Cos(\theta),i\,Sinh(\eta))$$

Ce qui démontre le résultat recherché pour la première forme des solutions avec des indices entiers et permet de démontrer que le choix de la solution avec polynômes de Legendre est une condition suffisante de régularité du gradient.

Une condition nécessaire de régularité du gradient consiste à vérifier que celui-ci s'annule sur la singularité. Dans le cas contraire alors la solution est à écarter, c'est le cas pour les fonctions de Legendre de deuxième espèce Q. Si maintenant on prend pour la partie radiale une fonction de Legendre de deuxième espèce, alors il suffit de démontrer que la valeur de G ne s'y annule pas :

$$T(\eta,\theta) = Q_n\big(i\ Sinh(\eta)\big)P_n\big(Cos(\theta)\big)$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial T(\eta,\theta)}{\partial \eta} &= iCosh(\eta)Q_n'\big(i\ Sinh(\eta)\big)P_n\big(Cos(\theta)\big)\\ \frac{\partial T(\eta,\theta)}{\partial \theta} &= -Sin(\theta)Q_n\big(i\ Sinh(\eta)\big)P_n'\big(Cos(\theta)\big)\end{aligned}\right\} \qquad G = \left(\frac{\partial T(\eta,\theta)}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial T(\eta,\theta)}{\partial \theta}\right)^2\Bigg|_{\substack{\eta=0\\ \theta=\frac{\pi}{2}}}$$

$$G = Sin^2(\theta)\big(Q_n\big(i\ Sinh(\eta)\big)\big)^2\big(P_n'\big(Cos(\theta)\big)\big)^2 - Cosh^2(\eta)\big(Q_n'\big(i\ Sinh(\eta)\big)\big)^2\big(P_n\big(Cos(\theta)\big)\big)^2$$

$$Cos(\theta) = \pm i\ Sinh(\eta) \Rightarrow Cos^2(\theta) + Sinh^2(\eta) = 0\ ;\ Sin^2(\theta) = Cosh^2(\eta)$$

$$G\big|_{Cos(\theta)=i\ Sinh(\eta)} = G\big|_{Cos(\theta)=-i\ Sinh(\eta)} = Sin^2(\theta)\Big(\big(Q_n\big(Cos(\theta)\big)\big)^2\big(P_n'\big(Cos(\theta)\big)\big)^2 - \big(Q_n'\big(Cos(\theta)\big)\big)^2\big(P_n\big(Cos(\theta)\big)\big)^2\Big)$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow Cos(\theta) = 0$$

$$P_n(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{1-n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2+n}{2}\right)} \qquad P_n'(0) = \frac{n(n+1)\sqrt{\pi}}{2\Gamma\left(\frac{2-n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3+n}{2}\right)}$$

$$Q_n(0) = \frac{-\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{1+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2+n}{2}\right)}Sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \qquad Q_n'(0) = \sqrt{\pi}\frac{\Gamma\left(\frac{2+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+n}{2}\right)}Cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$P_{2n}(0) \neq 0 \quad et \quad P_{2n}'(0) = 0$$

$$P_{2n+1}(0) = 0 \quad et \quad P_{2n+1}'(0) \neq 0$$

$$Q_{2n}(0) = 0 \quad et \quad Q_{2n}'(0) \neq 0$$

$$Q_{2n+1}(0) \neq 0 \quad et \quad Q_{2n+1}'(0) = 0$$

$$\left.\begin{aligned}&Indices\ impairs\\ &\Rightarrow Q_{2n+1}(0)P_{2n+1}'(0) \neq 0 \quad et \quad Q_{2n+1}'(0)P_{2n+1}(0) = 0\\ &Indices\ pairs\\ &\Rightarrow Q_{2n}'(0)P_{2n}(0) \neq 0 \quad et \quad Q_{2n}(0)P_{2n}'(0) = 0\end{aligned}\right\} \Rightarrow G\big|_{Cos(\theta)=-i\ Sinh(\eta)} \neq 0$$

De même dans le cas de la valeur propre nulle, il vient :

$$T(\eta,\theta) = Arctan[Sinh(\eta)]$$

$$\frac{\partial T(\eta,\theta)}{\partial \eta} = \frac{Cosh(\eta)}{1+Sinh^2(\eta)} \Rightarrow G = \left(\frac{\partial T(\eta,\theta)}{\partial \eta}\right)^2\Bigg|_{\eta=0} = 1 \neq 0$$

On a donc démontré que l'alternance de l'un ou l'autre terme de G donne une valeur non nulle du gradient. Cela suffit pour écarter ce type de solution ne préservant pas la régularité du gradient.

<u>Régularité du gradient des solutions sur un cône sphéroïdale complet (frontière constituée par un hyperboloïde à une nappe), fonctions de Legendre de degré réel et d'argument imaginaire</u>

Dans le cas où les degrés des fonctions de Legendre (première ou deuxième espèce) sont non entiers et les arguments purement imaginaires, il convient également de montrer que le choix d'une fonction de Legendre de deuxième espèce conduit à la non-annulation du gradient sur la singularité. En effet :

$$T(\eta,\theta) = Q_{\lambda_n}\left(i\ Sinh(\eta)\right)P_{\lambda_n}\left(Cos(\theta)\right)$$

$$\frac{\partial T(\eta,\theta)}{\partial \eta} = iCosh(\eta)Q_{\lambda_n}'\left(i\ Sinh(\eta)\right)P_{\lambda_n}\left(Cos(\theta)\right)$$

$$\frac{\partial T(\eta,\theta)}{\partial \theta} = -Sin(\theta)Q_{\lambda_n}\left(i\ Cosh(\eta)\right)P_{\lambda_n}'\left(Cos(\theta)\right)$$

$$G = \left(\frac{\partial T(\eta,\theta)}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial T(\eta,\theta)}{\partial \theta}\right)^2\Bigg|_{\substack{\eta=0\\ \theta=\frac{\pi}{2}}}$$

$$= Sin^2(\theta)\left(Q_{\lambda_n}\left(i\ Sinh(\eta)\right)\right)^2\left(P_{\lambda_n}'\left(Cos(\theta)\right)\right)^2 - Cosh^2(\eta)\left(Q_{\lambda_n}'\left(i\ Sinh(\eta)\right)\right)^2\left(P_{\lambda_n}\left(Cos(\theta)\right)\right)^2$$

$$Cos(\theta) = \pm i\ Sinh(\eta) \Rightarrow Cos^2(\theta) + Sinh^2(\eta) = 0\ ;\ Sin^2(\theta) = Cosh^2(\eta)$$

$$G\big|_{Cos(\theta)=i\ Sinh(\eta)} = G\big|_{Cos(\theta)=-i\ Sinh(\eta)} = Sin^2(\theta)\left(\left(Q_{\lambda_n}\left(Cos(\theta)\right)\right)^2\left(P_{\lambda_n}'\left(Cos(\theta)\right)\right)^2 - \left(Q_{\lambda_n}'\left(Cos(\theta)\right)\right)^2\left(P_{\lambda_n}\left(Cos(\theta)\right)\right)^2\right)$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow Cos(\theta) = 0$$

$$P_{\lambda_n}(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{1-\lambda_n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2+\lambda_n}{2}\right)} \qquad P_{\lambda_n}'(0) = \frac{\lambda_n(\lambda_n+1)\sqrt{\pi}}{2\Gamma\left(\frac{2-\lambda_n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3+\lambda_n}{2}\right)}$$

$$Q_{\lambda_n}(0) = \frac{-\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{1+\lambda_n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2+\lambda_n}{2}\right)}Sin\left(\frac{\lambda_n\pi}{2}\right) \qquad Q_{\lambda_n}'(0) = \sqrt{\pi}\frac{\Gamma\left(\frac{2+\lambda_n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+\lambda_n}{2}\right)}Cos\left(\frac{\lambda_n\pi}{2}\right)$$

$$G\big|_{Cos(\theta)=-i\ Sinh(\eta),\theta=\frac{\pi}{2}} = \left(\left(Q_{\lambda_n}(0)\right)^2\left(P_{\lambda_n}'(0)\right)^2 - \left(Q_{\lambda_n}'(0)\right)^2\left(P_{\lambda_n}(0)\right)^2\right) \neq 0$$

$$sauf\ \ pour\ les\ valeurs\ demi-entières\ \lambda_n = \frac{2n+1}{2}$$

$$G\big|_{\lambda_n=\frac{2n+1}{2}} = 0$$

En effet pour les valeurs demi-entières, et par la même occasion le calcul quelque soit la valeur propre (imaginaire ou réelle), il vient :

$$\lambda_n = \frac{2n+1}{2} \Rightarrow Sin^2\left(\frac{\lambda_n \pi}{2}\right) = Cos^2\left(\frac{\lambda_n \pi}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

$$z = \frac{1-\lambda_n}{2} \quad 1-z = \frac{1+\lambda_n}{2} \Rightarrow \Gamma\left(\frac{1-\lambda_n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+\lambda_n}{2}\right) = \frac{\pi}{Sin\left(\pi\left(\frac{1-\lambda_n}{2}\right)\right)} = \frac{\pi}{Cos\left(\frac{\lambda_n \pi}{2}\right)}$$

$$z = \frac{\lambda_n}{2} \quad 1-z = 1-\frac{\lambda_n}{2} \Rightarrow \Gamma\left(\frac{\lambda_n}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{\lambda_n}{2}\right) = \frac{\pi}{Sin\left(\frac{\lambda_n \pi}{2}\right)}$$

$$P_{\lambda_n}(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{1-\lambda_n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2+\lambda_n}{2}\right)} = \frac{\Gamma\left(\frac{1+\lambda_n}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{2+\lambda_n}{2}\right)} Cos\left(\frac{\lambda_n \pi}{2}\right)$$

$$Q_{\lambda_n}'(0) = \sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma\left(\frac{2+\lambda_n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+\lambda_n}{2}\right)} Cos\left(\frac{\lambda_n \pi}{2}\right) \Rightarrow P_{\lambda_n}(0) Q_{\lambda_n}'(0) = Cos^2\left(\frac{\lambda_n \pi}{2}\right)$$

$$P_{\lambda_n}'(0) = \frac{\lambda_n(\lambda_n+1)\sqrt{\pi}}{2\Gamma\left(\frac{2-\lambda_n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3+\lambda_n}{2}\right)} = \frac{\lambda_n\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(1-\frac{\lambda_n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+\lambda_n}{2}\right)} = \frac{\lambda_n\Gamma\left(\frac{\lambda_n}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{1+\lambda_n}{2}\right)} Sin\left(\frac{\lambda_n \pi}{2}\right)$$

$$Q_{\lambda_n}(0) = \frac{-\sqrt{\pi}}{2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1+\lambda_n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2+\lambda_n}{2}\right)} Sin\left(\frac{\lambda_n \pi}{2}\right) = -\sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1+\lambda_n}{2}\right)}{\lambda_n\Gamma\left(\frac{\lambda_n}{2}\right)} Sin\left(\frac{\lambda_n \pi}{2}\right) \Rightarrow P_{\lambda_n}'(0) Q_{\lambda_n}(0) = -Sin^2\left(\frac{\lambda_n \pi}{2}\right)$$

$$G\big|_{Cos(\theta)=-i\,Sinh(\eta),\theta=\frac{\pi}{2}} = \left(\left(Q_{\lambda_n}(0)\right)^2\left(P_{\lambda_n}'(0)\right)^2 - \left(Q_{\lambda_n}'(0)\right)^2\left(P_{\lambda_n}(0)\right)^2\right) = Cos^4\left(\frac{\lambda_n \pi}{2}\right) - Sin^4\left(\frac{\lambda_n \pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow G\big|_{Cos(\theta)=-i\,Sinh(\eta),\theta=\frac{\pi}{2}} = Cos^2\left(\frac{\lambda_n \pi}{2}\right) - Sin^2\left(\frac{\lambda_n \pi}{2}\right) = Cos(\lambda_n \pi) \quad \forall \lambda_n$$

$$\Rightarrow G\big|_{Cos(\theta)=-i\,Sinh(\eta),\theta=\frac{\pi}{2}} = 0 \Leftarrow \lambda_n = \frac{2n+1}{2}$$

.

Pour ce qui est des fonctions de Legendre de première espèce avec des degrés non entiers, il faut démontrer que la fonction G est proportionnel à $\left(Cosh^2(\eta)-Sin^2(\theta)\right)=\left(Sinh^2(\eta)+Cos^2(\theta)\right)$ *dans ce cas on doit développer en série autour de z=0, là où réside la singularité du gradient :*

$$Soit\ à\ démontrer\ \left(\frac{\partial T(\eta,\theta)}{\partial\eta}\right)^2+\left(\frac{\partial T(\eta,\theta)}{\partial\theta}\right)^2\Bigg|_{\substack{\eta=0\\ \theta=\frac{\pi}{2}}}\propto Cste\left(Cosh^2(\eta)-Sin^2(\theta)\right)$$

$$T(\eta,\theta)=P_{\lambda_n}\left(i\ Sinh(\eta)\right)P_{\lambda_n}\left(Cos(\theta)\right)$$

$$\frac{\partial T(\eta,\theta)}{\partial\eta}=iCosh(\eta)P_{\lambda_n}'\left(i\ Sinh(\eta)\right)P_{\lambda_n}\left(Cos(\theta)\right)\quad \frac{\partial T(\eta,\theta)}{\partial\theta}=-Sin(\theta)P_{\lambda_n}\left(Cosh(\eta)\right)P_{\lambda_n}'\left(Cos(\theta)\right)$$

$$G=Sin^2(\theta)\left(P_{\lambda_n}\left(i\ Sinh(\eta)\right)\right)^2\left(P_{\lambda_n}'\left(Cos(\theta)\right)\right)^2-Cosh^2(\eta)\left(P_{\lambda_n}'\left(i\ Sinh(\eta)\right)\right)^2\left(P_{\lambda_n}\left(Cos(\theta)\right)\right)^2$$

$$G=\left(\frac{\partial T(\eta,\theta)}{\partial\eta}\right)^2+\left(\frac{\partial T(\eta,\theta)}{\partial\theta}\right)^2\Bigg|_{\substack{\eta=0\\ \theta=\frac{\pi}{2}}}$$

$$Posons\ x=Cos(\theta)\ y=i\ Sinh(\eta)$$

$$G(\lambda_n,x,y)=(1-x^2)\left(P_{\lambda_n}(y)\right)^2\left(P_{\lambda_n}'(x)\right)^2-(1-y^2)\left(P_{\lambda_n}'(y)\right)^2\left(P_{\lambda_n}(x)\right)^2$$

$$Développons\quad p_0=P_{\lambda_n}(0)\quad p_1=P_{\lambda_n}'(0)\quad p_2=P_{\lambda_n}''(0)\qquad p_0,p_1,\cdots,p_n\quad nombres\ réels$$

$$P_{\lambda_n}(x)\approx p_0+p_1x+\ldots+p_n\frac{x^n}{n!}+\ldots\quad P_{\lambda_n}'(x)\approx p_1+p_2x+\ldots+p_n\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\ldots$$

$$G(\lambda_n,x,y)\approx polynôme\ s'annulant\ en\ x=y\Rightarrow G(\lambda_n,x,y)=(x-y)g_1(\lambda_n,x,y)$$

$$Formule\ de\ symétrie\ mirroir$$

$$\left.\begin{array}{l}P_{\lambda_n}(\bar{z})=\overline{P_{\lambda_n}(z)}\\ P_{\lambda_n}'(\bar{z})=\overline{P_{\lambda_n}'(z)}\end{array}\right\}comme-y=\bar{y}\rightarrow P_{\lambda_n}\left(-i\ Sinh(\eta)\right)=\overline{P_{\lambda_n}\left(i\ Sinh(\eta)\right)}$$

$$On\ peut\ passer\ sous\ le\ conjugé\ complexe\ dans\ toute\ l'expression\ car\ les\ autres\ expression\ sont\ purement\ réelles$$

$$Et\left(\overline{P_{\lambda_n}\left(i\ Sinh(\eta)\right)}\right)^2=\overline{\left(P_{\lambda_n}\left(i\ Sinh(\eta)\right)\right)^2}\ et\ \left(\overline{P_{\lambda_n}'\left(i\ Sinh(\eta)\right)}\right)^2=\overline{\left(P_{\lambda_n}'\left(i\ Sinh(\eta)\right)\right)^2}$$

$$G(\lambda_n,x,y)\approx polynôme\ s'annulant\ en\ x=-y\Rightarrow G(\lambda_n,x,y)=(x+y)g_2(\lambda_n,x,y)$$

$$G(\lambda_n,x,y)\approx(x-y)(x+y)g_3(\lambda_n,x,y)\approx(x^2-y^2)g_3(\lambda_n,x,y)$$

$$G(\lambda_n,x,y)\approx\left(Cos^2(\theta)+Sinh^2(\eta)\right)g_3(\lambda_n,x,y)$$

.

<u>*Régularité du gradient des solutions sur un cône sphéroïdale complet (frontière constituée par un hyperboloïde à une nappe), fonctions coniques de Mehler (fonctions de Legendre de degré imaginaire et d'argument imaginaire)*</u>

Il reste à montrer quelles sont les conditions requises en employant les fonctions coniques de Mehler de première et deuxième espèce. Tout d'abord l'expression du gradient ne s'annule pas lorsque l'on utilise les fonctions de deuxième espèce. On a montré que :

$$G\Big|_{Cos(\theta)=-i\ Sinh(\eta),\theta=\frac{\pi}{2}}=Cos\left(\lambda_n\pi\right)$$

$$G\Big|_{Cos(\theta)=-i\ Sinh(\eta),\theta=\frac{\pi}{2}}=\left(\left(Q_{\lambda_n}(0)\right)^2\left(P_{\lambda_n}'(0)\right)^2-\left(Q_{\lambda_n}'(0)\right)^2\left(P_{\lambda_n}(0)\right)^2\right)=Cos^2\left(\frac{\lambda_n\pi}{2}\right)-Sin^2\left(\frac{\lambda_n\pi}{2}\right)\quad\forall\lambda_n$$

$$\lambda_n=-\frac{1}{2}+i\tau_n\Rightarrow Cos\left(\pi\left(-\frac{1}{2}+i\tau_n\right)\right)=Cosh\left(\pi\tau_n\right)\neq 0$$

.

Donc l'emploi de produit de fonctions coniques de deuxième espèce radiale et de première espèce angulaire est proscrit comme suit :

$$T(\eta,\theta) = Q_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}\left(i\ Sinh(\eta)\right)P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}\left(Cos(\theta)\right).$$

Il reste à montrer que l'emploi du produit $T(\eta,\theta) = P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}\left(i\ Sinh(\eta)\right)P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}\left(Cos(\theta)\right)$ *conduit à une forme neutralisant la singularité apparente du gradient. On réalise le même raisonnement que précédemment :*

$$Soit\ à\ démontrer\ \left(\frac{\partial T(\eta,\theta)}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial T(\eta,\theta)}{\partial \theta}\right)^2\Bigg|_{\substack{\eta=0\\ \theta=\frac{\pi}{2}}} \propto Cste\left(Cosh^2(\eta) - Sin^2(\theta)\right)$$

$$G = Sin^2(\theta)\left(P_{\lambda_n}\left(i\ Sinh(\eta)\right)\right)^2\left(P_{\lambda_n}'\left(Cos(\theta)\right)\right)^2 - Cosh^2(\eta)\left(P_{\lambda_n}'\left(i\ Sinh(\eta)\right)\right)^2\left(P_{\lambda_n}\left(Cos(\theta)\right)\right)^2$$

$$Posons\ x = Cos(\theta)\ y = i\ Sinh(\eta) \Rightarrow G(\lambda_n,x,y) = (1-x^2)\left(P_{\lambda_n}(y)\right)^2\left(P_{\lambda_n}'(x)\right)^2 - (1-y^2)\left(P_{\lambda_n}'(y)\right)^2\left(P_{\lambda_n}(x)\right)^2$$

$$Symétrie\ mirroir\quad \left.\begin{array}{l} \lambda_n = -\frac{1}{2} + i\tau_n \\ \overline{\lambda_n} = -\frac{1}{2} - i\tau_n = -\lambda_n - 1 \\ \forall z \in \mathbf{C}\quad P_{\lambda_n}(z) = P_{-\lambda_n-1}(z) \end{array}\right\} \Rightarrow P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(iz) = \overline{P_{-\frac{1}{2}-i\tau_n}(-iz)} = \overline{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(-iz)}\quad z\ réel$$

$$\left.\begin{array}{l} P_{\lambda_n}(\bar{z}) = \overline{P_{\overline{\lambda_n}}(z)} = \overline{P_{\lambda_n}(z)} \\ P_{\lambda_n}'(\bar{z}) = \overline{P_{\overline{\lambda_n}}'(z)} = \overline{P_{\lambda_n}'(z)} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \bar{y} = -y \rightarrow P_{\lambda_n}(-y) = \overline{P_{\lambda_n}(y)}\quad P_{\lambda_n}'(-y) = \overline{P_{\lambda_n}'(y)}\quad y\ purement\ imaginaire \\ P_{\lambda_n}(x) = \overline{P_{\lambda_n}(x)} \Rightarrow P_{\lambda_n}(x)\ purement\ réel\ pour\ x\ purement\ réel \end{array}\right.$$

$$Développons\quad p_0 = P_{\lambda_n}(0)\quad p_1 = P_{\lambda_n}'(0)\quad p_2 = P_{\lambda_n}''(0)$$

$$\left\{\begin{array}{l} P_{\lambda_n}(x) \approx p_0 + p_1 x + \ldots + p_n\frac{x^n}{n!} + \ldots\quad P_{\lambda_n}'(x) \approx p_1 + p_2 x + \ldots + p_n\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots \\ p_0, p_1, \cdots, p_n\quad nombres\ réels\ pour\ x\ purement\ réel \end{array}\right.$$

$$G(\lambda_n,x,y) \approx polynôme\ s'annulant\ en\ x = y \Rightarrow G(\lambda_n,x,y) \approx (x-y)g_1(\lambda_n,x,y)$$

$$Calculons\ G(\lambda_n,x,-x) = (1-x^2)\left(P_{\lambda_n}(-x)\right)^2\left(P_{\lambda_n}'(x)\right)^2 - (1-x^2)\left(P_{\lambda_n}'(-x)\right)^2\left(P_{\lambda_n}(x)\right)^2$$

$$= (1-x^2)\left(\left(\overline{P_{\lambda_n}(x)}\right)^2\left(P_{\lambda_n}'(x)\right)^2 - \left(\overline{P_{\lambda_n}'(x)}\right)^2\left(P_{\lambda_n}(x)\right)^2\right)$$

$$= 0$$

$$G(\lambda_n,x,y) \approx polynôme\ s'annulant\ en\ x = -y \Rightarrow G(\lambda_n,x,y) = (x+y)g_2(\lambda_n,x,y)$$

$$\Rightarrow G(\lambda_n,x,y) \approx (x-y)(x+y)g_3(\lambda_n,x,y) \approx (x^2-y^2)g_3(\lambda_n,x,y)$$

$$\Rightarrow G(\lambda_n,x,y) \approx \left(Cos^2(\theta) + Sinh^2(\eta)\right)g_3(\lambda_n,x,y)$$

Et la condition de régularité du gradient est contraint à l'emploi des produits suivants :

$$T(\eta,\theta) = P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}\left(i\ Sinh(\eta)\right)P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}\left(Cos(\theta)\right)$$

Solutions de l'équation de Laplace par séparation des variables

Les solutions de l'équation séparée dans les trois coordonnées sphéroïdales aplaties sont :

$T(\eta,\theta,\varphi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$

cas général

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} R''(\eta) + Tanh(\eta)R'(\eta) + \left[-\alpha_2 + \dfrac{\alpha_3}{Cosh^2(\eta)} \right] R(\eta) = 0 \\ \Theta''(\theta) + \dfrac{Cos(\theta)}{Sin(\theta)}\Theta'(\theta) + \left[\alpha_2 - \dfrac{\alpha_3}{Sin^2(\theta)} \right]\Theta(\theta) = 0 \\ \Phi''(\varphi) + \alpha_3\Phi(\varphi) = 0 \end{array} \right.$$

$si \quad \alpha_2 > 0 \quad et \quad \alpha_3 > 0 \Rightarrow \alpha_2 = n(n+1)\ et\ \alpha_3 = m^2 \quad avec \quad n,m \quad entier,$

$$R''(\eta) + \frac{Sinh(\eta)}{Cosh(\eta)}R'(\eta) - \left[n(n+1) - \frac{m^2}{Cosh^2(\eta)} \right] R(\eta) = 0$$

$$Posons \left\{ \begin{array}{l} z = i\ Sinh(\eta) \\ Cosh(\eta) = \sqrt{1-z^2} \Rightarrow Cosh(\eta)^2 = 1 - z^2 \\ \dfrac{d}{d\eta} = i\sqrt{1-z^2}\,\dfrac{d}{dz} \quad \dfrac{d^2}{d\eta^2} = -\sqrt{1-z^2}\left(\dfrac{d}{dz}\left[\sqrt{1-z^2}\,\dfrac{d}{dz} \right] \right) = -(1-z^2)\left(\dfrac{d^2}{dz^2} \right) + z\dfrac{d}{dz} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow R''(\eta) + Cotanh(\eta)R'(\eta) - \left[n(n+1) - \frac{m^2}{Cosh^2(\eta)} \right] R(\eta) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -(1-z^2)R''(z) + 2zR'(z) - \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1-z^2} \right] R(z) = 0 \Leftrightarrow (1-z^2)R''(z) - 2zR'(z) + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1-z^2} \right] R(z) = 0$$

$$\Rightarrow R(z) = A\,P_n^m(z) + B\,Q_n^m(z) \Rightarrow R(\eta) = A\,P_n^m(i\,Sinh(\eta)) + B\,Q_n^m(i\,Sinh(\eta))$$

$$\Theta''(\theta) + \frac{Cos(\theta)}{Sin(\theta)}\Theta'(\theta) + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{Sin^2(\theta)} \right]\Theta(\theta) = 0 \Rightarrow \Theta(\theta) = A\,P_n^m(Cos(\theta)) + B\,Q_n^m(Cos(\theta))\ tq\ m <= n$$

$$\Phi''(\varphi) + m^2\Phi(\varphi) = 0 \Rightarrow \Phi(\varphi) = A\,Cos(\varphi) + B\,Sin(\varphi)$$

$P_n^m(z)$ *Fonction de Legendre (de première espèce) de degré n et d'ordre m*

$Q_n^m(z)$ *Fonction de Legendre de deuxième espèce de degré n et d'ordre m*

$\Rightarrow$ *valeur propre nulle* $\rightarrow$ *si* $\alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0$

$$\Rightarrow R''(\eta) + \frac{Sinh(\eta)}{Cosh(\eta)}R'(\eta)$$

$$\Rightarrow R(\eta) = A + B_1\ Arctan[Sinh(\eta)]\ ou\ A + B_2\ Arcotan[Sinh(\eta)]$$

$$ou\ A + B_3\ Arctan[Tanh\left(\frac{\eta}{2}\right)]\ ou\ A + B_4\ Arcotan[Tanh\left(\frac{\eta}{2}\right)]$$

$$\Theta(\theta) = C + D_0\ Log[\frac{1-Cos(\theta)}{1+Cos(\theta)}] = C + D_1 Log[\frac{Sin(\theta/2)}{Cos(\theta/2)}] = C + D_2 Log[\frac{Cos(\theta/2)}{Sin(\theta/2)}]$$

$$\Phi(\varphi) = E + F\ \varphi$$

Pour ce qui est du cas de la valeur propre nulle, la solution Logarithmique en ϑ comporte une singularité à angle nul, et n'est donc pas retenue-> D=0.

Lorsque l'on réduit à deux dimensions (η et ϑ) et que la géométrie du problème et des conditions aux limites implique, par exemple, que la solution ne dépend pas de ϕ, alors les deux équations séparées sont :

$$T(\eta,\theta) = R(r)\Theta(\theta)$$

$$cas\ général$$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} R''(\eta) + Tanh(\eta)R'(\eta) - \alpha_2 R(\eta) = 0 \\ \Theta''(\theta) + \dfrac{Cos(\theta)}{Sin(\theta)}\Theta'(\theta) + \alpha_2\Theta(\theta) = 0 \end{array} \right.$$

$$si \quad \alpha_2 = n(n+1) \quad avec \quad n \quad entier,$$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} R''(\eta) + \dfrac{Sinh(\eta)}{Cosh(\eta)}R'(\eta) - n(n+1)R(\eta) = 0 \Rightarrow R(\eta) = A\,P_n\big(i\,Sinh(\eta)\big) + B\,Q_n\big(i\,Sinh(\eta)\big) \\ \Theta''(\theta) + \dfrac{Cos(\theta)}{Sin(\theta)}\Theta'(\theta) + n(n+1)\Theta(\theta) = 0 \Rightarrow \Theta(\theta) = A\,P_n\big(Cos(\theta)\big) + B\,Q_n\big(Cos(\theta)\big) \end{array} \right.$$

$$P_n(z)\ Fonction\,(polynôme)\ de\ Legendre\ (de\ première\ espèce)\ de\ degré\ n$$

$$Q_n(z) Fonction\ de\ Legendre\ de\ deuxième\ espèce\ de\ degré\ n$$

$$Cas\ où\ la\ géométrie\ du\ problème\ conduit\ la\ solution\ à\ ne\ dépendre\ que\ de\ \eta$$

$$\Rightarrow valeur\ \ propre\ nulle \rightarrow si\ \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0$$

$$\Rightarrow R''(\eta) + \frac{Sinh(\eta)}{Cosh(\eta)}R'(\eta)$$

$$\Rightarrow R(\eta) = A + B_1\ Arctan[Sinh(\eta)]\ ou\ A + B_2\ Arcotan[Sinh(\eta)]\ ou\ A + B_3\ Arcotan[Tanh\left(\frac{\eta}{2}\right)]$$

$$\Theta(\theta) = C + D_0\ Log[\frac{1 - Cos(\theta)}{1 + Cos(\theta)}] = C + D_1 Log[\frac{Sin(\theta/2)}{Cos(\theta/2)}] = C + D_2 Log[\frac{Cos(\theta/2)}{Sin(\theta/2)}]$$

La solution logarithmique en ϑ comporte toujours une singularité à angle ϑ=0, et n'est donc pas retenue-> D=0. Lorsque la géométrie du problème et des conditions aux limites implique que l'on puisse réduire à une seule dimension radiale (η) et que , par exemple, la solution ne dépend que de cette variable η, alors la solution de l'équation devient :

$$T(\eta) = A + B_1\ Arctan[Sinh(\eta)]\ ou\ A + B_2\ Arcotan[Sinh(\eta)$$

Les fonctions de Legendre de première espèce à indice entier (polynômes de Legendre) présente les valeurs suivantes à titre d'exemple :

$$P_0(z) = 1 \quad P_1(z) = z \quad P_2(z) = \frac{1}{2}\left(3z^2 - 1\right) \quad P_3(z) = \frac{1}{2}z\left(5z^2 - 3\right)$$

$$P_4(z) = \frac{1}{8}\left(35z^4 - 30z^2 + 3\right) \quad P_5(z) = \frac{1}{8}z\left(63z^4 - 70z^2 + 15\right)$$

$$P_n(-z) = (-1)^n P_n(z)$$

$$P_n(\bar{z}) = \overline{P_n(z)}$$

Étant donnée la propriété de parité, les valeurs pour des coordonnées purement imaginaires sont réelles pour des indices entiers pairs et purement imaginaires pour des indices entiers impairs :

$$P_n(-i\,z) = (-1)^n P_n(i\,z)$$

$$P_n(\bar{z}) = \overline{P_n(z)}$$

$$P_{2n}(-i\,z) = P_{2n}(i\,z) \Rightarrow P_{2n}(i\,z) = \overline{P_{2n}(i\,z)}$$

$$P_{2n+1}(-i\,z) = -P_{2n+1}(i\,z) \Rightarrow P_{2n+1}(i\,z) = -\overline{P_{2n+1}(i\,z)}$$

Il suffit donc, comme convention de calcul, pour déterminer des valeurs réelles de prendre la partie réelle de la fonction pour les indices pairs et la partie imaginaire pour les indices impairs. Les fonctions de Legendre de deuxième espèce à indice entier présente les valeurs suivantes à titre d'exemple :

$$Q_0(z) = \frac{1}{2} Log\left(\frac{1+z}{1-z}\right) \quad Q_1(z) = \frac{z}{2} Log\left(\frac{1+z}{1-z}\right) - 1 \quad Q_2(z) = \frac{1}{4}\left(\left(3z^2-1\right) Log\left(\frac{1+z}{1-z}\right) - 6z\right)$$

$$Q_3(z) = \frac{1}{12}\left(3z\left(5z^3-3\right) Log\left(\frac{1+z}{1-z}\right) + 8 - 30z^2\right)$$

$$Q_4(z) = \frac{1}{48}\left(3\left(35z^4-30z^2+3\right) Log\left(\frac{1+z}{1-z}\right) + 110z - 210z^3\right)$$

$$Q_n(z) = \frac{1}{2}\left(P_n(z) Log\left(\frac{1+z}{1-z}\right) + \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} \frac{2n-4k-1}{(2k+1)(n-k)} P_{n-2k-1}(z)\right)$$

$$Q_n(-z) = -(-1)^n \frac{1}{2}\left(P_n(z) Log\left(\frac{1+z}{1-z}\right) + \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} \frac{2n-4k-1}{(2k+1)(n-k)} P_{n-2k-1}(z)\right) = -(-1)^n Q_n(z)$$

$$\Rightarrow Q_n(-z) = -(-1)^n Q_n(z)$$

$$Q_n(\bar{z}) = \overline{Q_n(z)}$$

Étant donnée la propriété de parité, les valeurs pour des coordonnées purement imaginaires sont réelles pour des indices entiers impairs et purement imaginaires pour des indices entiers pairs :

$$Q_n(-i\,z) = -(-1)^n Q_n(i\,z)$$

$$Q_n(\bar{z}) = \overline{Q_n(z)}$$

$$Q_{2n}(-i\,z) = -Q_{2n}(i\,z) \Rightarrow Q_{2n}(i\,z) = -\overline{Q_{2n}(i\,z)}$$

$$Q_{2n+1}(-i\,z) = -Q_{2n+1}(i\,z) \Rightarrow Q_{2n+1}(i\,z) = \overline{Q_{2n+1}(i\,z)}$$

Il suffit donc, également comme convention de calcul, pour déterminer des valeurs réelles de prendre la partie réelle de la fonction pour les indices impairs et la partie imaginaire pour les indices pairs. D'autre part comme les valeurs purement réelles et purement imaginaires sont inversées, selon les indices paires et impaires, entre les fonctions de Legendre de première et deuxième espèce, il suffit d'envisager des combinaisons linéaires entre fonctions de Legendre du type : $A_n P_n(z) + i\,B_n Q_n(z)$ *pour assurer la valeur réelle ou purement imaginaire sans ambiguïté, ou bien encore de vérifier par le calcul que tous les termes de la série construite sont bien à valeurs réelles in fine.*

Si nous revenons aux équations séparées un choix de variable de séparation $\alpha_2 < 0$ est également possible. En gardant un solide de révolution azimutale complet (soit une constante de séparation azimutale, en φ, égale à m entier), il donnerait des équations de la forme,

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} R''(\eta) + Cotanh(\eta)R'(\eta) + \left[\mu^2 + \dfrac{m^2}{Cosh^2(\eta)}\right]R(\eta) = 0 \\ \Theta''(\theta) + \dfrac{Cos(\theta)}{Sin(\theta)}\Theta'(\theta) - \left[\mu^2 + \dfrac{m^2}{Sin^2(\theta)}\right]\Theta(\theta) = 0 \\ \Phi''(\varphi) + m^2\Phi(\varphi) = 0 \end{array} \right. \qquad Posons \left\{ \begin{array}{l} z = i\ Sinh(\eta) \\ Cosh(\eta) = \sqrt{1-z^2} \\ \dfrac{d}{d\eta} = \dfrac{\sqrt{1-z^2}\,d}{dz} \qquad \dfrac{d^2}{d\eta^2} = \dfrac{\sqrt{1-z^2}\,d\left[\sqrt{1-z^2}\,\dfrac{d}{dz}\right]}{dz} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow R''(\eta) + Cotanh(\eta)R'(\eta) + \left[\mu^2 + \frac{m^2}{Cosh^2(\eta)}\right]R(\eta) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\left(1-z^2\right)R''(z) + 2zR'(z) + \left[\mu^2 + \frac{m^2}{1-z^2}\right]R(z) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(1-z^2\right)R''(z) - 2zR'(z) - \left[\mu^2 + \frac{m^2}{1-z^2}\right]R(z) = 0 \qquad Posons\ \mu^2 = \frac{1}{4} + \tau^2$$

$$R(z) = A\ P^{\pm m}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(z) + B\ Q^{\pm m}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(z) \Leftrightarrow R(\eta) = A\ P^{\pm m}_{-\frac{1}{2}+i\tau}\left(i\ Sinh(\eta)\right) + B\ Q^{\pm m}_{-\frac{1}{2}+i\tau}\left(i\ Sinh(\eta)\right)$$

$$Pour\ \Theta(\theta)\ il\ vient\ \Theta(\theta) = A\ P^{\pm m}_{-\frac{1}{2}+i\tau}\left(Cos(\theta)\right) + B\ Q^{\pm m}_{-\frac{1}{2}+i\tau}\left(Cos(\theta)\right)$$

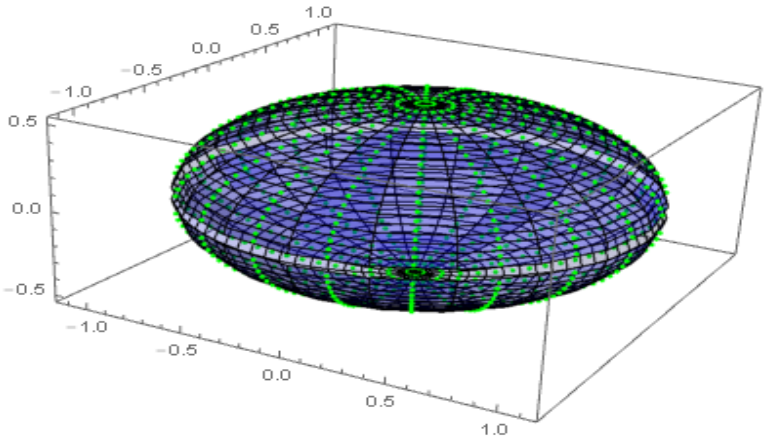
Les solutions sont donc des fonctions coniques de Mehler de première et deuxième espèce d'argument purement imaginaire. Ce choix de solutions est adapté à des problèmes aux limites inhomogènes en dimension angulaire ϑ (sur des cônes sphéroïdales c'est à dire des hyperboloïdes à une seule nappe), pourvu que la dimension radiale ne comporte pas l'origine des coordonnées, car dans ce cas il n'est pas possible d'exhiber un système de fonction propre. Sur le système sphéroïdale aplati aucune représentation intégrale apparentée à, celle de Mehler-Fock n'a été utilisé pour construire formellement des solutions sur ce type d'hyperboloïde de révolution complet.

Exemples divers de problèmes intérieurs sur des sphéroïdes et "Hémisphéroïdes" aplatis pleins ou creux

Exemple : Sphéroïde aplati plein (η,ϑ) soumis à des conditions aux limites de Dirichlet inhomogènes en η=l_η

Soit le problème :

$$\Delta T(\eta,\theta)=0$$
$$T(\eta,\theta)\big|_{\eta=l_\eta}=1-Heaviside(\theta-\pi/2)\quad fonction\ de\ Heaviside$$
$$T(\eta,\theta)\ fini$$



La solution est indépendante de φ et se développe en série de polynôme de Legendre

$$T(\eta,\theta)=A_0+B_0\ Arctan\big(Sinh(\eta)\big)+\sum_{n=1,+\infty}\big(A_\eta\ P_n\big(i\ Sinh(\eta)\big)+B_\eta\ Q_n\big(i\ Sinh(\eta)\big)\big)\big(A_\theta P_n\big(Cos(\theta)\big)+B_\theta\ Q_n\big(Cos(\theta)\big)\big)$$

Les conditions de régularité du gradient de la solution en η=0 et ϑ=π/2, ainsi que le respect de la condition aux limites implique que B_0=B_η=B_ϑ=0, et cela donne une solution de la forme :

$$T(\eta,\theta)=A_0+\sum_{n=1,+\infty}A_nP_n\big(i\ Sinh(\eta)\big)P_n\big(Cos(\theta)\big)$$

. Soit en utilisant les propriétés d'orthogonalité des fonctions propres (ainsi que des calculs déjà réalisé pour un sphéroïde allongé plein) cela donne le résultat recherché.

$$P_0(z)=1,P_n(z)\Rightarrow\|P_n\|^2=\int_{-1}^{1}dz\ P_n(z)^2=\frac{2}{(2n+1)}$$

$$C.L.\quad T(\eta,\theta)\big|_{\eta=l_\eta}=1-Heaviside(\theta-\pi/2)\quad fonction\ de\ Heaviside$$

$$\Rightarrow B_0=\frac{1}{2}\quad et\quad B_n=\frac{\int_0^{\pi/2}d\theta\ Sin(\theta)\ P_n\big(Cos(\theta)\big)}{P_n\big(i\ Sinh(l_\eta)\big)\|P_n\|^2}=\frac{\int_0^{1}dz\ P_n(z)}{P_n\big(i\ Sinh(l_\eta)\big)\|P_n\|^2}$$

$$B_{2n}=0\quad B_{2n+1}=\frac{(-1)^n(2n-1)!(4n+3)}{2^{2n+1}P_{2n+1}\big(i\ Sinh(l_\eta)\big)(n-1)!(n+1)!}$$

$$T(\eta,\theta)=\frac{1}{2}+\sum_{n=0,+\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!(4n+3)}{2^{2n+1}(n-1)!(n+1)!}\frac{P_{2n+1}(i\ Sinh(\eta))}{P_{2n+1}\big(i\ Sinh(l_\eta)\big)}P_{2n+1}(Cos(\theta))$$

ou bien

$$T(\eta,\theta)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{n=0,+\infty}(-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{(4n+3)}{2(n+1)}\frac{P_{2n+1}(i\ Sinh(\eta))}{P_{2n+1}\big(i\ Sinh(l_\eta)\big)}P_{2n+1}(Cos(\theta))$$

Par la suite on utilisera abondamment les calculs déjà réalisés pour le sphéroïde allongé plein, creux, et les cônes ainsi que les sections coniques sphériques, dans le cas d'une géométrie de sphéroïde aplati déclinée dans les mêmes configurations. Il suffit de remplacer le terme radial sphéroïdal allongé par son équivalent sphéroïdal aplati.

Lorsque les conditions aux limites sont inversées, soit

$$\Delta T(\eta,\theta)=0 \quad T(\eta,\theta)\ fini$$

$$T(\eta,\theta)\big|_{\eta=l_\eta}=Heaviside(\theta-\pi/2) \quad fonction\ de\ Heaviside$$

Alors la solution est de la forme :

$$T(\eta,\theta)=\frac{1}{2}-\sum_{n=0,+\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!(4n+3)}{2^{2n+1}(n-1)!(n+1)!}\frac{P_{2n+1}(i\ Sinh(\eta))}{P_{2n+1}\big(i\ Sinh(l_\eta)\big)}P_{2n+1}(Cos(\theta))$$

ou bien

$$T(\eta,\theta)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sum_{n=0,+\infty}(-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{(4n+3)}{2(n+1)}\frac{P_{2n+1}(i\ Sinh(\eta))}{P_{2n+1}\big(i\ Sinh(l_\eta)\big)}P_{2n+1}(Cos(\theta))$$

Supposons maintenant que les "Hémisphéroïdes" supérieure et inférieure soit à des températures différentes respectivement T_0 et T_1. Alors par principe de superposition nous avons :

$$T(\eta,\theta)=\frac{T_0+T_1}{2}+\big(T_0-T_1\big)\sum_{n=0,+\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!(4n+3)}{2^{2n+1}(n-1)!(n+1)!}\frac{P_{2n+1}(i\ Sinh(\eta))}{P_{2n+1}\big(i\ Sinh(l_\eta)\big)}P_{2n+1}(Cos(\theta))$$

ou bien

$$T(r,\eta)=\frac{T_0+T_1}{2}+\frac{\big(T_0-T_1\big)}{2}\sum_{n=0,+\infty}(-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{(4n+3)}{2(n+1)}\frac{P_{2n+1}(i\ Sinh(\eta))}{P_{2n+1}\big(i\ Sinh(l_\eta)\big)}P_{2n+1}(Cos(\theta))$$

Si T_0 =1 et T_1=-1 alors

$$T(\eta,\theta)=2\sum_{n=0,+\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!(4n+3)}{2^{2n+1}(n-1)!(n+1)!}\frac{P_{2n+1}(i\ Sinh(\eta))}{P_{2n+1}\big(i\ Sinh(l_\eta)\big)}P_{2n+1}(Cos(\theta))$$

ou bien

$$T(\eta,\theta)=\sum_{n=0,+\infty}(-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{(4n+3)}{2(n+1)}\frac{P_{2n+1}(i\ Sinh(\eta))}{P_{2n+1}\big(i\ Sinh(l_\eta)\big)}P_{2n+1}(Cos(\theta))$$

Pour le problème plus général :

$$\Delta T(\eta,\theta)=0$$

$$T(\eta,\theta)\big|_{\eta=l_\eta}=f_\theta(\theta)=f_\theta(Cos(\theta))$$

$$T(\eta,\theta)\ fini$$

La solution s'écrit :

$$B_0=\int_0^\pi d\theta\ Sin(\theta)\ f_\theta(\theta) \quad B_n=\int_0^\pi d\theta\ Sin(\theta)\ f_\theta(\theta)\ P_n\big(Cos(\theta)\big)$$

$$T(\eta,\theta)=\frac{B_0}{2}+\sum_{n=1,+\infty}B_n\frac{(2n+1)}{2}\frac{P_n(i\ Sinh(\eta))}{P_n\big(i\ Sinh(l_\eta)\big)}P_n(Cos(\theta))$$

$$z=Cos(\theta) \quad B_0=\int_{-1}^{1}dz\ f_\theta(z) \quad B_n=\int_{-1}^{1}dz\ f_\theta(z)\ P_n(z)$$

$$T(\eta,\theta)=\frac{B_0}{2}+\sum_{n=1,+\infty}B_n\frac{(2n+1)}{2}\frac{P_n(i\ Sinh(\eta))}{P_n\big(i\ Sinh(l_\eta)\big)}P_n(Cos(\theta))$$

A noter que le terme de la série est toujours réel quelque soit l'indice de la fonction de Legendre

Exemple : Sphéroïde aplati plein (η,ϑ) soumis à des conditions aux limites de Neumann inhomogènes en $\eta=l_\eta$

Si le problème s'exprime sous la forme :

$$\Delta T(\eta,\theta)=0$$

$$T'_\eta(\eta,\theta)\Big|_{\eta=l_\eta}=f_\theta(Cos(\theta))$$

$$T(\eta,\theta)\ fini$$

Alors la solution (à une constante près quelconque) s'écrit sous la forme :

$$z=Cos(\theta)\quad \frac{dP_n(i\ Sinh(\eta))}{d\eta}=i\ Cosh(\eta)P_n'(i\ Sinh(\eta))$$

$$\Rightarrow f_\theta(Cos(\theta))=\sum_{n=1,+\infty}C_n i\ Cosh(l_\eta)P_n'(i\ Sinh(l_\eta))\ P_n(Cos(\theta))$$

$$P_n'(i\ Sinh(l_\eta))=\frac{n\big(i\ Sinh(l_\eta)P_n(i\ Sinh(l_\eta))-P_{n-1}(i\ Sinh(l_\eta))\big)}{-Sinh^2(l_\eta)-1}=-\frac{n\big(i\ Sinh(l_\eta)P_n(i\ Sinh(l_\eta))-P_{n-1}(i\ Sinh(l_\eta))\big)}{Cosh^2(l_\eta)}$$

$$\frac{dP_n(i\ Sinh(\eta))}{d\eta}=i\ Cosh(l_\eta)P_n'(i\ Sinh(l_\eta))=\frac{n\big(i\ Sinh(l_\eta)P_n(i\ Sinh(l_\eta))-P_{n-1}(i\ Sinh(l_\eta))\big)}{i\ Cosh(l_\eta)}$$

$$C_n=\frac{(2n+1)}{2n}\frac{i\ Cosh(l_\eta)}{\big(i\ Sinh(l_\eta)P_n(i\ Sinh(l_\eta))-P_{n-1}(i\ Sinh(l_\eta))\big)}\int_{-1}^{1}dz\ f_\theta(z)\ P_n(z)$$

$$B_0\ quelconque\quad B_n=\int_{-1}^{1}dz\ f_\theta(z)\ P_n(z)$$

$$T(\eta,\theta)=B_0+\sum_{n=1,+\infty}B_n\frac{(2n+1)}{2n}\frac{i\ Cosh(l_\eta)P_n(i\ Sinh(\eta))}{\big(i\ Sinh(l_\eta)P_n(i\ Sinh(l_\eta))-P_{n-1}(i\ Sinh(l_\eta))\big)}P_n(Cos(\theta))$$

A noter que le terme de la série garde sa valeur réelle. En effet d'après les valeurs prises par les fonction de Legendre de première espèce à variable purement imaginaire :

$$Valeur\ de\ \frac{i\ Cosh(l_\eta)P_n(i\ Sinh(\eta))}{\big(i\ Sinh(l_\eta)P_n(i\ Sinh(l_\eta))-P_{n-1}(i\ Sinh(l_\eta))\big)}$$

$$Si\ n\ pair\Rightarrow$$

$$P_n(i\ Sinh(\eta))\ réel$$

$$P_n(i\ Sinh(l_\eta))\ réel$$

$$P_{n-1}(i\ Sinh(l_\eta))\ purement\ imaginaire$$

$$\frac{i\ Cosh(l_\eta)P_n(i\ Sinh(\eta))}{\big(i\ Sinh(l_\eta)P_n(i\ Sinh(l_\eta))-P_{n-1}(i\ Sinh(l_\eta))\big)}=\frac{purement\ imaginaire}{purement\ imaginaire}=réel$$

$$Si\ n\ impair\Rightarrow$$

$$P_n(i\ Sinh(\eta))\ purement\ imaginaire$$

$$P_n(i\ Sinh(l_\eta))\ purement\ imaginaire$$

$$P_{n-1}(i\ Sinh(l_\eta))\ réel$$

$$\frac{i\ Cosh(l_\eta)P_n(i\ Sinh(\eta))}{\big(i\ Sinh(l_\eta)P_n(i\ Sinh(l_\eta))-P_{n-1}(i\ Sinh(l_\eta))\big)}=\frac{réel}{réel}$$

Exemple : Sphéroïde aplati plein (η,ϑ) soumis à des conditions aux limites de Robin inhomogènes en $\eta=l_\eta$

Si le problème s'exprime sous la forme :

$$\Delta T(\eta,\theta)=0 \quad T(\eta,\theta)\ fini$$

$$\alpha T_\eta^{'}(\eta,\theta)+\beta\, T(\eta,\theta)\Big|_{\eta=l_\eta}=f_\theta(Cos(\theta))$$

Alors la solution s'écrit sous la forme :

$$z=Cos(\theta) \quad \frac{dP_n(i\ Sinh(\eta))}{d\eta}=i\ Cosh(l_\eta)P_n'(i\ Sinh(l_\eta))=\frac{n\big(i\ Sinh(l_\eta)P_n(i\ Sinh(l_\eta))-P_{n-1}(i\ Sinh(l_\eta))\big)}{i\ Cosh(l_\eta)}$$

$$\Rightarrow f_\theta(Cos(\theta))=\sum_{n=1,+\infty}C_n Sinh(l_\eta)\big(\alpha\ P_n'(Cosh(l_\eta))+\beta\ P_n(Cosh(l_\eta))\big)P_n(Cos(\theta))$$

$$C_n=\frac{(2n+1)}{2\left(\alpha\ \dfrac{n\big(i\ Sinh(l_\eta)P_n(i\ Sinh(l_\eta))-P_{n-1}(i\ Sinh(l_\eta))\big)}{i\ Cosh(l_\eta)}+\beta\ P_n(i\ Sinh(l_\eta))\right)}\int_{-1}^{1}dz\ f_\theta(z)\ P_n(z)$$

$$C_n=\frac{(2n+1)i\ Cosh(l_\eta)}{2\big(\alpha\ n\big(i\ Sinh(l_\eta)P_n(i\ Sinh(l_\eta))-P_{n-1}(i\ Sinh(l_\eta))\big)+\beta\ i\ Cosh(l_\eta)P_n(i\ Sinh(l_\eta))\big)}$$

$$B_0=\int_{-1}^{1}dz\ f_\theta(z) \qquad B_n=\int_{-1}^{1}dz\ f_\theta(z)\ P_n(z)$$

$$T(r,\theta)=\frac{B_0}{2\beta}+\sum_{n=1,+\infty}\frac{(2n+1)}{2}\frac{i\ Cosh(l_\eta)P_n(i\ Sinh(\eta))}{\big(\alpha\ n\big(i\ Sinh(l_\eta)P_n(i\ Sinh(l_\eta))-P_{n-1}(i\ Sinh(l_\eta))\big)+\beta\ i\ Cosh(l_\eta)P_n(i\ Sinh(l_\eta))\big)}P_n(Cos(\theta))$$

Là encore le terme de la série garde sa valeur réelle. En effet d'après les valeurs prises par les fonction de Legendre de première espèce à variable purement imaginaire :

$$Valeur\ de\ \frac{i\ Cosh(l_\eta)P_n(i\ Sinh(\eta))}{\big(\alpha\ n\big(i\ Sinh(l_\eta)P_n(i\ Sinh(l_\eta))-P_{n-1}(i\ Sinh(l_\eta))\big)+\beta\ i\ Cosh(l_\eta)P_n(i\ Sinh(l_\eta))\big)}$$

$Si\ n\ pair \Rightarrow$

$P_n(i\ Sinh(\eta))\ réel$

$P_n(i\ Sinh(l_\eta))\ réel$

$P_{n-1}(i\ Sinh(l_\eta))\ purement\ imaginaire$

$$\frac{i\ Cosh(l_\eta)P_n(i\ Sinh(\eta))}{\big(\alpha\ n\big(i\ Sinh(l_\eta)P_n(i\ Sinh(l_\eta))-P_{n-1}(i\ Sinh(l_\eta))\big)+\beta\ i\ Cosh(l_\eta)P_n(i\ Sinh(l_\eta))\big)}=\frac{purement\ imaginaire}{purement\ imaginaire}=réel$$

$Si\ n\ impair \Rightarrow$

$P_n(i\ Sinh(\eta))\ purement\ imaginaire$

$P_n(i\ Sinh(l_\eta))\ purement\ imaginaire$

$P_{n-1}(i\ Sinh(l_\eta))\ réel$

$$\frac{i\ Cosh(l_\eta)P_n(i\ Sinh(\eta))}{\big(\alpha\ n\big(i\ Sinh(l_\eta)P_n(i\ Sinh(l_\eta))-P_{n-1}(i\ Sinh(l_\eta))\big)+\beta\ i\ Cosh(l_\eta)P_n(i\ Sinh(l_\eta))\big)}=\frac{réel}{réel}$$

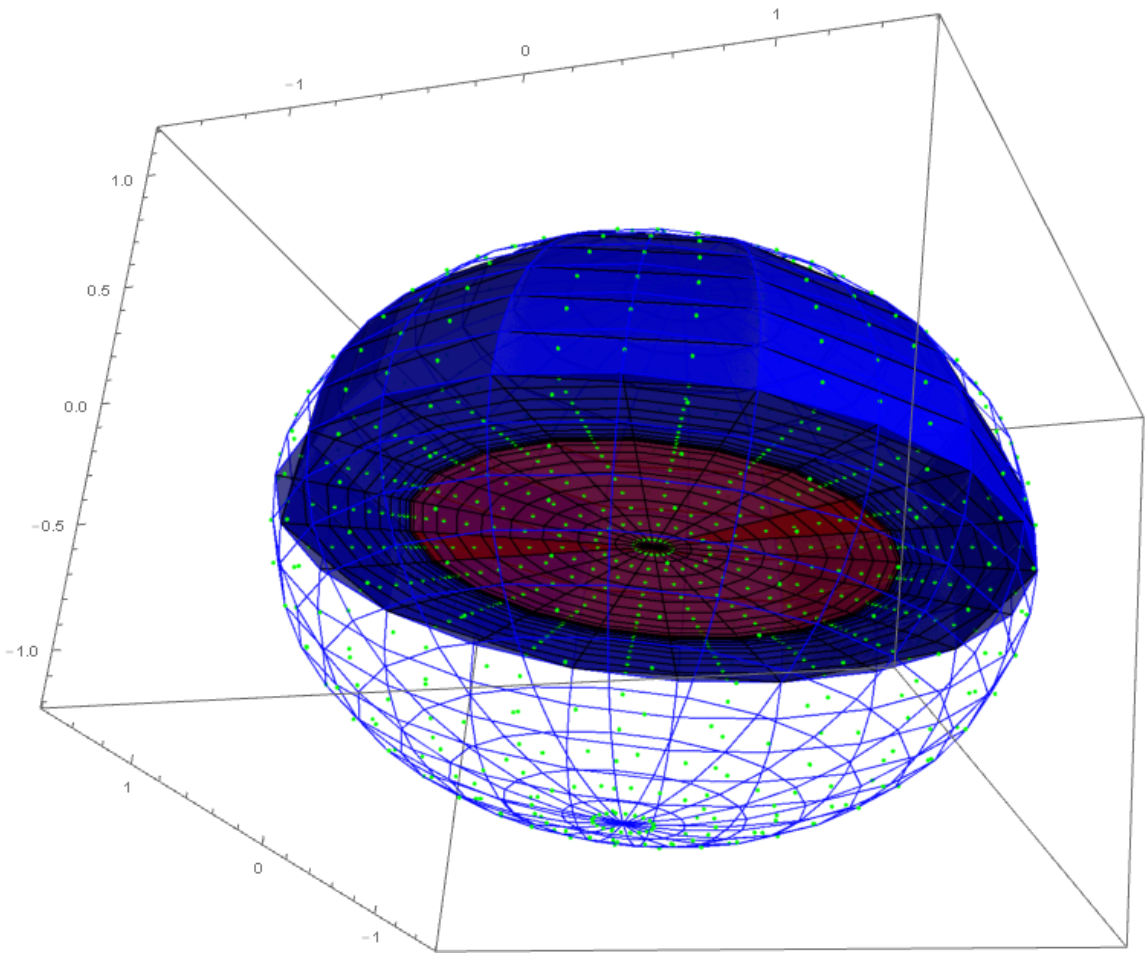
Exemple : "Hémisphéroïde" aplati plein (η,ϑ) soumise à des conditions aux limites de Dirichlet inhomogènes en η=l_η* homogènes en *ϑ=π/2

Commençons par un problème dans une "Hémisphéroïde" soumise aux conditions :

$\Delta T(\eta,\theta)=0 \quad T(\eta,\theta)\ fini$

$T(\eta,\theta)\big|_{\eta=l_\eta}=1$

$T(\eta,\theta)\big|_{\theta=\pi/2}=0$



Notons que sur la tranche θ=π/2, le système de coordonnées comporte un cercle limite lorsque η=0 $x^2+y^2=a^2 \quad z=0$. *L'iso-surface η=0 est donnée par le disque de rayon a sur le plan (x,y) (tracé concentrique de cercles successifs de rayon aSin(ϑ) sur le plan (x,y)).* $x=a\,Sin(\vartheta)Cos(\varphi) \quad y=a\,Sin(\vartheta)Sin(\varphi) \quad z=0$. *Dans ces conditions l"Hémisphéroïde" aplati plein est bien complet.*

Utilisons une astuce, et considérons le problème d'une sphéroïde pleine soumise aux conditions aux limites impaires en θ :

$\Delta T(\eta,\theta)=0 \quad T(\eta,\theta)\ fini$

$T(\eta,\theta)\big|_{\eta=l_\eta}=1\ pour\ \theta\in[0,\pi/2]$

$T(\eta,\theta)\big|_{\eta=l_\eta}=-1\ pour\ \theta\in[\pi/2,\pi]$

On voit que la solution de ce problème doit nécessairement comporter une valeur nulle sur la tranche. Dans ces conditions la solution du deuxième problème dans "l'Hémisphéroïde" supérieure est la solution du premier problème dans le même "Hémisphéroïde". Le deuxième problème possède la solution suivante comme nous l'avons vu dans un exemple précédent :

$$T(\eta,\theta) = 2\sum_{n=0,+\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)!(4n+3)}{2^{2n+1}(n-1)!(n+1)!} \frac{P_{2n+1}(i\ Sinh(\eta))}{P_{2n+1}\left(i\ Sinh(l_\eta)\right)} P_{2n+1}(Cos(\theta))$$

ou bien

$$T(\eta,\theta) = \sum_{n=0,+\infty} (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{(4n+3)}{2(n+1)} \frac{P_{2n+1}(i\ Sinh(\eta))}{P_{2n+1}\left(i\ Sinh(l_\eta)\right)} P_{2n+1}(Cos(\theta))$$

Pour le problème plus général sur "l'Hémisphéroïde" :

$$\Delta T(\eta,\theta) = 0 \quad T(\eta,\theta)\ fini$$

$$T(\eta,\theta)\big|_{\eta=l_\eta} = f_\theta(Cos(\theta))$$

$$T(\eta,\theta)\big|_{\theta=\pi/2} = 0$$

On utilise également l'extension au problème du sphéroïde avec des conditions aux limites impaires, soit :

$$\Delta T(r,\theta) = 0$$

$$T(r,\theta)\big|_{r=l_r} = f_\theta(Cos(\theta)) \quad pour\ \theta \in [0,\pi/2]$$

$$T(r,\theta)\big|_{r=l_r} = -f_\theta(Cos(\pi-\theta)) \quad pour\ \theta \in [\pi/2,\pi]$$

$$T(r,\theta)\ fini$$

Alors la solution s'écrit sous la forme :

$$B_0 = 0$$

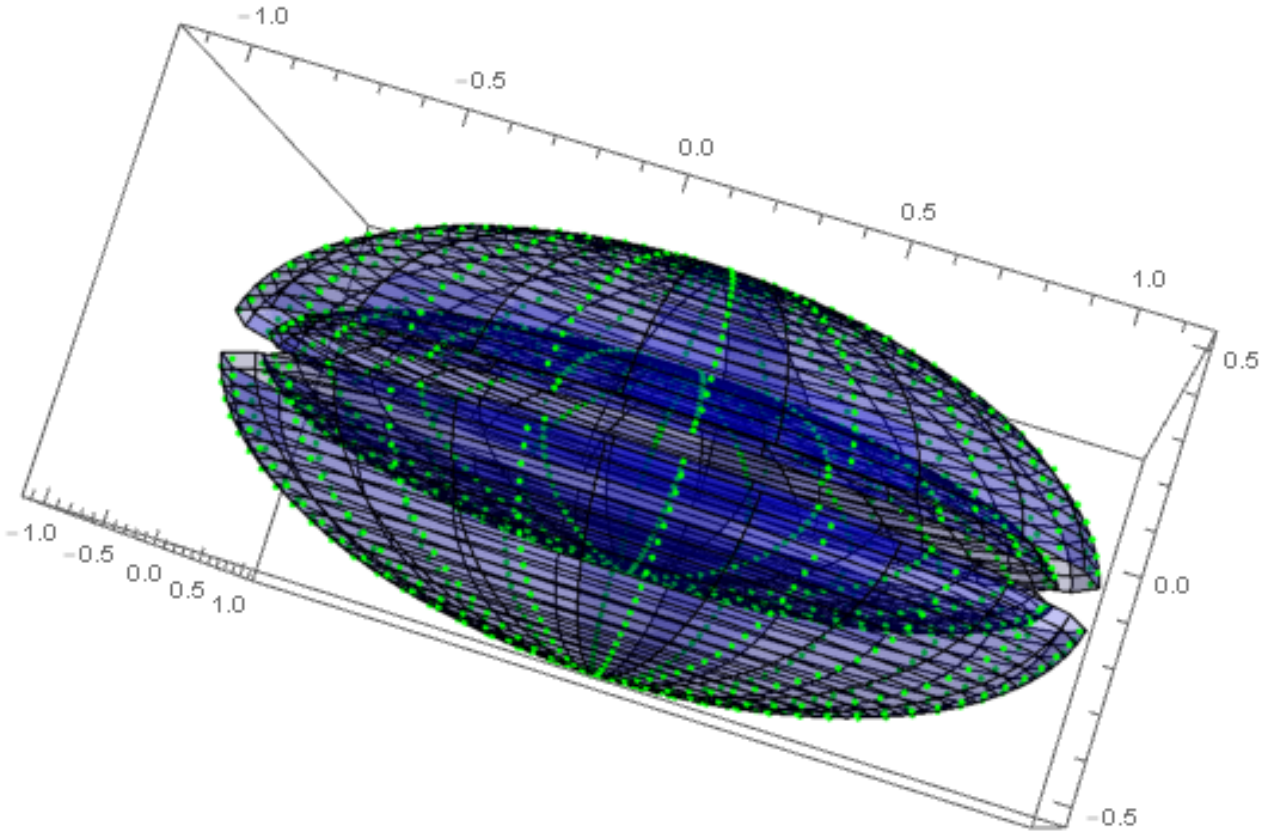
$$B_n = (1-(-1)^n)\int_0^1 dz\ f_\theta(z)\ P_n(z) \Rightarrow B_{2n} = 0 \quad B_{2n+1} = 2\int_0^1 dz\ f_\theta(z)\ P_{2n+1}(z) \Rightarrow C_n = \int_0^1 dz\ f_\theta(z)\ P_{2n+1}(z)$$

$$T(\eta,\theta) = \sum_{n=0,+\infty} C_n(4n+3)\frac{P_{2n+1}(i\ Sinh(\eta))}{P_{2n+1}\left(i\ Sinh(l_\eta)\right)} P_{2n+1}(Cos(\theta))$$

Exemple : Sphéroïde aplati creux (η,ϑ) soumis à des conditions aux limites de Dirichlet inhomogènes en η=$l_{\eta 2}$ et Dirichlet homogènes en η=$l_{\eta 1}$.

Soit le problème :

$$\Delta T(\eta,\theta)=0$$
$$T(\eta,\theta)\big|_{\eta=l_{\eta 1}}=0$$
$$T(\eta,\theta)\big|_{\eta=l_{\eta 2}}=1\ si\ \theta\in[0,\pi/2]\quad 0\quad sinon$$



Cette fois les conditions de régularité du gradient en η=0 ne s'applique pas car le point est en dehors du domaine d'étude (toutefois les conditions de finitude en θ reste les mêmes pour les valeurs θ=0 et θ=π). La solution se développe donc sous la forme :

$$T(\eta,\theta)=A_0+B_0\ Arctan(Sinh(\eta))+\sum_{n=1,+\infty}\left(A_\eta\ P_n(i\ Sinh(\eta))+B_\eta\ i\ Q_n(i\ Sinh(\eta))\right)P_n(Cos(\theta))$$

La solution est indépendante de φ et se développe en série de polynôme de Legendre

$$Valeur\ propre\ n$$

$$T(\eta,\theta)\big|_{\eta=l_{\eta 1}}=0 \Rightarrow partie\ radiale \propto \left(\frac{P_n\big(i\ Sinh(\eta)\big)}{P_n\big(i\ Sinh(l_{\eta 1})\big)}-\frac{Q_n\big(i\ Sinh(\eta)\big)}{Q_n\big(i\ Sinh(l_{\eta 1})\big)}\right)$$

$$Valeur\ propre\ 0$$

$$T(\eta,\theta)\big|_{\eta=l_{\eta 1}}=0 \Rightarrow partie\ radiale \propto Arctan\big(Sinh(\eta)\big)-Arctan\big(Sinh(l_{\eta 1})\big)$$

$$T(\eta,\theta)=\frac{1}{2}\frac{\big(Arctan\big(Sinh(\eta)\big)-Arctan\big(Sinh(l_{\eta 1})\big)\big)}{\big(Arctan\big(Sinh(l_{\eta 2})\big)-Arctan\big(Sinh(l_{\eta 1})\big)\big)}$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{n=0,+\infty}\frac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{(4n+3)}{2(n+1)}\frac{\left(\frac{P_{2n+1}\big(i\ Sinh(\eta)\big)}{P_{2n+1}\big(i\ Sinh(l_{\eta 1})\big)}-\frac{Q_{2n+1}\big(i\ Sinh(\eta)\big)}{Q_{2n+1}\big(i\ Sinh(l_{\eta 1})\big)}\right)}{\left(\frac{P_{2n+1}\big(i\ Sinh(l_{\eta 2})\big)}{P_{2n+1}\big(i\ Sinh(l_{\eta 1})\big)}-\frac{Q_{2n+1}\big(i\ Sinh(l_{\eta 2})\big)}{Q_{2n+1}\big(i\ Sinh(l_{\eta 1})\big)}\right)}P_{2n+1}(Cos(\theta))$$

.

Pour un problème plus général :

$$\Delta T(\eta,\theta)=0 \quad T(\eta,\theta)\big|_{\eta=l_{\eta 1}}=0 \quad T(\eta,\theta)\big|_{\eta=l_{\eta 2}}=f_\theta(\theta)$$

$$Si\ f_\theta(\theta)=f_\theta(Cos(\theta))$$

cela donne :

$$B_0=\int_0^\pi d\theta\ Sin(\theta)\ f_\theta(\theta) \quad B_n=\int_0^\pi d\theta\ Sin(\theta)\ f_\theta(\theta)\ P_n\big(Cos(\theta)\big)$$

$$z=Cos(\theta) \quad B_0=\int_{-1}^{1}dz\ f_\theta(z) \quad B_n=\int_{-1}^{1}dz\ f_\theta(z)\ P_n(z)$$

$$T(\eta,\theta)=\frac{B_0}{2}\frac{\big(Arctan\big(Sinh(\eta)\big)-Arctan\big(Sinh(l_{\eta 1})\big)\big)}{\big(Arctan\big(Sinh(l_{\eta 2})\big)-Arctan\big(Sinh(l_{\eta 1})\big)\big)}$$

$$+\sum_{n=1,+\infty}B_n\frac{(2n+1)}{2}\frac{\left(\frac{P_{2n+1}\big(i\ Sinh(\eta)\big)}{P_{2n+1}\big(i\ Sinh(l_{\eta 1})\big)}-\frac{Q_{2n+1}\big(i\ Sinh(\eta)\big)}{Q_{2n+1}\big(i\ Sinh(l_{\eta 1})\big)}\right)}{\left(\frac{P_{2n+1}\big(i\ Sinh(l_{\eta 2})\big)}{P_{2n+1}\big(i\ Sinh(l_{\eta 1})\big)}-\frac{Q_{2n+1}\big(i\ Sinh(l_{\eta 2})\big)}{Q_{2n+1}\big(i\ Sinh(l_{\eta 1})\big)}\right)}P_n(Cos(\theta))$$

Là encore le terme de la série a une valeur réelle :

$$P_{2n+1}(i\ Sinh(\eta))\ purement\ imaginaire$$

$$Q_{2n+1}(i\ Sinh(\eta))\ réel$$

$$\frac{\left(\frac{P_{2n+1}\big(i\ Sinh(\eta)\big)}{P_{2n+1}\big(i\ Sinh(l_{\eta 1})\big)}-\frac{Q_{2n+1}\big(i\ Sinh(\eta)\big)}{Q_{2n+1}\big(i\ Sinh(l_{\eta 1})\big)}\right)}{\left(\frac{P_{2n+1}\big(i\ Sinh(l_{\eta 2})\big)}{P_{2n+1}\big(i\ Sinh(l_{\eta 1})\big)}-\frac{Q_{2n+1}\big(i\ Sinh(l_{\eta 2})\big)}{Q_{2n+1}\big(i\ Sinh(l_{\eta 1})\big)}\right)}=\frac{réel}{réel}=réel$$

Par exemple pour deux "Hémisphéroïdes" portés à des températures différentes

$$\Delta T(\eta,\theta)=0 \quad T(\eta,\theta)\big|_{\eta=l_{\eta 1}}=0$$

$$T(\eta,\theta)\big|_{\eta=l_{\eta 2}}=T_0 \; si \; \theta\in[0,\pi/2]$$

$$T(\eta,\theta)\big|_{\eta=l_{\eta 2}}=T_1 \; si \; \theta\in[\pi/2,\pi]$$

il vient :

$$T(\eta,\theta)=\frac{T_0+T_1}{2}\frac{\left(Arctan\left(Sinh(\eta)\right)-Arctan\left(Sinh(l_{\eta 1})\right)\right)}{\left(Arctan\left(Sinh(l_{\eta 2})\right)-Arctan\left(Sinh(l_{\eta 1})\right)\right)}$$

$$+\left(T_0-T_1\right)\sum_{n=0,+\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!(4n+3)}{2^{2n+1}(n-1)!(n+1)!}\frac{\left(\frac{P_{2n+1}\left(i\,Sinh(\eta)\right)}{P_{2n+1}\left(i\,Sinh(l_{\eta 1})\right)}-\frac{Q_{2n+1}\left(i\,Sinh(\eta)\right)}{Q_{2n+1}\left(i\,Sinh(l_{\eta 1})\right)}\right)}{\left(\frac{P_{2n+1}\left(i\,Sinh(l_{\eta 2})\right)}{P_{2n+1}\left(i\,Sinh(l_{\eta 1})\right)}-\frac{Q_{2n+1}\left(i\,Sinh(l_{\eta 2})\right)}{Q_{2n+1}\left(i\,Sinh(l_{\eta 1})\right)}\right)}P_{2n+1}(Cos(\theta))$$

ou bien

$$T(\eta,\theta)=\frac{T_0+T_1}{2}\frac{\left(Arctan\left(Sinh(\eta)\right)-Arctan\left(Sinh(l_{\eta 1})\right)\right)}{\left(Arctan\left(Sinh(l_{\eta 2})\right)-Arctan\left(Sinh(l_{\eta 1})\right)\right)}$$

$$+\frac{\left(T_0-T_1\right)}{2}\sum_{n=0,+\infty}(-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{(4n+3)}{2(n+1)}\frac{\left(\frac{P_{2n+1}\left(i\,Sinh(\eta)\right)}{P_{2n+1}\left(i\,Sinh(l_{\eta 1})\right)}-\frac{Q_{2n+1}\left(i\,Sinh(\eta)\right)}{Q_{2n+1}\left(i\,Sinh(l_{\eta 1})\right)}\right)}{\left(\frac{P_{2n+1}\left(i\,Sinh(l_{\eta 2})\right)}{P_{2n+1}\left(i\,Sinh(l_{\eta 1})\right)}-\frac{Q_{2n+1}\left(i\,Sinh(l_{\eta 2})\right)}{Q_{2n+1}\left(i\,Sinh(l_{\eta 1})\right)}\right)}P_{2n+1}(Cos(\theta))$$

Si T_0 =- T_1=1 alors

$$T(\eta,\theta)=2\sum_{n=0,+\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!(4n+3)}{2^{2n+1}(n-1)!(n+1)!}\frac{\left(\frac{P_{2n+1}\left(i\,Sinh(\eta)\right)}{P_{2n+1}\left(i\,Sinh(l_{\eta 1})\right)}-\frac{Q_{2n+1}\left(i\,Sinh(\eta)\right)}{Q_{2n+1}\left(i\,Sinh(l_{\eta 1})\right)}\right)}{\left(\frac{P_{2n+1}\left(i\,Sinh(l_{\eta 2})\right)}{P_{2n+1}\left(i\,Sinh(l_{\eta 1})\right)}-\frac{Q_{2n+1}\left(i\,Sinh(l_{\eta 2})\right)}{Q_{2n+1}\left(i\,Sinh(l_{\eta 1})\right)}\right)}P_{2n+1}(Cos(\theta))$$

ou bien

$$T(\eta,\theta)=\sum_{n=0,+\infty}(-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{(4n+3)}{2(n+1)}\frac{\left(\frac{P_{2n+1}\left(i\,Sinh(\eta)\right)}{P_{2n+1}\left(i\,Sinh(l_{\eta 1})\right)}-\frac{Q_{2n+1}\left(i\,Sinh(\eta)\right)}{Q_{2n+1}\left(i\,Sinh(l_{\eta 1})\right)}\right)}{\left(\frac{P_{2n+1}\left(i\,Sinh(l_{\eta 2})\right)}{P_{2n+1}\left(i\,Sinh(l_{\eta 1})\right)}-\frac{Q_{2n+1}\left(i\,Sinh(l_{\eta 2})\right)}{Q_{2n+1}\left(i\,Sinh(l_{\eta 1})\right)}\right)}P_{2n+1}(Cos(\theta))$$

Exemple : Sphéroïde aplati creux (η,ϑ) soumis à des conditions aux limites de Robin inhomogènes en η=$l_{\eta 2}$ et Dirichlet homogènes en η=$l_{\eta 1}$

Si le problème s'exprime sous la forme :

$$\Delta T(\eta,\theta)=0 \quad T(\eta,\theta)\ fini$$

$$T(\eta,\theta)\Big|_{\eta=l_{\eta 1}}=0 \quad \alpha\, T_\eta^{'}(\eta,\theta)+\beta\, T(\eta,\theta)\Big|_{\eta=l_{\eta 2}}=f_\theta(Cos(\theta))$$

Alors la solution s'écrit sous la forme :

$$Valeur\ \ propre\ n$$

$$T(\eta,\theta)\Big|_{\eta=l_{\eta 1}}=0 \Rightarrow partie\ radiale() \propto \left(\frac{P_n(i\ Sinh(\eta))}{P_n(i\ Sinh(l_{\eta 1}))}-\frac{Q_n(i\ Sinh(\eta))}{Q_n(i\ Sinh(l_{\eta 1}))}\right)$$

$$\frac{dP_n(i\ Sinh(\eta))}{d\eta}\Bigg|_{\eta=l_{\eta 2}}=i\,Cosh(l_{\eta 2})P_n{'}(i\ Sinh(l_{\eta 2}))=\frac{n\big(i\ Sinh(l_{\eta 2})P_n(i\ Sinh(l_{\eta 2}))-P_{n-1}(i\ Sinh(l_{\eta 2}))\big)}{i\ Cosh(l_{\eta 2})}$$

$$\frac{dQ_n(i\ Sinh(\eta))}{d\eta}\Bigg|_{\eta=l_{\eta 2}}=\frac{n\big(i\ Sinh(l_{\eta 2})Q_n(i\ Sinh(l_{\eta 2}))-Q_{n-1}(i\ Sinh(l_{\eta 2}))\big)}{i\ Cosh(l_{\eta 2})}$$

$$Posons\ D_n=$$

$$=\left(\begin{array}{l}\dfrac{\alpha\, n}{i\ Cosh(l_{\eta 2})}\left(\dfrac{\big(i\ Sinh(l_{\eta 2})P_n(i\ Sinh(l_{\eta 2}))-P_{n-1}(i\ Sinh(l_{\eta 2}))\big)}{P_n(i\ Sinh(l_{\eta 1}))}-\dfrac{\big(i\ Sinh(l_{\eta 2})Q_n(i\ Sinh(l_{\eta 2}))-Q_{n-1}(i\ Sinh(l_{\eta 2}))\big)}{Q_n(i\ Sinh(l_{\eta 1}))}\right)\\ +\beta\left(\dfrac{P_n(i\ Sinh(l_{\eta 2}))}{P_n(i\ Sinh(l_{\eta 1}))}-\dfrac{Q_n(i\ Sinh(l_{\eta 2}))}{Q_n(i\ Sinh(l_{\eta 1}))}\right)\end{array}\right)$$

$$Valeur\ \ propre\ 0$$

$$T(\eta,\theta)\Big|_{\eta=l_{\eta 1}}=0 \Rightarrow partie\ radiale \propto \big(Arctan(Sinh(\eta))-Arctan(Sinh(l_{\eta 1}))\big)$$

$$\frac{d}{d\eta}\big(Arctan(Sinh(\eta))\big)\Bigg|_{\eta=l_{\eta 2}}=\frac{1}{Cosh(l_{\eta 2})} \qquad Posons\ D_0=\frac{\alpha}{Cosh(l_{\eta 2})}+\beta\big(Arctan(Sinh(l_{\eta 2}))-Arctan(Sinh(l_{\eta 1}))\big)$$

$$Condition\ aux\ limites\ \eta=l_{\eta 2} \Rightarrow \alpha\, T_\eta^{'}(\eta,\theta)+\beta\, T(\eta,\theta)\Big|_{\eta=l_{\eta 2}}=f_\theta(Cos(\theta))$$

$$\Rightarrow z=Cos(\theta) \quad et \quad f_\theta(Cos(\theta))=C_0D_0+\sum_{n=1,+\infty} C_n\,\frac{(2n+1)}{2}D_nP_n(Cos(\theta))$$

$$C_n=\frac{(2n+1)}{2\,D_n}\int_{-1}^{1}dz\ f_\theta(z)\,P_n(z) \quad C_0=\frac{1}{2\,D_0}\int_{-1}^{1}dz\ f_\theta(z)$$

$$B_0=\int_{-1}^{1}dz\ f_\theta(z) \quad B_n=\int_{-1}^{1}dz\ f_\theta(z)\,P_n(z)$$

$$T(r,\theta)=\frac{B_0}{2}\frac{\big(Arctan(Sinh(\eta))-Arctan(Sinh(l_{\eta 1}))\big)}{D_0}+\sum_{n=1,+\infty}\frac{B_n(2n+1)\left(\dfrac{P_n(i\ Sinh(\eta))}{P_n(i\ Sinh(l_{\eta 1}))}-\dfrac{Q_n(i\ Sinh(\eta))}{Q_n(i\ Sinh(l_{\eta 1}))}\right)}{2\,D_n}P_n(Cos(\theta))$$

.

Qui redonne la solution lorsque la condition devient de Neumann α=1 et β=0 :

$$z = Cos(\theta) \quad B_0 = \int_{-1}^{1} dz\ f_\theta(z) \quad B_n = \int_{-1}^{1} dz\ f_\theta(z)\ P_n(z)$$

$$\alpha = 1\ et\ \beta = 0 \Rightarrow$$

$$D_n = \frac{n}{i\ Cosh(l_{\eta 2})}\left(\frac{\left(i\ Sinh(l_{\eta 2})P_n(i\ Sinh(l_{\eta 2})) - P_{n-1}(i\ Sinh(l_{\eta 2}))\right)}{P_n\left(i\ Sinh(l_{\eta 1})\right)} - \frac{\left(i\ Sinh(l_{\eta 2})Q_n(i\ Sinh(l_{\eta 2})) - Q_{n-1}(i\ Sinh(l_{\eta 2}))\right)}{Q_n\left(i\ Sinh(l_{\eta 1})\right)}\right)$$

$$D_0 = \frac{1}{Cosh(l_{\eta 2})}$$

$$T(r,\theta) = \frac{B_0}{2} Cosh(l_{\eta 2})\left(Arctan\left(Sinh(\eta)\right) - Arctan\left(Sinh(l_{\eta 1})\right)\right)$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{n=1,+\infty} \frac{B_n(2n+1)\left(\frac{P_n\left(i\ Sinh(\eta)\right)}{P_n\left(i\ Sinh(l_{\eta 1})\right)} - \frac{Q_n\left(i\ Sinh(\eta)\right)}{Q_n\left(i\ Sinh(l_{\eta 1})\right)}\right)}{D_n} P_n(Cos(\theta))$$

Ainsi que la solution de Dirichlet lorsque α=0 et β=1 :

$$z = Cos(\theta) \quad B_0 = \int_{-1}^{1} dz\ f_\theta(z) \quad B_n = \int_{-1}^{1} dz\ f_\theta(z)\ P_n(z) \quad \alpha = 0\ et\ \beta = 1 \Rightarrow D_n = \left(\frac{P_n\left(i\ Sinh(l_{\eta 2})\right)}{P_n\left(i\ Sinh(l_{\eta 1})\right)} - \frac{Q_n\left(i\ Sinh(l_{\eta 2})\right)}{Q_n\left(i\ Sinh(l_{\eta 1})\right)}\right)$$

$$D_0 = \left(Arctan\left(Sinh(l_{\eta 2})\right) - Arctan\left(Sinh(l_{\eta 1})\right)\right)$$

$$T(r,\theta) = \frac{B_0}{2}\frac{\left(Arctan\left(Sinh(\eta)\right) - Arctan\left(Sinh(l_{\eta 1})\right)\right)}{\left(Arctan\left(Sinh(l_{\eta 2})\right) - Arctan\left(Sinh(l_{\eta 1})\right)\right)}$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{n=1,+\infty} B_n(2n+1)\frac{\left(\frac{P_n\left(i\ Sinh(\eta)\right)}{P_n\left(i\ Sinh(l_{\eta 1})\right)} - \frac{Q_n\left(i\ Sinh(\eta)\right)}{Q_n\left(i\ Sinh(l_{\eta 1})\right)}\right)}{\left(\frac{P_n\left(i\ Sinh(l_{\eta 2})\right)}{P_n\left(i\ Sinh(l_{\eta 1})\right)} - \frac{Q_n\left(i\ Sinh(l_{\eta 2})\right)}{Q_n\left(i\ Sinh(l_{\eta 1})\right)}\right)} P_n(Cos(\theta))$$

On peut vérifier que l'expression Dn est bien toujours à valeur réelle :

$$D_n = \left(\begin{array}{l} \frac{\alpha\ n}{i\ Cosh(l_{\eta 2})}\left(\begin{array}{l} \frac{\left(i\ Sinh(l_{\eta 2})P_n(i\ Sinh(l_{\eta 2})) - P_{n-1}(i\ Sinh(l_{\eta 2}))\right)}{P_n\left(i\ Sinh(l_{\eta 1})\right)} - \\ -\frac{\left(i\ Sinh(l_{\eta 2})Q_n(i\ Sinh(l_{\eta 2})) - Q_{n-1}(i\ Sinh(l_{\eta 2}))\right)}{Q_n\left(i\ Sinh(l_{\eta 1})\right)} \end{array}\right) \\ +\beta\left(\frac{P_n\left(i\ Sinh(l_{\eta 2})\right)}{P_n\left(i\ Sinh(l_{\eta 1})\right)} - \frac{Q_n\left(i\ Sinh(l_{\eta 2})\right)}{Q_n\left(i\ Sinh(l_{\eta 1})\right)}\right) \end{array}\right)$$

$$n\ pair \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} P_n(i\ Sinh(l_{\eta 2}))\ \ purement\ réel \\ P_{n-1}(i\ Sinh(l_{\eta 2}))\ \ purement\ imaginaire \end{array}\right\} \rightarrow \frac{\left(i\ Sinh(l_{\eta 2})P_n(i\ Sinh(l_{\eta 2})) - P_{n-1}(i\ Sinh(l_{\eta 2}))\right)}{P_n\left(i\ Sinh(l_{\eta 1})\right)} = \frac{purement\ imaginaire}{réel}$$

$$\left.\begin{array}{l} Q_n(i\ Sinh(l_{\eta 2}))\ \ purement\ imaginaire \\ Q_{n-1}(i\ Sinh(l_{\eta 2}))\ \ purement\ réel \end{array}\right\} \rightarrow \frac{\left(i\ Sinh(l_{\eta 2})Q_n(i\ Sinh(l_{\eta 2})) - Q_{n-1}(i\ Sinh(l_{\eta 2}))\right)}{Q_n\left(i\ Sinh(l_{\eta 1})\right)} = \frac{réel}{purement\ imaginaire}$$

$$\left.\begin{array}{l} Terme\ \alpha = \frac{purement\ imaginaire}{purement\ imaginaire} = réel \quad Terme\ \beta = \frac{réel}{réel} - \frac{purement\ imaginaire}{purement\ imaginaire} = réel \end{array}\right\} D_n \quad purement\ réel$$

.

$$D_n = \left(\begin{array}{l} \dfrac{\alpha\, n}{i\, Cosh(l_{\eta 2})} \left(\dfrac{\left(i\, Sinh(l_{\eta 2}) P_n(i\, Sinh(l_{\eta 2})) - P_{n-1}(i\, Sinh(l_{\eta 2}))\right)}{P_n\left(i\, Sinh(l_{\eta 1})\right)} - \dfrac{\left(i\, Sinh(l_{\eta 2}) Q_n(i\, Sinh(l_{\eta 2})) - Q_{n-1}(i\, Sinh(l_{\eta 2}))\right)}{Q_n\left(i\, Sinh(l_{\eta 1})\right)} \right) \\ + \beta \left(\dfrac{P_n\left(i\, Sinh(l_{\eta 2})\right)}{P_n\left(i\, Sinh(l_{\eta 1})\right)} - \dfrac{Q_n\left(i\, Sinh(l_{\eta 2})\right)}{Q_n\left(i\, Sinh(l_{\eta 1})\right)} \right) \end{array} \right)$$

$n\ impair \Rightarrow$

$$\left. \begin{array}{l} P_n(i\, Sinh(l_{\eta 2}))\ \ purement\ imaginaire \\ P_{n-1}(i\, Sinh(l_{\eta 2}))\ \ purement\ réel \end{array} \right\} \rightarrow \frac{\left(i\, Sinh(l_{\eta 2}) P_n(i\, Sinh(l_{\eta 2})) - P_{n-1}(i\, Sinh(l_{\eta 2}))\right)}{P_n\left(i\, Sinh(l_{\eta 1})\right)} = \frac{réel}{purement\ imaginaire}$$

$$\left. \begin{array}{l} Q_n(i\, Sinh(l_{\eta 2}))\ \ purement\ réel \\ Q_{n-1}(i\, Sinh(l_{\eta 2}))\ \ purement\ imaginaire \end{array} \right\} \rightarrow \frac{\left(i\, Sinh(l_{\eta 2}) Q_n(i\, Sinh(l_{\eta 2})) - Q_{n-1}(i\, Sinh(l_{\eta 2}))\right)}{Q_n\left(i\, Sinh(l_{\eta 1})\right)} = \frac{purement\ imaginaire}{réel}$$

$$\left. \begin{array}{l} Terme\, \alpha = \dfrac{purement\ imaginaire}{purement\ imaginaire} = réel \\ Terme\, \beta = \dfrac{purement\ imaginaire}{purement\ imaginaire} - \dfrac{réel}{réel} = réel \end{array} \right\} D_n \quad purement\ réel$$

Dans l'expression :

$$z = Cos(\theta) \quad B_0 = \int_{-1}^{1} dz\ f_\theta(z) \quad B_n = \int_{-1}^{1} dz\ f_\theta(z)\ P_n(z)$$

$$D_n = \left(\begin{array}{l} \dfrac{\alpha\, n}{i\, Cosh(l_{\eta 2})} \left(\dfrac{\left(i\, Sinh(l_{\eta 2}) P_n(i\, Sinh(l_{\eta 2})) - P_{n-1}(i\, Sinh(l_{\eta 2}))\right)}{P_n\left(i\, Sinh(l_{\eta 1})\right)} - \dfrac{\left(i\, Sinh(l_{\eta 2}) Q_n(i\, Sinh(l_{\eta 2})) - Q_{n-1}(i\, Sinh(l_{\eta 2}))\right)}{Q_n\left(i\, Sinh(l_{\eta 1})\right)} \right) \\ + \beta \left(\dfrac{P_n\left(i\, Sinh(l_{\eta 2})\right)}{P_n\left(i\, Sinh(l_{\eta 1})\right)} - \dfrac{Q_n\left(i\, Sinh(l_{\eta 2})\right)}{Q_n\left(i\, Sinh(l_{\eta 1})\right)} \right) \end{array} \right)$$

$$D_0 = \frac{\alpha}{Cosh(l_{\eta 2})} + \beta \left(Arctan\left(Sinh(l_{\eta 2})\right) - Arctan\left(Sinh(l_{\eta 1})\right) \right)$$

$$T(r,\theta) = \frac{B_0}{2} \frac{\left(Arctan\left(Sinh(\eta)\right) - Arctan\left(Sinh(l_{\eta 1})\right)\right)}{D_0}$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{n=1,+\infty} \frac{B_n(2n+1)\left(\dfrac{P_n\left(i\, Sinh(\eta)\right)}{P_n\left(i\, Sinh(l_{\eta 1})\right)} - \dfrac{Q_n\left(i\, Sinh(\eta)\right)}{Q_n\left(i\, Sinh(l_{\eta 1})\right)} \right)}{D_n} P_n(Cos(\theta))$$

Calculons la solution quelque soit les valeurs de α et β pour des valeurs particulières de la fonction limites.

Pour une fonction par palier, "Hémisphéroïde" supérieur à 1, "Hémisphéroïde" inférieur à 0.

$$si \quad T(\eta,\theta)\big|_{\eta=l_\eta} = 1 - Heaviside(\theta-\pi/2) \quad fonction\ de\ Heaviside$$

$$\Rightarrow B_0 = 1 \quad et \quad B_n = \int_0^1 dz\ P_n(z) = \frac{\sqrt{\pi}}{2n+1}\left(\frac{1}{\Gamma\left(\frac{2-n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} - \frac{1}{\Gamma\left(\frac{-n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right)}\right)$$

$$B_{2n} = 0 \quad B_{2n+1} = \frac{(-1)^n (2n-1)!(4n+3)}{2^{2n}(n-1)!(n+1)!(4n+5)} = \frac{1}{(4n+5)}(-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{(4n+3)}{2(n+1)}$$

$$T(r,\theta) = \frac{1}{2}\frac{\left(Arctan(Sinh(\eta)) - Arctan(Sinh(l_{\eta 1}))\right)}{D_0}$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{n=0,+\infty}(4n+5)\ B_{2n+1}\frac{\left(\frac{P_{2n+1}(i\ Sinh(\eta))}{P_{2n+1}(i\ Sinh(l_{\eta 1}))} - \frac{Q_{2n+1}(i\ Sinh(\eta))}{Q_{2n+1}(i\ Sinh(l_{\eta 1}))}\right)}{D_{2n+1}} P_{2n+1}(Cos(\theta))$$

$$T(r,\theta) = \frac{1}{2}\frac{\left(Arctan(Sinh(\eta)) - Arctan(Sinh(l_{\eta 1}))\right)}{D_0}$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{n=0,+\infty}(-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{(4n+3)}{2(n+1)}\frac{\left(\frac{P_{2n+1}(i\ Sinh(\eta))}{P_{2n+1}(i\ Sinh(l_{\eta 1}))} - \frac{Q_{2n+1}(i\ Sinh(\eta))}{Q_{2n+1}(i\ Sinh(l_{\eta 1}))}\right)}{D_{2n+1}} P_{2n+1}(Cos(\theta))$$

Pour une fonction par palier, "Hémisphéroïde" supérieur à 0, "Hémisphéroïde" inférieur à 1.

$$si \quad T(\eta,\theta)\big|_{\eta=l_\eta} = Heaviside(\theta-\pi/2) \quad fonction\ de\ Heaviside$$

$$alors\ on\ a\ démontré\ que \int_{\pi/2}^{\pi} d\theta\ Sin(\theta)\ P_n(Cos(\theta)) = \int_0^{-1} dz\ P_n(z) = -(-1)^n \int_0^1 dz\ P_n(z)$$

$$comme\ B_{2n} = 0 \quad et \quad B_{2n+1} \neq 0$$

$$T(r,\theta) = \frac{1}{2}\frac{\left(Arctan(Sinh(\eta)) - Arctan(Sinh(l_{\eta 1}))\right)}{D_0}$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{n=0,+\infty}(-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{(4n+3)}{2(n+1)}\frac{\left(\frac{P_{2n+1}(i\ Sinh(\eta))}{P_{2n+1}(i\ Sinh(l_{\eta 1}))} - \frac{Q_{2n+1}(i\ Sinh(\eta))}{Q_{2n+1}(i\ Sinh(l_{\eta 1}))}\right)}{D_{2n+1}} P_{2n+1}(Cos(\theta))$$

Pour une fonction par palier, "Hémisphéroïde" supérieur à 1, "Hémisphéroïde" inférieur à -1, la solution est la superposition de la solution "Hémisphéroïde" supérieur +1 - Solution "Hémisphéroïde" inférieur 1:

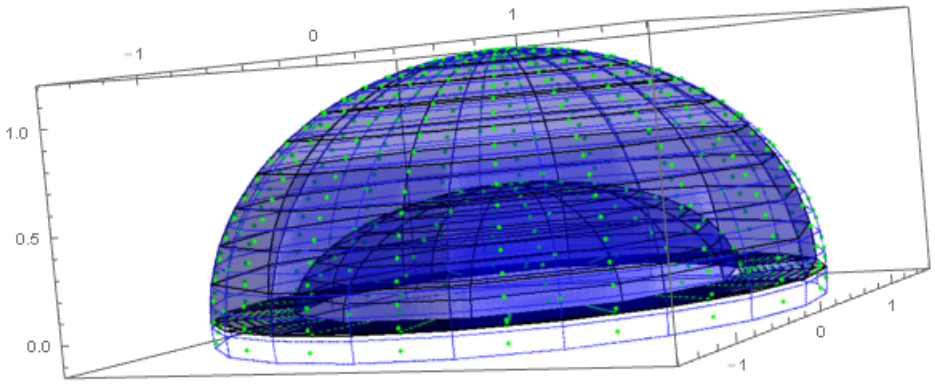
$$si \quad T(\eta,\theta)\big|_{\eta=l_\eta} = 1 - 2Heaviside(\theta-\pi/2) \quad fonction\ de\ Heaviside$$

$$T(\eta,\theta) = \sum_{n=0,+\infty}(-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{(4n+3)}{2(n+1)}\frac{\left(\frac{P_{2n+1}(i\ Sinh(\eta))}{P_{2n+1}(i\ Sinh(l_{\eta 1}))} - \frac{Q_{2n+1}(i\ Sinh(\eta))}{Q_{2n+1}(i\ Sinh(l_{\eta 1}))}\right)}{D_{2n+1}} P_{2n+1}(Cos(\theta))$$

Exemple : "Hémisphéroïde" aplati creux (η,ϑ) soumis à des conditions aux limites de Dirichlet inhomogènes en η=$l_{\eta 2}$ et Dirichlet homogènes en η=$l_{\eta 1}$

Soit le problème :

$$\Delta T(\eta,\theta)=0 \quad T(\eta,\theta)\big|_{\eta=l_{\eta 1}}=0 \quad T(\eta,\theta)\big|_{\eta=l_{\eta 2}}=1 \quad T(\eta,\theta)\big|_{\theta=\pi/2}=0$$



En utilisant le problème équivalent du sphéroïde creux dont les deux "Hémisphéroïdes" sont soumises à des conditions aux limites de Dirichlet impaires.

$$T(\eta,\theta)=2\sum_{n=0,+\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!(4n+3)}{2^{2n+1}(n-1)!(n+1)!}\frac{\left(\dfrac{P_{2n+1}(i\,Sinh(\eta))}{P_{2n+1}(i\,Sinh(l_{\eta 1}))}-\dfrac{Q_{2n+1}(i\,Sinh(\eta))}{Q_{2n+1}(i\,Sinh(l_{\eta 1}))}\right)}{\left(\dfrac{P_{2n+1}(i\,Sinh(l_{\eta 2}))}{P_{2n+1}(i\,Sinh(l_{\eta 1}))}-\dfrac{Q_{2n+1}(i\,Sinh(l_{\eta 2}))}{Q_{2n+1}(i\,Sinh(l_{\eta 1}))}\right)}P_{2n+1}(Cos(\theta))$$

ou bien

$$T(\eta,\theta)=\sum_{n=0,+\infty}(-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{(4n+3)}{2(n+1)}\frac{\left(\dfrac{P_{2n+1}(i\,Sinh(\eta))}{P_{2n+1}(i\,Sinh(l_{\eta 1}))}-\dfrac{Q_{2n+1}(i\,Sinh(\eta))}{Q_{2n+1}(i\,Sinh(l_{\eta 1}))}\right)}{\left(\dfrac{P_{2n+1}(i\,Sinh(l_{\eta 2}))}{P_{2n+1}(i\,Sinh(l_{\eta 1}))}-\dfrac{Q_{2n+1}(i\,Sinh(l_{\eta 2}))}{Q_{2n+1}(i\,Sinh(l_{\eta 1}))}\right)}P_{2n+1}(Cos(\theta))$$

Pour un problème plus général :

$$\Delta T(\eta,\theta)=0 \quad T(\eta,\theta)\big|_{\eta=l_{\eta 1}}=0 \quad T(\eta,\theta)\big|_{\eta=l_{\eta 2}}=f_\theta(\theta) \quad T(\eta,\theta)\big|_{\theta=\pi/2}=0$$

Par l'équivalence avec le problème aux limites suivant sur le sphéroïde creux :

$$\Delta T(\eta,\theta)=0 \quad T(\eta,\theta)\ fini \quad T(\eta,\theta)\big|_{\eta=l_{\eta 1}}=0$$

$$T(\eta,\theta)\big|_{\eta=l_{\eta 2},\,\theta[0,\pi/2]}=f_\theta(Cos(\theta))$$

$$T(\eta,\theta)\big|_{\eta=l_{\eta 2},\,\theta[\pi/2,\pi]}=-f_\theta(Cos(\pi-\theta))$$

cela donne :

$$C_n=\int_0^1 dz\ f_\theta(z)\ P_{2n+1}(z)$$

$$T(r,\theta)=\sum_{n=0,+\infty}(4n+3)\,C_n\,\frac{\left(\dfrac{P_{2n+1}(i\ Sinh(\eta))}{P_{2n+1}(i\ Sinh(l_{\eta 1}))}-\dfrac{Q_{2n+1}(i\ Sinh(\eta))}{Q_{2n+1}(i\ Sinh(l_{\eta 1}))}\right)}{\left(\dfrac{P_{2n+1}(i\ Sinh(l_{\eta 2}))}{P_{2n+1}(i\ Sinh(l_{\eta 1}))}-\dfrac{Q_{2n+1}(i\ Sinh(l_{\eta 2}))}{Q_{2n+1}(i\ Sinh(l_{\eta 1}))}\right)}\,P_{2n+1}(Cos(\theta))$$

Exemple: "Hémisphéroïde" aplati creux (η,ϑ) soumis à des conditions aux limites de Robin inhomogènes en η=$l_{\eta 2}$ et Dirichlet homogènes en η=$l_{\eta 1}$

Si le problème s'exprime sous la forme :

$$\Delta T(\eta,\theta)=0 \quad T(\eta,\theta)\ fini \quad T(\eta,\theta)\big|_{\eta=l_{\eta 1}}=0$$

$$\alpha\ T'_\eta(\eta,\theta)+\beta\ T(\eta,\theta)\big|_{\eta=l_{\eta 2}}=f_\theta(Cos(\theta)) \quad T(\eta,\theta)\big|_{\theta=\frac{\pi}{2}}=0$$

Alors peut voir que la solution est également celle du problème suivant sur le sphéroïde :

$$\Delta T(\eta,\theta)=0 \quad T(\eta,\theta)\ fini \quad T(\eta,\theta)\big|_{\eta=l_{\eta 1}}=0$$

$$\alpha\ T'_\eta(\eta,\theta)+\beta\ T(\eta,\theta)\big|_{\eta=l_{\eta 2},\,\theta[0,\pi/2]}=f_\theta(Cos(\theta))$$

$$\alpha\ T'_\eta(\eta,\theta)+\beta\ T(\eta,\theta)\big|_{\eta=l_{\eta 2},\,\theta[\pi/2,\pi]}=-f_\theta(Cos(\pi-\theta))$$

En effet supposons le problème précédent du sphéroïde creux, alors la solution se développe sous la forme :

$$z=Cos(\theta) \quad f_\theta(-z)=-f_\theta(z)$$

$$B_0=\int_{-1}^1 dz\ f_\theta(z)=0 \quad B_n=(1-(-1)^n)\int_0^1 dz\ f_\theta(z)\ P_n(z) \quad B_{2n}=0 \quad B_{2n+1}=2C_{2n+1}\neq 0 \quad C_n=\int_0^1 dz\ f_\theta(z)\ P_n(z)$$

$$D_n=\left(\begin{array}{l}\dfrac{\alpha\ n}{i\ Cosh(l_{\eta 2})}\left(\dfrac{\left(i\ Sinh(l_{\eta 2})P_n(i\ Sinh(l_{\eta 2}))-P_{n-1}(i\ Sinh(l_{\eta 2}))\right)}{P_n(i\ Sinh(l_{\eta 1}))}-\dfrac{\left(i\ Sinh(l_{\eta 2})Q_n(i\ Sinh(l_{\eta 2}))-Q_{n-1}(i\ Sinh(l_{\eta 2}))\right)}{Q_n(i\ Sinh(l_{\eta 1}))}\right)\\ +\beta\left(\dfrac{P_n(i\ Sinh(l_{\eta 2}))}{P_n(i\ Sinh(l_{\eta 1}))}-\dfrac{Q_n(i\ Sinh(l_{\eta 2}))}{Q_n(i\ Sinh(l_{\eta 1}))}\right)\end{array}\right)$$

$$\Rightarrow T(\eta,\theta)=\sum_{n=0,+\infty}(4n+3)\frac{C_{2n+1}\left(\dfrac{P_{2n+1}(i\ Sinh(\eta))}{P_{2n+1}(i\ Sinh(l_{\eta 1}))}-\dfrac{Q_{2n+1}(i\ Sinh(\eta))}{Q_{2n+1}(i\ Sinh(l_{\eta 1}))}\right)}{D_{2n+1}}\,P_{2n+1}(Cos(\theta))$$

Comme seuls les coefficients impairs sont présents alors la valeur en ϑ=π/2 des polynômes de Legendre est nulle $P_{2n+1}(0)=0$ *. Il vient T(r,π/2)=0, ce qui correspond aux conditions aux limites du problème de "l'Hémisphéroïde".*

La solution est donc :

$$C_n = \int_0^1 dz\ f_\theta(z)\ P_n(z)$$

$$D_n = \left(\begin{array}{l} \dfrac{\alpha\, n}{i\ Cosh(l_{\eta 2})} \left(\begin{array}{l} \dfrac{\left(i\ Sinh(l_{\eta 2}) P_n(i\ Sinh(l_{\eta 2})) - P_{n-1}(i\ Sinh(l_{\eta 2}))\right)}{P_n\left(i\ Sinh(l_{\eta 1})\right)} - \\ - \dfrac{\left(i\ Sinh(l_{\eta 2}) Q_n(i\ Sinh(l_{\eta 2})) - Q_{n-1}(i\ Sinh(l_{\eta 2}))\right)}{Q_n\left(i\ Sinh(l_{\eta 1})\right)} \end{array} \right) \\ + \beta \left(\dfrac{P_n\left(i\ Sinh(l_{\eta 2})\right)}{P_n\left(i\ Sinh(l_{\eta 1})\right)} - \dfrac{Q_n\left(i\ Sinh(l_{\eta 2})\right)}{Q_n\left(i\ Sinh(l_{\eta 1})\right)} \right) \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow T(\eta,\theta) = \sum_{n=0,+\infty} (4n+3) \frac{C_{2n+1} \left(\dfrac{P_{2n+1}\left(i\ Sinh(\eta)\right)}{P_{2n+1}\left(i\ Sinh(l_{\eta 1})\right)} - \dfrac{Q_{2n+1}\left(i\ Sinh(\eta)\right)}{Q_{2n+1}\left(i\ Sinh(l_{\eta 1})\right)} \right)}{D_{2n+1}} P_{2n+1}(Cos(\theta))$$

Lorsque α=1 et β=0, à la solution il faut ajouter une constante B0 (auparavant quelconque dans un problème de Sphéroïde avec condition de Neumann fixé) mais qui est là fixée à 0 par la condition aux limites à la base de "l'Hémisphéroïde", cela donne donc :

$\alpha = 1\ et\ \beta = 0 \Rightarrow$

$$C_n = \int_0^1 dz\ f_\theta(z)\ P_n(z)$$

$$D_n = \frac{n}{i\ Cosh(l_{\eta 2})} \left(\frac{\left(i\ Sinh(l_{\eta 2}) P_n(i\ Sinh(l_{\eta 2})) - P_{n-1}(i\ Sinh(l_{\eta 2}))\right)}{P_n\left(i\ Sinh(l_{\eta 1})\right)} - \frac{\left(i\ Sinh(l_{\eta 2}) Q_n(i\ Sinh(l_{\eta 2})) - Q_{n-1}(i\ Sinh(l_{\eta 2}))\right)}{Q_n\left(i\ Sinh(l_{\eta 1})\right)} \right)$$

$$T(\eta,\theta) = \sum_{n=0,+\infty} (4n+3) \frac{C_{2n+1} \left(\dfrac{P_{2n+1}\left(i\ Sinh(\eta)\right)}{P_{2n+1}\left(i\ Sinh(l_{\eta 1})\right)} - \dfrac{Q_{2n+1}\left(i\ Sinh(\eta)\right)}{Q_{2n+1}\left(i\ Sinh(l_{\eta 1})\right)} \right)}{D_{2n+1}} P_{2n+1}(Cos(\theta))$$

Lorsque la fonction limite =1, alors la solution se présente sous la forme :

$$C_{2n+1} = \int_0^1 dz\ P_{2n+1}(z) = (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{1}{2(n+1)}$$

$$T(\eta,\theta) = \sum_{n=0,+\infty} (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{(4n+3)}{2(n+1)} \frac{\left(\dfrac{P_{2n+1}\left(i\ Sinh(\eta)\right)}{P_{2n+1}\left(i\ Sinh(l_{\eta 1})\right)} - \dfrac{Q_{2n+1}\left(i\ Sinh(\eta)\right)}{Q_{2n+1}\left(i\ Sinh(l_{\eta 1})\right)} \right)}{D_{2n+1}} P_{2n+1}(Cos(\theta))$$

Exemple : "Hémisphéroïde" aplati plein (η,ϑ) soumis à des conditions aux limites de Robin inhomogènes η=$l_{\eta 2}$

Pour le problème :

$$\Delta T(\eta,\theta)=0 \quad T(\eta,\theta)\ fini$$

$$\alpha\, T'_{\eta}(\eta,\theta)+\beta\, T(\eta,\theta)\Big|_{\eta=l_\eta}=f_\theta(Cos(\theta)) \quad T(\eta,\theta)\Big|_{\theta=\pi/2}=0$$

Il suffit de se conformer à la règle de passage sur la partie radiale dans les résultats précédents sur "l'Hémisphéroïde" creux, en éliminant le terme en Q_n pour respecter la condition de régularité du gradient de la solution. Il vient alors :

$$Partie\,radiale \quad \left(\frac{P_n(i\ Sinh(\eta))}{P_n(i\ Sinh(l_{\eta 1}))}-\frac{Q_n(i\ Sinh(\eta))}{Q_n(i\ Sinh(l_{\eta 1}))}\right)\to P_n(i\ Sinh(\eta))$$

$$C_n=\int_0^1 dz\ f_\theta(z)\ P_n(z)$$

$$D_n=\frac{\alpha\, n\big(i\ Sinh(l_\eta)P_n(i\ Sinh(l_\eta))-P_{n-1}(i\ Sinh(l_\eta))\big)+\beta\, i\ Cosh(l_\eta)P_n(i\ Sinh(l_\eta))}{i\ Cosh(l_\eta)}$$

$$\Rightarrow T(r,\theta)=\sum_{n=0,+\infty}(4n+3)\frac{C_{2n+1}P_{2n+1}(Cosh(\eta))}{D_{2n+1}}P_{2n+1}(Cos(\theta))$$

<u>Exemples divers de problèmes extérieurs sur des sphéroïdes et "Hémisphéroïde" aplatis pleins</u>

Pour le problème extérieur de Dirichlet : $\begin{array}{l}\Delta T(\eta,\theta)=0 \quad T(\eta,\theta)\ fini\\ T(\eta,\theta)\Big|_{\eta=l_\eta}=f_\theta(\theta)=f_\theta(Cos(\theta))\end{array}$*. La solution est indépendante de φ et se développe en série de polynôme de Legendre :*

$$T(\eta,\theta)=A_0+B_0\ Arctan(Sinh(\eta))+\sum_{n=1,+\infty}\big(A_\eta\ P_n(i\,Sinh(\eta))+B_\eta\ Q_n(i\,Sinh(\eta))\big)\big(A_\theta P_n(Cos(\theta))+B_\theta\ Q_n(Cos(\theta))\big)$$

Ici nous n'appliquons pas la condition de régularité du gradient en η=0 et ϑ=π/2, car cette « ligne courbe » n'est pas incluse dans le domaine extérieur.

***Remarque** : le seul cas de problème extérieur pour lequel la ligne η=0 et ϑ=π/2 est incluse dans le domaine (en frontière) est celui pour lequel l_η=0. Dans ce cas il s'agit du cercle limite de rayon c :* $x^2+y^2=c^2 \quad z=0$*. Toutefois comme la singularité du gradient est sur la frontière du domaine, la solution peut admettre cette singularité car par exemple elle rend parfaitement compte de discontinuité de gradient (potentiel électrostatique ou température) à la frontière du domaine. On exclut les solutions du type* $T(\eta,\theta)=\sum_{n=1,+\infty}A_nQ_n(i\ Sinh(\eta))P_n(Cos(\theta))$ *uniquement lorsque la ligne est incluse entièrement dans le domaine (ce qui est le cas pour le problème intérieure).*

En définitive La nullité à l'infini, la régularité, la finitude de la partie angulaire, ainsi que le respect de la condition aux limites implique que $A_0=B_0=A_\eta=B_\vartheta=0$, et cela donne une solution de la forme : $T(\eta,\theta)=\sum_{n=1,+\infty} A_n Q_n\left(i\ Sinh(\eta)\right)P_n\left(Cos(\theta)\right)$*.Et La solution s'écrit :*

$$z=Cos(\theta)\quad B_0=\int_0^{\pi} d\theta\ Sin(\theta)\ f_\theta(\theta)=\int_{-1}^{1} dz\ f_\theta(z)\quad B_n=\int_0^{\pi} d\theta\ Sin(\theta)\ f_\theta(\theta)\ P_n\left(Cos(\theta)\right)=\int_{-1}^{1} dz\ f_\theta(z)\ P_n(z)$$

$$T(r,\theta)=\sum_{n=1,+\infty} B_n \frac{(2n+1)}{2}\frac{Q_n(i\ Sinh(\eta))}{Q_n\left(i\ Sinh(l_\eta)\right)}P_n(Cos(\theta))$$

Pour le problème extérieur sur « l'Hémisphéroïde », il peut se poser comme un problème mixte dans lequel la solution doit s'annuler sur la tranche. Pour le problème général de Dirichlet sur "l'Hémisphéroïde" : $\Delta T(\eta,\theta)=0\quad T(\eta,\theta)\ fini\quad T(\eta,\theta)\big|_{\eta=l_\eta}=f_\theta(Cos(\theta))\quad T(\eta,\theta)\big|_{\theta=\pi/2}=0$

On utilise l'extension au problème du sphéroïde avec des conditions aux limites impaires, soit :

$$\Delta T(r,\theta)=0\quad T(r,\theta)\ fini$$

$$T(r,\theta)\big|_{r=l_r}=f_\theta(Cos(\theta))\quad pour\ \theta\in[0,\pi/2]$$

$$T(r,\theta)\big|_{r=l_r}=-f_\theta(Cos(\pi-\theta))\quad pour\ \theta\in[\pi/2,\pi]$$

Alors la solution s'écrit sous la forme :

$$C_n=\int_0^1 dz\ f_\theta(z)\ P_{2n+1}(z)\quad T(\eta,\theta)=\sum_{n=0,+\infty} C_n(4n+3)\frac{Q_{2n+1}(i\ Sinh(\eta))}{Q_{2n+1}\left(i\ Sinh(l_\eta)\right)}P_{2n+1}(Cos(\theta))$$

Toutes les solutions précédemment étudiées pour le problème intérieur ont donc un équivalent en problème extérieur en remplaçant la fonction de Legendre de première espèce en celle de deuxième espèce.

Exemple d'électrostatique : problème extérieur de Dirichlet, sphéroïde aplati dans un champ électrique uniforme axe z, porté au potentiel V0

En utilisant le développement en série de polynôme de Legendre en Cos(θ) et de fonction de Legendre de deuxième espèce, avec la forme requise du potentiel à l'infini, la solution doit être de la forme :

$$x=cCosh(\eta)Sin(\vartheta)Cos(\varphi)\quad y=cCosh(\eta)Sin(\vartheta)Sin(\varphi)\quad z=cSinh(\eta)Cos(\vartheta)$$

$$T(\eta,\vartheta)\big|_{\eta=\eta_0}=V_0\quad \lim_{\eta\to+\infty} T(\eta,\vartheta)=-E_0 z=-E_0 cSinh(\eta)Cos(\vartheta)$$

$$T(\eta,\vartheta)=-E_0 cSinh(\eta)Cos(\vartheta)+\sum_{n=0}^{+\infty} A_n Q_n\left(iSinh(\eta)\right)P_n\left(Cos(\vartheta)\right)$$

$$\Rightarrow T(\eta,\vartheta)=E_0 cSinh(\eta_0)Cos(\vartheta)\left(\frac{Q_1(iSinh(\eta))}{Q_1(iSinhh(\eta_0))}-\frac{Sinh(\eta)}{Sinh(\eta_0)}\right)+V_0\frac{Q_0(iSinh(\eta))}{Q_0(iSinh(\eta_0))}$$

Les fonctions de Legendre de deuxième espèce en dehors ou dans l'intervalle [-1,+1], sont reliées aux fonctions usuelles suivantes :

$$Q_0(z)=\frac{1}{2}Log\left(\frac{z+1}{z-1}\right)\quad Q_1(z)=\frac{z}{2}Log\left(\frac{z+1}{z-1}\right)-1\quad Q_2(z)=\frac{1}{4}\left(\left(3z^2-1\right)Log\left(\frac{z+1}{z-1}\right)-6z\right)\quad z\in\mathbf{C}$$

$$P_0(iSinh(\eta))=1\quad P_1(iSinh(\eta))=iSinh(\eta)\quad P_2(iSinh(\eta))=-\frac{1}{2}\left(3Sinh^2(\eta)+1\right)$$

$$P_1^1(iSinh(\eta))=i\sqrt{Sinh^2(\eta)+1}=iCosh(\eta)\quad P_2^1(iSinh(\eta))=-3Cosh(\eta)Sinh(\eta)=-\frac{3}{2}Sinh(2\eta)$$

$$Log\left(\frac{iSinh(\eta)+1}{iSinh(\eta)-1}\right)=-2iArcCotan(Sinh(\eta))\Rightarrow Q_0(iSinh(\eta))=\frac{1}{2}Log\left(\frac{iSinh(\eta)+1}{iSinh(\eta)-1}\right)=-iArcCotan(Sinh(\eta))$$

$$Q_1(iSinh(\eta))=\frac{iSinh(\eta)}{2}Log\left(\frac{iSinh(\eta)+1}{iSinh(\eta)-1}\right)-1=Sinh(\eta)ArcCotan(Sinh(\eta))-1$$

$$Q_2(z)=\frac{1}{4}\left(-\left(3Sinh^2(\eta)+1\right)Log\left(\frac{iSinh(\eta)+1}{iSinh(\eta)-1}\right)-6iSinh(\eta)\right)=\frac{i}{2}\left(\left(3Sinh^2(\eta)+1\right)ArcCotan(Sinh(\eta))-3Sinh(\eta)\right)$$

Un sphéroïde aplati au seul potentiel V0 sur sa surface provoque un potentiel extérieur de la forme :

$$T(\eta,\vartheta)=V_0\frac{Q_0(iSinh(\eta))}{Q_0(iSinh(\eta_0))}=V_0\frac{ArcCotan(Sinh(\eta))}{ArcCotan(Sinh(\eta_0))}.$$

Ce résultat peut également s'appliquer à un problème thermique stationnaire, en supposant un corps de forme sphéroïdales plongé dans un milieu extérieur conduisant la chaleur, afin de déterminer la répartition spatiale de la température hors du corps. Les articles sur le sujet s'intéresse surtout au cas limite où le sphéroïde aplati temps vers un disque de rayon c. Dans ce cas il s'agit de la valeur η_0=0. Comme :

$$\eta_0\to 0\Rightarrow ArcCotan(0)=\frac{\pi}{2}\Rightarrow T(\eta,\vartheta)=V_0\frac{2}{\pi}ArcCotan(Sinh(\eta))$$

$$Sinh(\eta)=\sqrt{\frac{z^2+\rho^2-c^2+\sqrt{\left(z^2+\rho^2-c^2\right)^2+4c^2z^2}}{2c^2}}$$

$$\Rightarrow T(\eta,\vartheta)=T(\rho,z)=V_0\frac{2}{\pi}ArcCotan\left(\sqrt{\frac{z^2+\rho^2-c^2+\sqrt{\left(z^2+\rho^2-c^2\right)^2+4c^2z^2}}{2c^2}}\right).$$

Une autre formule en coordonnées cylindriques est donnée dans l'ouvrage de J.D.Jackson « Classical-Electrodynamics » :

$$T(\rho,z)=V_0\frac{2}{\pi}ArcSin\left(\frac{2c}{\sqrt{(\rho+c)^2+z^2}+\sqrt{(\rho-c)^2+z^2}}\right)\quad\left.\begin{array}{l}d_1{}^2=(\rho+c)^2+z^2\\ d_2{}^2=(\rho-c)^2+z^2\end{array}\right\}\Rightarrow T(\rho,z)=V_0\frac{2}{\pi}ArcSin\left(\frac{2c}{d_1+d_2}\right)$$

En réalité ces deux formules sont identiques, en utilisant les formules de correspondance entre les coordonnées sphéroïdales aplatis et cylindriques :

$$Cosh(\eta)=\frac{d_1+d_2}{2c} \quad Sinh^2(\eta)=\frac{{d_1}^2+{d_2}^2+2d_1d_2-4c^2}{4c^2}=\frac{z^2+\rho^2-c^2+\sqrt{\left(z^2+\rho^2-c^2\right)^2+4c^2z^2}}{2c^2}$$

$$Formule \quad ArcTan(x)=ArcSin\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) \quad ArcTan\left(\frac{1}{x}\right)=ArcCoTan(x) \quad si \quad x>0$$

$$Sinh^2(\eta)=\frac{(d_1+d_2)^2-4c^2}{4c^2} \quad x=\frac{1}{Sinh(\eta)}=\frac{2c}{\sqrt{(d_1+d_2)^2-4c^2}} \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{2c}{d_1+d_2}$$

$$\Rightarrow ArcSin\left(\frac{2c}{d_1+d_2}\right)=ArcTan(x)=ArcTan\left(\frac{1}{Sinh(\eta)}\right)=ArcCoTan(Sinh(\eta)) \Rightarrow c.q.f.d$$

Sur l'axe de symétrie la solution s'écrit :

$$Axe\ z \to \rho=0 \Rightarrow Sinh(\eta)=\sqrt{\frac{z^2}{c^2}}=\frac{z}{c}$$

$$\Rightarrow T(\eta,\vartheta)=T(\rho,z)=V_0\frac{2}{\pi}ArcCotan\left(\frac{z}{c}\right)=V_0\frac{2}{\pi}ArcTan\left(\frac{c}{z}\right)=V_0\frac{2}{\pi}ArcSin\left(\frac{c}{\sqrt{c^2+z^2}}\right)$$

Exemple d'électrostatique : problème extérieur de Dirichlet, sphéroïde aplati dans un champ électrique uniforme le long de l'axe x ou y, porté au potentiel V0

En utilisant le développement en série des fonctions associées de Legendre en Cos(θ) et des fonctions de Legendre de deuxième espèce, avec la forme requise du potentiel à l'infini, la solution avec un champ le long de l'axe x doit être de la forme :

$$x=cCosh(\eta)Sin(\vartheta)Cos(\varphi) \quad y=cCosh(\eta)Sin(\vartheta)Sin(\varphi) \quad z=cSinh(\eta)Cos(\vartheta)$$

$$T(\eta,\vartheta)\big|_{\eta=\eta_0}=V_0 \quad \lim_{\eta\to+\infty}T(\eta,\vartheta)=-E_0x=-E_0cCosh(\eta)Sin(\vartheta)Cos(\varphi)$$

$$T(\eta,\vartheta)=-E_0cCosh(\eta)Sin(\vartheta)Cos(\varphi)+\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{m=n}A_n^mQ_n^m(iSinh(\eta))P_n^m(Cos(\vartheta))Cos(m\varphi)$$

$$T(\eta,\vartheta)\big|_{\eta=\eta_0}=V_0 \Rightarrow -E_0cCosh(\eta_0)Sin(\vartheta)Cos(\varphi)+\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{m=n}A_n^mQ_n^m(iSinh(\eta_0))P_n^m(Cos(\vartheta))Cos(m\varphi)=V_0$$

$$\Rightarrow n=0\ et\ m=0 \quad ou \quad n=1\ et\ m=1$$

$$\Rightarrow \left(-E_0cCosh(\eta_0)-A_1^1Q_1^1(iSinh(\eta_0))\right)Sin(\vartheta)Cos(\varphi)+A_0^0Q_0^0(iSinh(\eta_0))=V_0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A_0^0Q_0^0(iSinh(\eta_0))=V_0 \Rightarrow A_0^0=\dfrac{V_0}{Q_0^0(iSinh(\eta_0))} \\ \left(-E_0cCosh(\eta_0)-A_1^1Q_1^1(iSinh(\eta_0))\right)Sin(\vartheta)Cos(\varphi)=0 \Rightarrow A_1^1=-\dfrac{E_0cCosh(\eta_0)}{Q_1^1(iSinh(\eta_0))} \end{cases}$$

$$T(\eta,\vartheta)=-\left(E_0cCosh(\eta)-\frac{E_0cCosh(\eta_0)Q_1^1(iSinh(\eta))}{Q_1^1(iSinh(\eta_0))}\right)Sin(\vartheta)Cos(\varphi)+V_0\frac{Q_0(iSinh(\eta))}{Q_0(iSinh(\eta_0))}$$

Avec un champ le long de l'axe y, on a immédiatement :

$$T(\eta,\vartheta)=-\left(E_0cCosh(\eta)-\frac{E_0cSinh(\eta_0)Q_1^1(iSinh(\eta))}{Q_1^1(iSin(\eta_0))}\right)Sin(\vartheta)Sin(\varphi)+V_0\frac{Q_0(iSinh(\eta))}{Q_0(iSinh(\eta_0))}.$$

Les fonctions de Legendre de première et deuxième espèce en dehors de l'intervalle [-1,+1], sont reliées aux fonctions usuelles suivantes :

$$P_0(z)=1 \quad P_1(z)=z \quad P_2(z)=\frac{1}{2}\left(3z^2-1\right) \quad \forall z$$

$$P_1^1(z)=\sqrt{z^2-1} \quad P_2^1(z)=3z\sqrt{z^2-1} \quad z\in\mathbf{C}$$

$$Q_0(z)=\frac{1}{2}Log\left(\frac{z+1}{z-1}\right) \quad Q_1(z)=\frac{z}{2}Log\left(\frac{z+1}{z-1}\right)-1 \quad Q_2(z)=\frac{1}{4}\left(\left(3z^2-1\right)Log\left(\frac{z+1}{z-1}\right)-6z\right) \quad z\in\mathbf{C}$$

$$Q_1^1(z)=-\frac{z}{\sqrt{z^2-1}}+\frac{\sqrt{z^2-1}}{2}Log\left(\frac{z+1}{z-1}\right) \quad Q_2^1(z)=-\frac{3z^2-2}{\sqrt{z^2-1}}+\frac{3z\sqrt{z^2-1}}{2}Log\left(\frac{z+1}{z-1}\right) \quad z\in\mathbf{C}.$$

Avec l'argument z=iSinh(η), il vient :

$$P_0(iSinh(\eta))=1 \quad P_1(iSinh(\eta))=iSinh(\eta) \quad P_2(iSinh(\eta))=-\frac{1}{2}\left(3Sinh^2(\eta)+1\right)$$

$$P_1^1(iSinh(\eta))=i\sqrt{Sinh^2(\eta)+1}=iCosh(\eta) \quad P_2^1(iSinh(\eta))=-3Cosh(\eta)Sinh(\eta)=-\frac{3}{2}Sinh(2\eta)$$

$$Log\left(\frac{iSinh(\eta)+1}{iSinh(\eta)-1}\right)=-2iArcCotan(Sinh(\eta))\Rightarrow Q_0(iSinh(\eta))=\frac{1}{2}Log\left(\frac{iSinh(\eta)+1}{iSinh(\eta)-1}\right)=-iArcCotan(Sinh(\eta))$$

$$Q_1(iSinh(\eta))=\frac{iSinh(\eta)}{2}Log\left(\frac{iSinh(\eta)+1}{iSinh(\eta)-1}\right)-1=Sinh(\eta)ArcCotan(Sinh(\eta))-1$$

$$Q_2(z)=\frac{1}{4}\left(-\left(3Sinh^2(\eta)+1\right)Log\left(\frac{iSinh(\eta)+1}{iSinh(\eta)-1}\right)-6iSinh(\eta)\right)=\frac{i}{2}\left(\left(3Sinh^2(\eta)+1\right)ArcCotan(Sinh(\eta))-3Sinh(\eta)\right)$$

$$Q_1^1(z)=-\frac{iSinh(\eta)}{iCosh(\eta)}+\frac{iCosh(\eta)}{2}Log\left(\frac{iSinh(\eta)+1}{iSinh(\eta)-1}\right)=-Tanh(\eta)+Cosh(\eta)ArcCotan(Sinh(\eta))$$

$$Q_2^1(z)=\frac{3Sinh^2(\eta)+2}{iCosh(\eta)}+\frac{3iSinh(\eta)iCosh(\eta)}{2}Log\left(\frac{iSinh(\eta)+1}{iSinh(\eta)-1}\right)=i\left(\frac{3}{2}Sinh(2\eta)ArcCotan(Sinh(\eta))-\frac{3Sinh^2(\eta)+2}{Cosh(\eta)}\right)$$

.

Exemple d'électrostatique : problème extérieur de Dirichlet, potentiel à travers une plaque conductrice parfaite, trouée par un disque circulaire centrée sur l'origine. L'espace de part et d'autre est soumis à deux champs électriques uniformes à longue distance dirigés selon l'axe z et de valeurs inégales E1 et E2. La plaque conductrice est portée au potentiel nulle

En utilisant le développement en série de polynôme de Legendre en Cos(θ) et de fonction de Legendre de deuxième espèce, avec la forme requise du potentiel à l'infini, la solution doit être de la forme :

$$x = cCosh(\eta)Sin(\vartheta)Cos(\varphi) \quad y = cCosh(\eta)Sin(\vartheta)Sin(\varphi) \quad z = cSinh(\eta)Cos(\vartheta)$$

$$Intérieur\ du\ disque\ \rho = c \to z = 0 \Rightarrow \eta = 0 \quad \rho = cSin(\vartheta) \quad \vartheta \in [0,\pi]$$

$$Extérieur\ du\ disque\ \rho = c \to z = 0 \Rightarrow \vartheta = \frac{\pi}{2} \quad \rho = cCosh(\eta) \quad \eta \in [0,+\infty]$$

$$\lim_{\eta \to -\infty} T_{z^-}(\eta,\vartheta) = -E_1 z = -E_1 cSinh(\eta)Cos(\vartheta)$$

$$\lim_{\eta \to +\infty} T_{z^+}(\eta,\vartheta) = -E_2 z = -E_2 cSinh(\eta)Cos(\vartheta)$$

$$T_{z^-}(\eta,\vartheta)\Big|_{\substack{z=0 \\ \rho\in[c,+\infty] \\ \vartheta=\frac{\pi}{2},\eta\in[0,+\infty]}} = T_{z^+}(\eta,\vartheta)\Big|_{\substack{z=0 \\ \rho\in[c,+\infty] \\ \vartheta=\frac{\pi}{2},\eta\in[0,+\infty]}} = 0$$

$$T_{z^-}(\eta,\vartheta) = \{A_{z^-}Q_1(iSinh(\eta)) - E_1 cSinh(\eta)\}Cos(\vartheta)$$

$$T_{z^+}(\eta,\vartheta) = \{A_{z^+}Q_1(iSinh(\eta)) - E_2 cSinh(\eta)\}Cos(\vartheta)$$

$$Continuité\ T_{z^-}(\eta,\vartheta)\Big|_{\substack{z=0 \\ \rho\in[0,c]}} = T_{z^+}(\eta,\vartheta)\Big|_{\substack{z=0 \\ \rho\in[0,c]}} \to A_{z^-}Q_1(-i0) = A_{z^+}Q_1(+i0) \quad Comme\ Q_1(-i0) = -Q_1(+i0)$$

$$\Rightarrow A_{z^-} = -A_{z^+}$$

$$Continuité\ des\ dérivées\ \frac{\partial T_{z^-}(\eta,\vartheta)}{\partial\eta}\Big|_{\substack{z=0 \\ \rho\in[0,c]}} = \frac{\partial T_{z^+}(\eta,\vartheta)}{\partial\eta}\Big|_{\substack{z=0 \\ \rho\in[0,c]}}$$

$$\Rightarrow -A_{z^-}iQ_1'(-i0) - E_1 c = A_{z^+}iQ_1'(+i0) - E_2 c$$

$$\Rightarrow A_{z^+}(iQ_1'(+i0) - iQ_1'(-i0)) = c(E_2 - E_1)$$

$$Comme \quad iQ_1'(+i0) = \frac{\pi}{2} \quad iQ_1'(-i0) = -\frac{\pi}{2} \quad voir\ plus\ bas$$

$$\Rightarrow A_{z^+}\pi = c(E_2 - E_1) \Rightarrow A_{z^+} = \frac{c(E_2 - E_1)}{\pi}$$

$$T_{z^-}(\eta,\vartheta) = \left\{-\frac{c(E_2 - E_1)}{\pi}Q_1(iSinh(\eta)) - E_1 cSinh(\eta)\right\}Cos(\vartheta)$$

$$T_{z^+}(\eta,\vartheta) = \left\{\frac{c(E_2 - E_1)}{\pi}Q_1(iSinh(\eta)) - E_2 cSinh(\eta)\right\}Cos(\vartheta)$$

Les fonctions de Legendre de deuxième espèce en dehors ou dans l'intervalle [-1,+1], sont reliées aux fonctions usuelles suivantes :

$$Q_1(z)=\frac{z}{2}Log\left(\frac{z+1}{z-1}\right)-1 \quad Q_1'(z)=\frac{1}{2}Log\left(\frac{z+1}{z-1}\right)-\frac{z}{z^2-1}$$

$$Q_1(iz)=\frac{iz}{2}Log\left(\frac{iz+1}{iz-1}\right)-1 \quad Comme\ Log\left(\frac{iz+1}{iz-1}\right)=\frac{2}{i}ArcCotan(z)$$

$$\Rightarrow Q_1(iz)=zArcCotan(z)-1=zArcTan\left(\frac{1}{z}\right)-1$$

$$Log\left(\frac{iz+1}{iz-1}\right)=\frac{2}{i}ArcCotan(z)$$

$$Q_1(iSinh(\eta))=Sinh(\eta)ArcCotan(Sinh(\eta))-1$$

$$y=ArcCotan(z)\Rightarrow z=Cotan(y)=\frac{1}{Tan(y)}\Rightarrow Tan(y)=\frac{1}{z}\Rightarrow y=ArcTan\left(\frac{1}{z}\right)$$

$$Q_1(iSinh(\eta))=Sinh(\eta)ArcTan\left(\frac{1}{Sinh(\eta)}\right)-1$$

$$Q_1'(iz)=\frac{1}{2}Log\left(\frac{iz+1}{iz-1}\right)+\frac{iz}{1+z^2}=\frac{1}{i}ArcTan\left(\frac{1}{z}\right)+\frac{iz}{1+z^2}$$

$$iQ_1'(iz)=ArcTan\left(\frac{1}{z}\right)-\frac{z}{1+z^2}\Rightarrow iQ_1'(+i0)=\frac{\pi}{2} \quad iQ_1'(-i0)=-\frac{\pi}{2}$$

.

Exprimé avec les fonctions élémentaires, la solution est la suivante :

$$\begin{cases} T_{z^-}(\eta,\vartheta)=\left\{-\frac{c(E_2-E_1)}{\pi}\left(Sinh(\eta)ArcTan\left(\frac{1}{Sinh(\eta)}\right)-1\right)-E_1cSinh(\eta)\right\}Cos(\vartheta) \\ T_{z^+}(\eta,\vartheta)=\left\{\frac{c(E_2-E_1)}{\pi}\left(Sinh(\eta)ArcTan\left(\frac{1}{Sinh(\eta)}\right)-1\right)-E_2cSinh(\eta)\right\}Cos(\vartheta) \end{cases} ..$$

Prise en compte de conditions aux limites de Robin inhomogènes plus réaliste

Dans ce qui précède, tout comme dans le cas des sphéroïdes allongés, nous avons volontairement simplifié les conditions aux limites de Robin sur une iso-surface η=Cste ou ϑ=Cste. Mais nous savons qu'elles prennent la forme suivante dans un problème axi-symétrique :

$$T(\eta,\theta)=\frac{B_0}{2}+\sum_{n=1,+\infty}B_n\frac{(2n+1)}{2}\frac{P_n(i\,Sinh(\eta))}{P_n(i\,Sinh(l_\eta))}P_n(Cos(\theta))\qquad z=Cos(\theta)$$

$$\alpha\frac{1}{\sqrt{Cosh^2(l_\eta)-Sin^2(\theta)}}\frac{\partial T(l_\eta,\theta)}{\partial\eta}+\beta\,T(l_\eta,\theta)=f(\theta)\Rightarrow$$

$$\beta\frac{B_0}{2}+\sum_{n=1,+\infty}B_n\frac{(2n+1)}{2}\left\{\beta+\alpha\frac{i\,Cosh(l_\eta)P_n'(i\,Sinh(l_\eta))}{\sqrt{Cosh^2(l_\eta)-Sin^2(\theta)}}\frac{}{P_n(i\,Sinh(l_\eta))}\right\}P_n(Cos(\theta))$$

$$iCosh(l_\eta)P_n'(i\,Sinh(l_\eta))=\frac{n(Sinh(l_\eta)P_n(i\,Sinh(l_\eta))+iP_{n-1}(i\,Sinh(l_\eta)))}{Cosh(l_\eta)}$$

$$\Rightarrow B_0=\int_{-1}^{1}dz\;f(z)\quad B_n=\int_{-1}^{1}dz\frac{\sqrt{Sinh^2(l_\eta)+z^2}\,f(z)}{\beta\sqrt{Sinh^2(l_\eta)+z^2}+\dfrac{\alpha\,n}{Cosh(l_\eta)}\left(Sinh(l_\eta)+\dfrac{iP_{n-1}(i\,Sinh(l_\eta))}{P_n(i\,Sinh(l_\eta))}\right)}P_n(z)$$

On retrouve les intégrales classiques du problème de Dirichlet en posant α=0, β =1 :

$$B_0=\int_{-1}^{1}dz\;f(z)\quad B_n=\int_{-1}^{1}dz\;f(z)\,P_n(z)$$

Pour le problème inhomogène de Neumman, α=1, β =0, il vient :

$$B_0\ constante\ quelconque\quad B_n=\frac{Cosh(l_\eta)}{n\left(Sinh(l_\eta)+\dfrac{iP_{n-1}(i\,Sinh(l_\eta))}{P_n(i\,Sinh(l_\eta))}\right)}\int_{-1}^{1}dz\;\sqrt{Sinh^2(l_\eta)+z^2}\,f(z)P_n(z)$$

On peut calculer les dernières intégrales à l'aide du résultat suivant :

$$Posons\quad \eta_0=Sinh(l_\eta)\quad P_{2n}(z)=2^{2n}\sum_{l=0}^{n}\frac{\Gamma\left(n+l+\frac{1}{2}\right)z^{2l}}{\Gamma(2l+1)\Gamma(2n-2l+1)\Gamma\left(l-n+\frac{1}{2}\right)}$$

$$\int_{-1}^{+1}dz\;P_{2n}(z)\sqrt{z^2+\eta_0^{\,2}}=2^{2n}\sum_{l=0}^{n}\frac{\Gamma\left(n+l+\frac{1}{2}\right)I_{2l}(\eta_0)}{\Gamma(2l+1)\Gamma(2n-2l+1)\Gamma\left(l-n+\frac{1}{2}\right)}$$

$$I_{2l}(\eta_0)=\int_{-1}^{+1}dz\;z^{2l}\sqrt{z^2+\eta_0^{\,2}}=\eta_0^{\,2+2l}\int_{-\frac{1}{\eta_0}}^{+\frac{1}{\eta_0}}dx\;x^{2l}\sqrt{1+x^2}=\frac{2\eta_0}{2l+1}\quad {}_2F_1\left(-\frac{1}{2},l+\frac{1}{2};l+\frac{3}{2};-\frac{1}{\eta_0^{\,2}}\right)$$

$$Remarque\ \int_{-\frac{1}{\eta_0}}^{+\frac{1}{\eta_0}}dx\;x^{2l}\sqrt{1+x^2}=\frac{2}{\eta_0^{\,1+2l}(2l+1)}\quad {}_2F_1\left(-\frac{1}{2},l+\frac{1}{2};l+\frac{3}{2};-\frac{1}{\eta_0^{\,2}}\right)$$

Pour le problème aux limites inhomogène de Robin, on est amené à considérer des intégrales du type :

$$Posons \quad \eta_0 = Cosh(l_\eta) \quad c = \frac{D\eta_0}{C} \quad x = \frac{z}{\eta_0}$$

$$\int_{-1}^{+1} dz \frac{\sqrt{\eta_0{}^2 + z^2}}{C + D\sqrt{\eta_0{}^2 + z^2}} P_{2n}(z) = \frac{\eta_0{}^2}{C} \int_{-1}^{+1} d\left(\frac{z}{\eta_0}\right) \frac{\sqrt{1+\left(\frac{z}{\eta_0}\right)^2}}{1 + \frac{D\eta_0}{C}\sqrt{1+\left(\frac{z}{\eta_0}\right)^2}} P_{2n}(z) = \frac{\eta_0{}^2}{C} \int_{-\frac{1}{\eta_0}}^{+\frac{1}{\eta_0}} dx \frac{\sqrt{1+x^2}}{1+c\sqrt{1+x^2}} P_{2n}(\eta_0 x)$$

$$Comme \quad P_{2n}(\eta_0 x) = 2^{2n} \sum_{l=0}^{n} \frac{\Gamma\left(n+l+\frac{1}{2}\right)(\eta_0 x)^{2l}}{\Gamma(2l+1)\Gamma(2n-2l+1)\Gamma\left(l-n+\frac{1}{2}\right)}$$

$$\Rightarrow \int_{-1}^{+1} dz \frac{\sqrt{\eta_0{}^2 + z^2}}{C + D\sqrt{\eta_0{}^2 + z^2}} P_{2n}(z) = \frac{1}{C} 2^{2n} \sum_{l=0}^{n} \frac{\Gamma\left(n+l+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2l+1)\Gamma(2n-2l+1)\Gamma\left(l-n+\frac{1}{2}\right)} \eta_0{}^{2+2l} \int_{-\frac{1}{\eta_0}}^{+\frac{1}{\eta_0}} dx\, x^{2l} \frac{\sqrt{1+x^2}}{1+c\sqrt{1+x^2}}$$

$$Remarque \int_{-\frac{1}{\eta_0}}^{+\frac{1}{\eta_0}} dx\, x^{2l} \frac{\sqrt{1+x^2}}{1+c\sqrt{1+x^2}} = \frac{2}{\eta_0{}^{1+2l}(2l+1)(1-c^2)} \left\{ \begin{array}{l} AppellF_1\left(-\frac{1}{2}, l+\frac{1}{2}; 1; l+\frac{3}{2}; -\frac{1}{\eta_0{}^2}; \frac{c^2}{\eta_0{}^2(1-c^2)}\right) - \\ -\frac{1}{c}\left({}_2F_1\left(1, l+\frac{1}{2}; l+\frac{3}{2}; \frac{c^2}{\eta_0{}^2(1-c^2)}\right) - 1 + c^2\right) \end{array} \right\}$$

$$\lim_{c\to 0} \frac{{}_2F_1\left(1, l+\frac{1}{2}; l+\frac{3}{2}; \frac{c^2}{\eta_0{}^2(1-c^2)}\right) - 1 + c^2}{c^2} = 1 + \frac{1}{\eta_0{}^2} \frac{2l+1}{2l+3}$$

$$\Rightarrow \lim_{c\to 0} \int_{-\frac{1}{\eta_0}}^{+\frac{1}{\eta_0}} dx\, x^{2l} \frac{\sqrt{1+x^2}}{1+c\sqrt{1+x^2}} = \frac{2}{\eta_0{}^{1+2l}(2l+1)} \; {}_2F_1\left(-\frac{1}{2}, l+\frac{1}{2}; 1; l+\frac{3}{2}; -\frac{1}{\eta_0{}^2}\right)$$

$$\Rightarrow \int_{-1}^{+1} dz \frac{\sqrt{\eta_0{}^2 + z^2}}{C + D\sqrt{\eta_0{}^2 + z^2}} P_{2n}(z) = \frac{1}{C} 2^{2n} \sum_{l=0}^{n} \frac{\Gamma\left(n+l+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2l+1)\Gamma(2n-2l+1)\Gamma\left(l-n+\frac{1}{2}\right)} \frac{2\eta_0}{(2l+1)(1-c^2)} I_l(\eta_0, c)$$

$$I_l(\eta_0, c) = AppellF_1\left(-\frac{1}{2}; l+\frac{1}{2}, 1; l+\frac{3}{2}; -\frac{1}{\eta_0{}^2}; \frac{c^2}{\eta_0{}^2(1-c^2)}\right) - \frac{1}{c}\left({}_2F_1\left(1, l+\frac{1}{2}; l+\frac{3}{2}; \frac{c^2}{\eta_0{}^2(1-c^2)}\right) - 1 + c^2\right)$$

$$Ici \quad AppellF_1(a, b_1, b_2; c; x; y) = \sum_{m=0}^{m=+\infty} \sum_{n=0}^{n=+\infty} \frac{\Gamma(a+m+n)}{\Gamma(a)} \frac{\Gamma(b_1+m)}{\Gamma(b_1)} \frac{\Gamma(b_2+n)}{\Gamma(b_2)} \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c+m+n)} \frac{x^m}{m!} \frac{y^n}{n!}$$

.

Exemple gravitationnel: problème intérieur et extérieur Poisson/Dirichlet, champ gravitationnel interne et externe à un sphéroïde aplati, homogénéisation de l'équation de poisson

On applique la solution particulière pour homogénéiser l'équation de Poisson intérieure :

$$T_{part}(x,y,z)=\frac{Q_0}{4}\left(x^2+y^2\right)\quad Q_0=-4\pi\rho\quad T_{part}(x,y,z)=-\pi\rho\left(x^2+y^2\right)$$

$$x=cCosh(\eta)Sin(\vartheta)Cos(\varphi)\quad y=cCosh(\eta)Sin(\vartheta)Sin(\varphi)\quad z=cSinh(\eta)Cos(\vartheta)$$

$$x^2+y^2=c^2Cosh^2(\eta)Sin^2(\vartheta)$$

Les solutions intérieures et extérieures sont développés comme suit :

$$T_{\text{int}}(\eta,\vartheta)=-\pi\rho c^2Cosh^2(\eta)Sin^2(\vartheta)+\sum_{n=0}^{+\infty}A_nP_n(iSinh(\eta))P_n(Cos(\vartheta))$$

$$\Rightarrow T_{\text{int}}(\eta,\vartheta)=-\pi\rho c^2Cosh^2(\eta)\left(1-Cos^2(\vartheta)\right)+\sum_{n=0}^{+\infty}A_nP_n(iSinh(\eta))P_n(Cos(\vartheta))$$

$$Or\quad x^2=\frac{2}{3}P_2(x)+\frac{1}{3}\Rightarrow 1-x^2=\frac{2}{3}(1-P_2(x))=\frac{2}{3}(P_0(x)-P_2(x))$$

$$\Rightarrow T_{\text{int}}(\eta,\vartheta)=-\frac{2}{3}\pi\rho c^2Cosh^2(\eta)(P_0(Cos(\vartheta))-P_2(Cos(\vartheta)))+\sum_{n=0}^{+\infty}A_nP_n(Cosh(\eta))P_n(Cos(\vartheta))$$

$$T_{ext}(\eta,\vartheta)=\sum_{n=0}^{+\infty}B_nQ_n(iSinh(\eta))P_n(Cos(\vartheta))$$

$$T_{\text{int}}(\eta,\vartheta)\big|_{\eta=\eta_0}=T_{ext}(\eta,\vartheta)\big|_{\alpha=\alpha_0}\qquad \frac{\partial}{\partial\vec{n}}T_{\text{int}}(\eta,\vartheta)\bigg|_{\eta=\eta_0}=\frac{\partial}{\partial\vec{n}}T_{ext}(\eta,\vartheta)\bigg|_{\eta=\eta_0}$$

$$\frac{\partial}{\partial\vec{n}}T_{\text{int}}(\eta,\vartheta)=\frac{1}{c\sqrt{Cosh^2(\eta)-Sin^2(\vartheta)}}\frac{\partial}{\partial\eta}T_{\text{int}}(\eta,\vartheta)\quad \frac{\partial}{\partial\vec{n}}T_{ext}(\eta,\vartheta)=\frac{1}{c\sqrt{Cosh^2(\eta)-Sin^2(\vartheta)}}\frac{\partial}{\partial\eta}T_{ext}(\eta,\vartheta)$$

$$\Rightarrow\frac{\partial}{\partial\eta}T_{\text{int}}(\eta,\vartheta)=\frac{\partial}{\partial\eta}T_{ext}(\eta,\vartheta)$$

Le respect des équations de continuité conduit au système linéaire d'équations (avec ici des nombres imaginaires):

$$\begin{cases}-\frac{2}{3}\pi\rho c^2Cosh^2(\eta_0)(P_0(Cos(\vartheta))-P_2(Cos(\vartheta)))+\sum_{n=0}^{+\infty}A_nP_n(iSinh(\eta_0))P_n(Cos(\vartheta))=\sum_{n=0}^{+\infty}B_nQ_n(iSinh(\eta_0))P_n(Cos(\vartheta))\\ -\frac{2}{3}\pi\rho c^2 2Sinh(\eta)Cosh(\eta)(P_0(Cos(\vartheta))-P_2(Cos(\vartheta)))+iCosh(\eta)\sum_{n=0}^{+\infty}A_nP_n'(iSinh)P_n(Cos(\vartheta))=\\ =iCosh(\eta)\sum_{n=0}^{+\infty}B_nQ_n'(iSinh)P_n(Cos(\vartheta))\\ \Rightarrow-\frac{4}{3}\pi\rho c^2Sinh(\eta)(P_0(Cos(\vartheta))-P_2(Cos(\vartheta)))+\sum_{n=0}^{+\infty}iA_nP_n'(iSinh(\eta))P_n(Cos(\vartheta))=\sum_{n=0}^{+\infty}iB_nQ_n'(iSinh(\eta))P_n'(Cos(\vartheta))\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}A_0-\frac{2}{3}\pi\rho c^2Cosh^2(\eta_0)=B_0Q_0(iSinh(\eta_0))\qquad A_2P_2(iSinh(\eta_0))+\frac{2}{3}\pi\rho c^2Cosh^2(\eta_0)=B_2Q_2(iSinh(\eta_0))\\ -\frac{4}{3}\pi\rho c^2Sinh(\eta_0)=iB_0Q_0'(iSinh(\eta_0))\qquad iA_2P_2'(iSinh(\eta_0))+\frac{4}{3}\pi\rho c^2Sinh(\eta_0)=iB_2Q_2'(iSinh(\eta_0))\end{cases}$$

$$\forall n\neq 0,2\quad A_nP_n(iSinh(\eta_0))=B_nQ_n(iSinh(\eta_0))\quad iA_nP_n'(iSinh(\eta_0))=iB_nQ_n'(iSinh(\eta_0))\Rightarrow A_n=B_n=0$$

.

Les développements du système linéaire d'équations donnent les calculs suivants (intervention du Wronskien des fonctions de Legendre P et Q :

$$Wronskien \quad W\left(P_n(x),Q_n(x)\right)\Big|_{x=Cosh(\eta_0)} = \frac{1}{1-x^2} = P_n(iSinh(\eta_0))Q_n'(iSinh(\eta_0)) - P_n'(iSinh(\eta_0))Q_n(iSinh(\eta_0))$$

$$\Rightarrow P_n(iSinh(\eta_0))Q_n'(iSinh(\eta_0)) - P_n'(iSinh(\eta_0))Q_n(iSinh(\eta_0)) = \frac{1}{1+Sinh^2(\eta_0)} = \frac{1}{Cosh^2(\eta_0)}$$

$$P_0(iSinh(\eta_0))Q_0'(iSinh(\eta_0)) = \frac{1}{Cosh^2(\eta_0)} \Rightarrow Q_0'(iSinh(\eta_0)) = \frac{1}{Cosh^2(\eta_0)} \Leftarrow P_0(iSinh(\eta_0)) = 1$$

$$iB_0 = -\frac{4}{3}\pi\rho c^2 \frac{Sinh(\eta_0)}{iQ_0'(iSinh(\eta_0))} \Rightarrow iB_0 = -\frac{4}{3}\pi\rho c^2 Sinh(\eta_0)Cosh^2(\eta_0)$$

$$A_0 = B_0Q_0(iSinh(\eta_0)) + \frac{2}{3}\pi\rho c^2 Cosh^2(\eta_0)$$

$$A_0 = \frac{2}{3}\pi\rho c^2 Cosh^2(\eta_0) + i\frac{4}{3}\pi\rho c^2 Sinh(\eta_0)Cosh^2(\eta_0)Q_0(iSinh(\eta_0)) = \frac{2}{3}\pi\rho c^2 Cosh^2(\eta_0)(1+2iSinh(\eta_0)Q_0(iSinh(\eta_0)))$$

$$A_2P_2(iSinh(\eta_0)) + \frac{2}{3}\pi\rho c^2 Cosh^2(\eta_0) = B_2Q_2(iSinh(\eta_0)) \Rightarrow A_2 = \frac{B_2Q_2(iSinh(\eta_0)) - \frac{2}{3}\pi\rho c^2 Cosh^2(\eta_0)}{P_2(iSinh(\eta_0))}$$

$$iP_2'(iSinh(\eta_0))\left(\frac{B_2Q_2(iSinh(\eta_0)) - \frac{2}{3}\pi\rho c^2 Cosh^2(\eta_0)}{P_2(iSinh(\eta_0))}\right) + \frac{4}{3}\pi\rho c^2 Sinh(\eta_0) = iB_2Q_2'(iSinh(\eta_0))$$

$$\Rightarrow \frac{B_2Q_2(iSinh(\eta_0))}{P_2(iSinh(\eta_0))}iP_2'(iSinh(\eta_0)) - iB_2Q_2'(iSinh(\eta_0)) = \frac{2}{3}\pi\rho c^2 Cosh^2(\eta_0)\frac{iP_2'(iSinh(\eta_0))}{P_2(iSinh(\eta_0))} - \frac{4}{3}\pi\rho c^2 Sinh(\eta_0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{iB_2}{P_2(iSinh(\eta_0))}\left(P_2(iSinh(\eta_0))Q_2'(iSinh(\eta_0)) - Q_2(iSinh(\eta_0))P_2'(iSinh(\eta_0))\right) = \\ = \frac{4}{3}\pi\rho c^2 Sinh(\eta_0) - \frac{2}{3}\pi\rho c^2 Cosh^2(\eta_0)\frac{iP_2'(iSinh(\eta_0))}{P_2(iSinh(\eta_0))} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{iB_2}{P_2(iSinh(\eta_0))Cosh^2(\eta_0)} = \frac{2}{3}\pi\rho c^2\left(2Sinh(\eta_0) - Cosh^2(\eta_0)\frac{iP_2'(iSinh(\eta_0))}{P_2(iSinh(\eta_0))}\right)$$

$$\Rightarrow iB_2 = \frac{2}{3}\pi\rho c^2 Cosh^2(\eta_0)\left(Sinh(\eta_0)2P_2(iSinh(\eta_0)) - Cosh^2(\eta_0)iP_2'(iSinh(\eta_0))\right)$$

$$Or \quad P_2'(x) = 3x \Rightarrow iP_2'(iSinh(\eta_0)) = 3i^2Sinh(\eta_0) \quad 2P_2(x) = 3x^2 - 1 \Rightarrow 2P_2(iSinh(\eta_0)) = -3Sinh^2(\eta_0) - 1$$

$$\Rightarrow iB_2 = \frac{2}{3}\pi\rho c^2 Cosh^2(\eta_0)\left(-Sinh(\eta_0)\left(3Sinh^2(\eta_0)+1\right) + 3Cosh^2(\eta_0)Sinh(\eta_0)\right)$$

$$\Rightarrow iB_2 = \frac{4}{3}\pi\rho c^2 Cosh^2(\eta_0)Sinh(\eta_0) \quad A_2 = \frac{B_2Q_2(iSinh(\eta_0)) - \frac{2}{3}\pi\rho c^2 Cosh^2(\eta_0)}{P_2(iSinh(\eta_0))}$$

$$\Rightarrow A_2 = \frac{-i\frac{4}{3}\pi\rho c^2 Cosh^2(\eta_0)Sinh(\eta_0)Q_2(iSinh(\eta_0)) - \frac{2}{3}\pi\rho c^2 Cosh^2(\eta_0)}{P_2(iSinh(\eta_0))}$$

$$\Rightarrow A_2 = -\frac{2}{3}\pi\rho c^2 Cosh^2(\eta_0)\frac{1+2Sinh(\eta_0)iQ_2(iSinh(\eta_0))}{P_2(iSinh(\eta_0))}$$

.

La solution extérieur s'écrit fort simplement :

$$\left.\begin{array}{l} B_0 = i\dfrac{4}{3}\pi\rho c^2 Sinh(\eta_0)Cosh^2(\eta_0) \\ B_2 = -i\dfrac{4}{3}\pi\rho c^2 Sinh(\eta_0)Cosh^2(\eta_0) \end{array}\right\} \Rightarrow T_{ext}(\eta,\vartheta) = \frac{4}{3}\pi\rho c^2 Sinh(\eta_0)Cosh^2(\eta_0)\begin{pmatrix} iQ_0(iSinh(\eta)) - \\ -iQ_2(iSinh(\eta))P_2(Cos(\vartheta)) \end{pmatrix}$$

On note tout d'abord que la solution est bien réelle en vertu de la valeur purement imaginaire des fonctions de Legendre de deuxième espèce d'argument imaginaire et de degré paire ! De plus on peut exprimer les fonctions de Legendre de deuxième espèce avec des fonctions élémentaires :

Les formules suivantes sont connues

$$ArcCotan(z) = \frac{\pi}{2} - ArcTan(z) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2i}Log\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2i}Log\left(-\frac{iz+1}{iz-1}\right) = -\frac{1}{2i}Log\left(\frac{iz+1}{iz-1}\right) + \frac{\pi}{2} - \frac{Log(i)}{i}$$

$$Log(i) = i\frac{\pi}{2} \Rightarrow ArcCotan(z) = -\frac{1}{2i}Log\left(\frac{iz+1}{iz-1}\right) \quad \textit{De même } ArcCotanh(z) = \frac{1}{2}Log\left(\frac{z+1}{z-1}\right)$$

$$\Rightarrow ArcCotanh(iz) = -iArcCotan(z) = \frac{1}{2}Log\left(\frac{iz+1}{iz-1}\right) \Rightarrow ArcCotan(z) = \frac{i}{2}Log\left(\frac{iz+1}{iz-1}\right)$$

$$Q_0(iz) = \frac{1}{2}Log\left(\frac{iz+1}{iz-1}\right) = -iArcCotan(z) \qquad Q_2(iz) = \frac{i}{2}\left(\left(3z^2+1\right)ArcCotan(z) - 3z\right) \quad z \in \mathbf{C}$$

$$Q_0(iSinh(\eta)) = -iArcCotan(Sinh(\eta)) \Rightarrow iQ_0(iSinh(\eta)) = ArcCotan(Sinh(\eta)) \quad P_2(Cos(\vartheta)) = \frac{3Cos^2(\vartheta)-1}{2}$$

$$Q_2(Cosh(\eta)) = \frac{i}{2}\left(\left(3Sinh^2(\eta)+1\right)ArcCotan(Sinh(\eta)) - 3Sinh(\eta)\right)$$

$$\Rightarrow -iQ_2(Cosh(\eta)) = \frac{1}{2}\left(\left(3Sinh^2(\eta)+1\right)ArcCotan(Sinh(\eta)) - 3Sinh(\eta)\right)$$

Injectons ces formules dans l'expression de la solution, il vient :

$$T_{ext}(\eta,\vartheta) = \frac{4}{3}\pi\rho c^2 Sinh(\eta_0)Cosh^2(\eta_0)\left(iQ_0(iSinh(\eta)) - iQ_2(iSinh(\eta))P_2(Cos(\vartheta))\right)$$

$$\Rightarrow T_{ext}(\eta,\vartheta) = \frac{4}{3}\pi\rho c^2 Sinh(\eta_0)Cosh^2(\eta_0)\begin{pmatrix} ArcCotan(Sinh(\eta)) \\ +\dfrac{1}{2}\left(\left(3Sinh^2(\eta)+1\right)ArcCotan(Sinh(\eta)) - 3Sinh(\eta)\right)\dfrac{\left(3Cos^2(\vartheta)-1\right)}{2} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow T_{ext}(\eta,\vartheta) = \pi\rho c^2 Sinh(\eta_0)Cosh^2(\eta_0)\begin{pmatrix} -Sinh(\eta)\left(3Cos^2(\vartheta)-1\right) + \dfrac{4}{3}ArcCotan(Sinh(\eta)) + \\ +\dfrac{1}{3}ArcCotan(Sinh(\eta))\left(3Sinh^2(\eta)+1\right)\left(3Cos^2(\vartheta)-1\right) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow T_{ext}(\eta,\vartheta) = \pi\rho c^2 Sinh(\eta_0)Cosh^2(\eta_0)\begin{pmatrix} -Sinh(\eta)\left(3Cos^2(\vartheta)-1\right) + \dfrac{4}{3}ArcCotan(Sinh(\eta)) + \\ +\dfrac{1}{3}ArcCotan(Sinh(\eta))\left(3Cosh^2(\eta)-2\right)\left(2-3Sin^2(\vartheta)\right) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow T_{ext}(\eta,\vartheta) = \pi\rho c^2 Sinh(\eta_0)Cosh^2(\eta_0)\begin{pmatrix} -Sinh(\eta)\left(3Cos^2(\vartheta)-1\right) + \\ +ArcCotan(Sinh(\eta))\left(2\left(Cosh^2(\eta)+Sin^2(\vartheta)\right) - 3Cosh^2(\eta)Sin^2(\vartheta)\right) \end{pmatrix}$$

Il reste à exprimer en fonction des axes du sphéroïde aplati respectivement de grand axe a et petit axe b, avec a>b. Alors la surface $\eta=\eta 0$, décrit une ellipse sur n'importe quel plan $\varphi=Cste$, de grand axe a et de petit axe b (le long de l'axe z). On a :

$$z = b = cSinh(\eta_0) \quad \rho = \sqrt{x^2+y^2} = a = cCosh(\eta_0) \Rightarrow c = \sqrt{a^2-b^2} \qquad Cosh(\eta_0) = \frac{a}{c} \quad Sinh(\eta_0) = \frac{b}{c}.$$

D'où la solution :

$$T_{ext}(\eta,\vartheta) = \pi\rho \frac{a^2 b}{\sqrt{a^2-b^2}} \begin{pmatrix} -Sinh(\eta)\left(3Cos^2(\vartheta)-1\right)+ \\ +ArcCotan(Sinh(\eta))\left(2\left(Cosh^2(\eta)+Sin^2(\vartheta)\right)-3Cosh^2(\eta)Sin^2(\vartheta)\right) \end{pmatrix}.$$

Exemple d'électrostatique : problème intérieur de Dirichlet, potentiel à l'intérieur d'un sphéroïde aplati conducteur parfait placé au potentiel 0, avec une charge Q0 placé en son centre

Le potentiel crée par une charge Q0 placé au centre d'un sphéroïde aplati est le suivant :

$$x = cCosh(\eta)Sin(\vartheta)Cos(\varphi) \quad y = cCosh(\eta)Sin(\vartheta)Sin(\varphi) \quad z = cSinh(\eta)Cos(\vartheta) \quad \rho = \sqrt{x^2+y^2} = cCosh(\eta)Sin(\vartheta)$$

$$T_q(\eta,\vartheta) = \frac{Q_0}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{Q_0}{c\sqrt{Cosh^2(\eta)Sin^2(\vartheta)+Sinh^2(\eta)Cos^2(\vartheta)}} \Rightarrow T_q(\eta,\vartheta) = \frac{Q_0}{c\sqrt{Sinh^2(\eta)+Sin^2(\vartheta)}}$$

$$T(\eta,\vartheta) = T_q(\eta,\vartheta) + T_s(\eta,\vartheta) = \frac{Q_0}{c\sqrt{Sinh^2(\eta)+Sin^2(\vartheta)}} + \sum_{n=0}^{+\infty} P_n(iSinh(\eta))P_n(Cos(\vartheta))$$

$$T(\eta,\vartheta)\big|_{\eta=\eta_0} = 0 \Rightarrow T_s(\eta,\vartheta)\big|_{\eta=\eta_0} = -\frac{Q_0}{c\sqrt{Sinh^2(\eta_0)+Sin^2(\vartheta)}} = f_\theta(Cos(\vartheta))$$

La solution générale du problème aux limites de Dirichlet étant la suivante :

$$z = Cos(\theta) \quad B_m = \int_{-1}^{1} dz\ f_\theta(z)\ P_m(z) \qquad T(\eta,\theta) = \sum_{m=0,+\infty} B_m \frac{(2m+1)}{2} \frac{P_m(iSinh(\eta))}{P_m(iSinh(\eta_0))} P_n(Cos(\theta)).$$

Il vient :

$$z = Cos(\theta) \quad B_m = -\frac{Q_0}{c}\int_{-1}^{1} dz\, \frac{P_m(z)}{\sqrt{Sinh^2(\eta_0) + Sin^2(\vartheta)}}$$

$$De\ plus\ on\ sait\ que \quad \int_{-1}^{1} dz\, \frac{P_{2n}(z)}{\sqrt{x^2 - 1 + z^2}} = 2P_{2n}(0)Q_{2n}(x) \Rightarrow x = iSinh(\eta_0)$$

$$\Rightarrow \int_{-1}^{1} dz\, \frac{P_{2n}(z)}{\sqrt{-Sinh^2(\eta_0) - 1 + z^2}} = \int_{-1}^{1} dz\, \frac{P_{2n}(z)}{\sqrt{z^2 - Cosh^2(\eta_0)}} = 2P_{2n}(0)Q_{2n}(iSinh(\eta_0))$$

$$\Rightarrow \int_{-1}^{1} dz\, \frac{P_{2n}(z)}{\sqrt{Sinh^2(\eta_0) + 1 - z^2}} = \int_{-1}^{1} dz\, \frac{P_{2n}(z)}{\sqrt{Cosh^2(\eta_0) - z^2}} = i\int_{-1}^{1} dz\, \frac{P_{2n}(z)}{\sqrt{z^2 - Cosh^2(\eta_0)}}$$

$$\Rightarrow \int_{-1}^{1} dz\, \frac{P_{2n}(z)}{\sqrt{Sinh^2(\eta_0) + 1 - z^2}} = 2iP_{2n}(0)Q_{2n}(iSinh(\eta_0)) \Rightarrow B_{2n} = -\frac{2Q_0}{c} iP_{2n}(0)Q_{2n}(iSinh(\eta_0))$$

$$\Rightarrow T_s(\eta,\theta) = \sum_{n=0,+\infty} B_{2n}\frac{(4n+1)}{2}\frac{P_{2n}(iSinh(\eta))}{P_{2n}(iSinh(\eta_0))} P_{2n}(Cos(\theta))$$

$$\Rightarrow T(\eta,\theta) = \frac{Q_0}{c\sqrt{Sinh^2(\eta) + Sin^2(\vartheta)}} - \frac{Q_0}{c}\sum_{n=0,+\infty}(4n+1)P_{2n}(0)i\frac{Q_{2n}(iSinh(\eta_0))}{P_{2n}(iSinh(\eta_0))}P_{2n}(iSinh(\eta))\, P_{2n}(Cos(\theta))$$

$$\Rightarrow T(\eta,\theta) = \frac{Q_0}{c}\left(\frac{1}{\sqrt{Sinh^2(\eta) + Sin^2(\vartheta)}} - \sum_{n=0,+\infty}(4n+1)P_{2n}(0)i\frac{Q_{2n}(iSinh(\eta_0))}{P_{2n}(iSinh(\eta_0))}P_{2n}(iSinh(\eta))\, P_{2n}(Cos(\theta))\right)$$

$$Comme\ P_{2n}(0) = (-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$$

$$\Rightarrow T(\eta,\theta) = \frac{Q_0}{c}\left(\frac{1}{\sqrt{Sinh^2(\eta) + Sin^2(\vartheta)}} - \sum_{n=0,+\infty}(-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}(4n+1)\, i\frac{Q_{2n}(iSinh(\eta_0))}{P_{2n}(iSinh(\eta_0))}P_{2n}(iSinh(\eta))\, P_{2n}(Cos(\theta))\right)$$

$$De\ plus\ c = \sqrt{a^2 - b^2} \quad a,b \quad grand\ et\ petit\ axe\ du\ sphéroïde$$

Sur l'axe z, le profil est le suivant :

$$Cos(\theta) = \pm 1 \quad Cos^2(\theta) = 1 \quad Sin(\theta) = 0 \rightarrow x = y = 0 \quad \eta \geq 0$$

$$P_{2n}(\pm 1) = 1 \Rightarrow T(\eta,\theta) = \frac{Q_0}{c}\left(\frac{1}{Sinh(\eta)} - \sum_{n=0,+\infty}(4n+1)P_{2n}(0)\, i\frac{Q_{2n}(iSinh(\eta_0))}{P_{2n}(iSinh(\eta_0))}P_{2n}(iSinh(\eta))\right).$$

Inverse de la distance entre deux points du système sphéroïdal aplati dans un même plan azimutal

La formule d'inverse des distances en utilisant les coordonnées η,θ :

$$x = cCosh(\eta)Sin(\vartheta)Cos(\varphi) \quad y = cCosh(\eta)Sin(\vartheta)Sin(\varphi) \quad z = cSinh(\eta)Cos(\vartheta)$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = cCosh(\eta)Sin(\vartheta) \Rightarrow$$

$$Deux\ points \begin{cases} Cos(\vartheta) & iSinh(\eta) \\ Cos(\vartheta') & iSinh(\eta') \end{cases} \quad dans\ un\ même\ plan\ azimutal$$

$$Distance\ entre\ les\ deux\ points\ (\eta,\vartheta) \quad (\eta',\vartheta')$$

$$\frac{c}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{Sinh^2(\eta) + Sinh^2(\eta') + Sin^2(\vartheta) + Sin^2(\vartheta') - 2Sinh(\eta)Sinh(\eta')Cos(\vartheta)Cos(\vartheta') - 2Cosh(\eta)Cosh(\eta')Sin(\vartheta)Sin(\vartheta')}}$$

$$= \begin{cases} i\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)Q_n(iSinh(\eta))P_n(iSinh(\eta'))P_n(Cos(\vartheta))P_n(Cos(\vartheta')) & \eta' < \eta \\ i\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)P_n(iSinh(\eta))Q_n(iSinh(\eta'))P_n(Cos(\vartheta))P_n(Cos(\vartheta')) & \eta < \eta' \end{cases}$$

Si le point (η',θ') est sur l'axe z en valeur négative, il vient :

$$\vartheta' = \pi \Rightarrow Cos(\vartheta') = -1 \quad Sin(\vartheta') = 0 \quad P_n(-1) = (-1)^n$$

$$\frac{1}{\sqrt{Sinh^2(\eta) + Sinh^2(\eta') + Sin^2(\vartheta) + 2Sinh(\eta)Sinh(\eta')Cos(\vartheta)}} =$$

$$= \begin{cases} i\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+1)Q_n(iSinh(\eta))P_n(iSinh(\eta'))P_n(Cos(\vartheta)) & \eta' < \eta \\ i\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+1)P_n(iSinh(\eta))Q_n(iSinh(\eta'))P_n(Cos(\vartheta)) & \eta < \eta' \end{cases}$$

On introduit également les variables suivantes μ, ν :

$$x = cCosh(\eta)Sin(\vartheta)Cos(\varphi) \quad y = cCosh(\eta)Sin(\vartheta)Sin(\varphi) \quad z = cSinh(\eta)Cos(\vartheta)$$

$$\mu = Cos(\vartheta) \quad \nu = Sinh(\eta) \Rightarrow z = c\nu\mu \quad x = c\sqrt{(1-\mu^2)(1+\nu^2)}Cos(\varphi) \quad y = c\sqrt{(1-\mu^2)(1+\nu^2)}Sin(\varphi)$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = cCosh(\eta)Sin(\vartheta) \Rightarrow \rho = c\sqrt{(1-\mu^2)(1+\nu^2)}$$

Exemple d'électrostatique : problème extérieur de Dirichlet, potentiel à l'extérieur d'un sphéroïde aplati conducteur parfait placé au potentiel 0, avec une charge Q0 placé sur l'axe z

Pour la résolution de ce problème, on utilise la formule précédente d'inverse des distances pour un point (η',θ'=π) sur l'axe z :

$$\frac{1}{\sqrt{Sinh^2(\eta)+Sinh^2(\eta')+Sin^2(\vartheta)+2Sinh(\eta)Sinh(\eta')Cos(\vartheta)}}=$$

$$=\begin{cases} i\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+1)Q_n(iSinh(\eta))P_n(iSinh(\eta'))P_n(Cos(\vartheta)) & \eta'<\eta \\ i\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+1)P_n(iSinh(\eta))Q_n(iSinh(\eta'))P_n(Cos(\vartheta)) & \eta<\eta' \end{cases}.$$

Le potentiel crée par une charge Q0 placé sur l'axe z à une distance donnée d'un sphéroïde aplati est le suivant :

$$x=cCosh(\eta)Sin(\vartheta)Cos(\varphi) \quad y=cCosh(\eta)Sin(\vartheta)Sin(\varphi) \quad z=cSinh(\eta)Cos(\vartheta) \quad \rho=\sqrt{x^2+y^2}=cCosh(\eta)Sin(\vartheta)$$

$$Charge\ placée\ à \quad Cos(\vartheta_q)=-1 \quad \Rightarrow z_q=-cSinh(\eta_q) \quad \rho_q=0$$

$$T_q(\eta,\vartheta)=\frac{Q_0}{\sqrt{x^2+y^2+(z-z_q)^2}}=$$

$$=\frac{Q_0}{c\sqrt{Cosh^2(\eta)Sin^2(\vartheta)+Sinh^2(\eta)Cos^2(\vartheta)+Sinh^2(\eta_q)+2Sinh(\eta)Cos(\vartheta)Sinh(\eta_q)}}$$

$$\Rightarrow T_q(\eta,\vartheta)=\frac{Q_0}{c\sqrt{Sinh^2(\eta)+Sin^2(\vartheta)+Sinh^2(\eta_q)+2Sinh(\eta)Sinh(\eta_q)Cos(\vartheta)}}$$

$$=\frac{Q_0}{c}\begin{cases} i\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+1)Q_n(iSinh(\eta))P_n(iSinh(\eta_q))P_n(Cos(\vartheta)) & \eta_q<\eta \\ i\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+1)P_n(iSinh(\eta))Q_n(iSinh(\eta_q))P_n(Cos(\vartheta)) & \eta<\eta_q \end{cases}$$

$$T(\eta,\vartheta)=T_q(\eta,\vartheta)+T_s(\eta,\vartheta)$$

$$T(\eta,\vartheta)\big|_{\eta=\eta_0}=0 \Rightarrow T_s(\eta,\vartheta)\big|_{\eta=\eta_0}=-T_q(\eta,\vartheta)\big|_{\eta=\eta_0}=f_\theta(Cos(\vartheta))$$

$$\Rightarrow f_\theta(Cos(\vartheta))=-\frac{Q_0}{c}i\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+1)P_n(iSinh(\eta_0))Q_n(iSinh(\eta_q))P_n(Cos(\vartheta)) \qquad puique \quad \eta_0<\eta_q$$

La solution Ts s'écrit alors suivant la distance au point de l'axe z :

$$z=Cos(\theta) \quad B_m=\int_{-1}^{1}dz\ f_\theta(z)\ P_m(z) \quad T_s(r,\theta)=\sum_{m=0,+\infty}B_m\frac{(2m+1)}{2}\frac{Q_m(Cosh(\eta))}{Q_m(Cosh(\eta_0))}P_m(Cos(\theta))$$

$$f_\theta(z)=-\frac{Q_0}{c}i\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+1)P_n(iSinh(\eta_0))Q_n(iSinh(\eta_q))P_n(Cos(\vartheta))$$

$$B_m=\int_{-1}^{1}dz\ f_\theta(z)\ P_m(z)=-\frac{Q_0}{c}i(-1)^m(2m+1)\frac{2}{(2m+1)}P_m(iSinh(\eta_0))Q_m(iSinh(\eta_q))$$

$$B_m=\int_{-1}^{1}dz\ f_\theta(z)\ P_m(z)=-\frac{2Q_0}{c}(-1)^m iP_m(iSinh(\eta_0))Q_m(iSinh(\eta_q))$$

$$T_s(\eta,\theta)=-\frac{Q_0}{c}\sum_{m=0,+\infty}(-1)^m(2m+1)i\frac{P_m(iSinh(\eta_0))Q_m(iSinh(\eta_q))}{Q_m(iSinh(\eta_0))}Q_m(iSinh(\eta))\,P_m(Cos(\theta)) \qquad \eta_0<\eta$$

.Et

Par conséquent le potentiel total est le suivant :

$$T(\eta,\theta)=\frac{Q_0}{c}\begin{cases}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m(2m+1)P_m(Cos(\theta))\,iQ_m(iSinh(\eta))\left(P_m(iSinh(\eta_q))-\frac{P_m(iSinh(\eta_0))}{Q_m(iSinh(\eta_0))}Q_m(iSinh(\eta_q))\right)\\ pour\quad \eta_0<\eta_q<\eta\\ \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m(2m+1)P_m(Cos(\theta))\,iQ_m(iSinh(\eta_q))\left(P_m(iSinh(\eta))-\frac{P_m(iSinh(\eta_0))}{Q_m(iSinh(\eta_0))}Q_m(iSinh(\eta))\right)\\ pour\quad \eta_0<\eta<\eta_q\end{cases}$$

ou bien

$$T(\eta,\theta)=\frac{Q_0}{c}\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{\sqrt{Sinh^2(\eta)+Sin^2(\vartheta)+Sinh^2(\eta_q)+2Sinh(\eta)Sinh(\eta_q)Cos(\vartheta)}}\\ -\sum_{m=0,+\infty}(-1)^m(2m+1)i\frac{P_m(iSinh(\eta_0))Q_m(iSinh(\eta_q))}{Q_m(iSinh(\eta_0))}Q_m(iSinh(\eta))\,P_m(Cos(\theta))\end{array}\right\}$$

Etude du cas limite constitué par le disque de rayon c=a, b=0

Pour le cas limite constitué par un disque de rayon c=a, b=0, il vient en coordonnées sphéroïdales aplaties :

$$x=cCosh(\eta)Sin(\vartheta)Cos(\varphi)\quad y=cCosh(\eta)Sin(\vartheta)Sin(\varphi)\quad z=cSinh(\eta)Cos(\vartheta)$$

$$c=\sqrt{a^2-b^2}\quad b=0\Rightarrow c=a$$

$$Intérieur\ du\ disque\ \rho=c\rightarrow z=0\Rightarrow\eta=0\quad \rho=cSin(\vartheta)\quad \vartheta\in[0,\pi]$$

$$Extérieur\ du\ disque\ \rho=c\rightarrow z=0\Rightarrow\vartheta=\frac{\pi}{2}\quad \rho=cCosh(\eta)\quad \eta\in[0,+\infty]$$

$$Axe\ z\quad \vartheta=0,\pi\Rightarrow x=y=0\quad z=\pm cSinh(\eta)$$

On porte donc dans les expressions précédentes la valeur η0=0 :

$$T(\eta,\theta)=\frac{Q_0}{c}\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{\sqrt{Sinh^2(\eta)+Sin^2(\vartheta)+Sinh^2(\eta_q)+2Sinh(\eta)Sinh(\eta_q)Cos(\vartheta)}}\\ -\sum_{m=0,+\infty}(-1)^m(2m+1)i\frac{P_m(i0)}{Q_m(i0)}Q_m(iSinh(\eta_q))Q_m(iSinh(\eta))\,P_m(Cos(\theta))\end{array}\right\}$$

$$P_{2n+1}(i0)=0\Rightarrow T(\eta,\theta)=\frac{Q_0}{c}\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{\sqrt{Sinh^2(\eta)+Sin^2(\vartheta)+Sinh^2(\eta_q)+2Sinh(\eta)Sinh(\eta_q)Cos(\vartheta)}}\\ -\sum_{n=0,+\infty}(4n+1)i\frac{P_{2n}(i0)}{Q_{2n}(i0)}Q_{2n}(iSinh(\eta_q))Q_{2n}(iSinh(\eta))\,P_{2n}(Cos(\theta))\end{array}\right\}$$

$$De\ plus\ \forall\nu\quad \frac{P_\nu(i0)}{Q_\nu(i0)}=\frac{2i}{\pi}\Rightarrow\frac{P_{2n}(i0)}{Q_{2n}(i0)}=\frac{2i}{\pi}$$

$$\Rightarrow T(\eta,\theta)=\frac{Q_0}{c}\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{\sqrt{Sinh^2(\eta)+Sin^2(\vartheta)+Sinh^2(\eta_q)+2Sinh(\eta)Sinh(\eta_q)Cos(\vartheta)}}\\ +\frac{2}{\pi}\sum_{n=0,+\infty}(4n+1)Q_{2n}(iSinh(\eta_q))Q_{2n}(iSinh(\eta))\,P_{2n}(Cos(\theta))\end{array}\right\}$$

$$avec\quad z_q=c\,Sinh(\eta_q)\Rightarrow Sinh(\eta_q)=\frac{z_q}{c}=\frac{z_q}{a}$$

Exemple d'électrostatique : problème intérieur de Dirichlet, potentiel à l'intérieur d'un sphéroïde aplati conducteur parfait placé au potentiel 0, avec une charge Q_0 placée sur l'axe z

Pour la résolution de ce problème, on va utiliser la formule précédente d'inverse des distances si le point (η',θ'=π) est situé sur l'axe z, il vient :

$$\frac{1}{\sqrt{Sinh^2(\eta)+Sinh^2(\eta')+Sin^2(\vartheta)+2Sinh(\eta)Sinh(\eta')Cos(\vartheta)}}=$$

$$=\begin{cases} i\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+1)Q_n(iSinh(\eta))P_n(iSinh(\eta'))P_n(Cos(\vartheta)) & \eta'<\eta \\ i\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+1)P_n(iSinh(\eta))Q_n(iSinh(\eta'))P_n(Cos(\vartheta)) & \eta<\eta' \end{cases}.$$

Le potentiel crée par une charge Q0 placé sur l'axe z à une distance donnée à l'intérieur d'un sphéroïde aplati est le suivant :

$$T_q(\eta,\vartheta)=\frac{Q_0}{c\sqrt{Sinh^2(\eta)+Sinh^2(\eta_q)+Sin^2(\vartheta)+2Sinh(\eta)Sinh(\eta_q)Cos(\vartheta)}}$$

$$=\frac{Q_0}{c}\begin{cases} i\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+1)Q_n(iSinh(\eta))P_n(iSinh(\eta_q))P_n(Cos(\vartheta)) & \eta_q<\eta \\ i\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+1)P_n(iSinh(\eta))Q_n(iSinh(\eta_q))P_n(Cos(\vartheta)) & \eta<\eta_q \end{cases}.$$

$$T(\eta,\vartheta)=T_q(\eta,\vartheta)+T_s(\eta,\vartheta)\quad T(\eta,\vartheta)\big|_{\eta=\eta_0}=0\Rightarrow T_s(\eta,\vartheta)\big|_{\eta=\eta_0}=-T_q(\eta,\vartheta)\big|_{\eta=\eta_0}=f_\theta(Cos(\vartheta))$$

$$\Rightarrow f_\theta(Cos(\vartheta))=-\frac{Q_0}{c}i\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+1)Q_n(iSinh(\eta_0))P_n(iSinh(\eta_q))P_n(Cos(\vartheta))\qquad \eta_q<\eta_0$$

La solution Ts s'écrit alors suivant la distance au point de l'axe z :

$$z=Cos(\theta)\quad B_m=\int_{-1}^{1}dz\ f_\theta(z)\ P_m(z)\quad T_s(r,\theta)=\sum_{m=0,+\infty}B_m\frac{(2m+1)}{2}\frac{P_m(iSinh(\eta))}{P_m(iSinh(\eta_0))}P_m(Cos(\theta))$$

$$f_\theta(z)=-\frac{Q_0}{c}i\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+1)Q_n(iSinh(\eta_0))P_n(iSinh(\eta_q))P_n(Cos(\vartheta))$$

$$B_m=\int_{-1}^{1}dz\ f_\theta(z)\ P_m(z)=-\frac{Q_0}{c}(-1)^m(2m+1)\frac{2}{(2m+1)}iQ_m(iSinh(\eta_0))P_m(iSinh(\eta_q))$$

$$B_m=\int_{-1}^{1}dz\ f_\theta(z)\ P_m(z)=-\frac{2Q_0}{c}(-1)^m iQ_m(iSinh(\eta_0))P_m(iSinh(\eta_q))$$

$$T_s(\eta,\theta)=-\frac{Q_0}{c}\sum_{m=0,+\infty}(-1)^m(2m+1)iP_m(iSinh(\eta_q))\frac{Q_m(iSinh(\eta_0))}{P_m(iSinh(\eta_0))}P_m(iSinh(\eta))\,P_m(Cos(\theta))$$

Et par conséquent le potentiel total est le suivant :

$$T(\eta,\theta)=\frac{Q_0}{c}\begin{cases} \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m(2m+1)P_m(Cos(\vartheta))\,iP_m(iSinh(\eta_q))\left(Q_m(iSinh(\eta))-\frac{Q_m(iSinh(\eta_0))}{P_m(iSinh(\eta_0))}P_m(iSinh(\eta))\right) & \eta_q<\eta<\eta_0 \\ \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m(2m+1)P_m(Cos(\vartheta))\,iP_m(iSinh(\eta))\left(Q_m(iSinh(\eta_q))-P_m(iSinh(\eta_q))\frac{Q_m(iSinh(\eta_0))}{P_m(iSinh(\eta_0))}\right) & \eta<\eta_q<\eta_0 \end{cases}$$

On peut également écrire :

$$T(\eta,\theta)=\frac{Q_0}{c}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{1}{\sqrt{Sinh^2(\eta)+Sinh^2(\eta_q)+Sin^2(\vartheta)+2Sinh(\eta)Sinh(\eta_q)Cos(\vartheta)}}-\\ -\sum\limits_{m=0,+\infty}(-1)^m(2m+1)iP_m(iSinh(\eta_q))\dfrac{Q_m(iSinh(\eta_0))}{P_m(iSinh(\eta_0))}P_m(iSinh(\eta))\,P_m(Cos(\theta))\end{array}\right\}.$$

Lorsque la charge est placée au centre, on retrouve la solution précédente :

Charge au centre $\eta_q=0$

$$T(r,\theta)=\frac{Q_0}{c}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m(2m+1)P_m(Cos(\vartheta))\,iP_m(i0)\left(Q_m(iSinh(\eta))-\frac{Q_m(iSinh(\eta_0))}{P_m(iSinh(\eta_0))}P_m(iSinh(\eta))\right)$$

ou bien encore

$$T(\eta,\theta)=\frac{Q_0}{c}\left\{\frac{1}{\sqrt{Sinh^2(\eta)+Sin^2(\vartheta)}}-\sum_{m=0,+\infty}(-1)^m(2m+1)iP_m(i0)\frac{Q_m(iSinh(\eta_0))}{P_m(iSinh(\eta_0))}P_m(iSinh(\eta))\,P_m(Cos(\theta))\right\}$$

$P_m(i0)=0 \quad si \quad m=2n+1$

$$\Rightarrow T(\eta,\theta)=\frac{Q_0}{c}\left\{\frac{1}{\sqrt{Sinh^2(\eta)+Sin^2(\vartheta)}}-\sum_{n=0,+\infty}(4n+1)P_{2n}(i0)i\frac{Q_{2n}(iSinh(\eta_0))}{P_{2n}(iSinh(\eta_0))}P_{2n}(iSinh(\eta))\,P_{2n}(Cos(\theta))\right\}$$

$$\Rightarrow T(\eta,\theta)=\frac{Q_0}{c}\left\{\frac{1}{\sqrt{Sinh^2(\eta)+Sin^2(\vartheta)}}-\sum_{n=0,+\infty}(4n+1)P_{2n}(0)i\frac{Q_{2n}(iSinh(\eta_0))}{P_{2n}(iSinh(\eta_0))}P_{2n}(iSinh(\eta))\,P_{2n}(Cos(\theta))\right\}$$

Exemple équation de la chaleur régime stationnaire en présence d'une source interne de chaleur également répartie dans un sphéroïde aplati dont la surface est fixé à la température 0 : problème intérieur de l'équation de Poisson

On applique la solution particulière pour homogénéiser l'équation de Poisson intérieure :

$$\Delta T(x,y,z) = -Q_0 \rightarrow T_{part}(x,y,z) = -\frac{Q_0}{4}\left(x^2+y^2\right) \quad x^2+y^2 = c^2 Cosh^2(\eta) Sin^2(\vartheta)$$

$$x = cCosh(\eta)Sin(\vartheta)Cos(\varphi) \quad y = cCosh(\eta)Sin(\vartheta)Sin(\varphi) \quad z = cSinh(\eta)Cos(\vartheta)$$

$$Petit\ axe \quad b = cSinh(\eta_0) \quad Grand\ axe \quad a = cCosh(\eta_0)$$

La solution intérieure est développée comme suit :

$$T(\eta,\vartheta) = -\frac{Q_0}{4}c^2 Cosh^2(\eta)Sin^2(\vartheta) + \sum_{n=0}^{+\infty} A_n P_n(iSinh(\eta))P_n(Cos(\vartheta))$$

$$\Rightarrow T(\eta,\vartheta) = -\frac{Q_0}{4}c^2 Cosh^2(\eta)\left(1-Cos^2(\vartheta)\right) + \sum_{n=0}^{+\infty} A_n P_n(iSinh(\eta))P_n(Cos(\vartheta))$$

$$Or \quad x^2 = \frac{2}{3}P_2(x) + \frac{1}{3} \Rightarrow 1-x^2 = \frac{2}{3}\left(1-P_2(x)\right) = \frac{2}{3}\left(P_0(x)-P_2(x)\right)$$

$$\Rightarrow T(\eta,\vartheta) = -\frac{Q_0}{6}c^2 Cosh^2(\eta)\left(P_0(Cos(\vartheta)) - P_2(Cos(\vartheta))\right) + \sum_{n=0}^{+\infty} A_n P_n(iSinh(\eta))P_n(Cos(\vartheta))$$

$$T(\eta,\vartheta)\big|_{\eta=\eta_0} = 0 \Rightarrow -\frac{Q_0}{6}c^2 Cosh^2(\eta_0)\left(P_0(Cos(\vartheta)) - P_2(Cos(\vartheta))\right) + \sum_{n=0}^{+\infty} A_n P_n(iSinh(\eta_0))P_n(Cos(\vartheta))$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A_0 = \dfrac{Q_0}{6k}c^2 Cosh^2(\eta_0) \\ A_2 = -\dfrac{Q_0}{6k}c^2 Cosh^2(\eta_0)\dfrac{1}{P_2(iSinh(\eta_0))} \quad A_n = 0 \end{cases}$$

$$T(\eta,\vartheta) = -\frac{Q_0}{6k}c^2\left(P_0(Cos(\vartheta))\left(Cosh^2(\eta)-Cosh^2(\eta_0)\right) - \left(Cosh^2(\eta)-Cosh^2(\eta_0)\frac{P_2(iSinh(\eta))}{P_2(iSinh(\eta_0))}\right)P_2(Cos(\vartheta))\right)$$

$$T(\eta,\vartheta) = -\frac{Q_0}{6k}c^2\left(Cosh^2(\eta)-Cosh^2(\eta_0) - \left(Cosh^2(\eta)-Cosh^2(\eta_0)\frac{P_2(iSinh(\eta))}{P_2(iSinh(\eta_0))}\right)P_2(Cos(\vartheta))\right)$$

Exprimé à l'aide des fonctions élémentaire et des paramètres grand axe a et petit b du sphéroïde, il vient :

$$P_2(Cos(\vartheta)) = \frac{1}{2}\left(3Cos^2(\vartheta) - 1\right) \quad P_0(Cos(\vartheta)) = 1 \quad a = cCosh(\eta_0) \quad b = cSinh(\eta_0)$$

$$P_2(iSinh(\eta)) = -\frac{1}{2}\left(3Sinh^2(\eta) + 1\right) \quad P_2(iSinh(\eta_0)) = -\frac{3b^2 + c^2}{2c^2} \quad Sinh^2(\eta_0) = \frac{b^2}{c^2} \quad c^2 = a^2 - b^2$$

$$T(\eta,\vartheta) = -\frac{Q_0}{6k}c^2\left(Cosh^2(\eta) - \frac{a^2}{c^2} - \frac{1}{2}\left(3Cos^2(\vartheta) - 1\right)\left(Cosh^2(\eta) - \frac{a^2}{3b^2 + c^2}\left(3Sinh^2(\eta) + 1\right)\right)\right)$$

$$T(\eta,\vartheta) = -\frac{Q_0}{12k}c^2\left(2Cosh^2(\eta) - \left(3Cos^2(\vartheta) - 1\right)Cosh^2(\eta) - \frac{2a^2}{c^2} + \frac{a^2}{3b^2 + c^2}\left(3Sinh^2(\eta) + 1\right)\left(3Cos^2(\vartheta) - 1\right)\right)$$

$$T(\eta,\vartheta) = -\frac{Q_0}{12k}c^2\left(3Cosh^2(\eta)Sin^2(\vartheta) - \frac{2a^2}{c^2} + \frac{a^2}{3b^2 + c^2}\left(3Sinh^2(\eta) + 1\right)\left(3Cos^2(\vartheta) - 1\right)\right)$$

$$\Rightarrow T(\eta,\vartheta) = -\frac{Q_0}{12k}\left(a^2 - b^2\right)\left(3Cosh^2(\eta)Sin^2(\vartheta) - \frac{2a^2}{a^2 - b^2} + \frac{a^2}{2b^2 + a^2}\left(3Sinh^2(\eta) + 1\right)\left(3Cos^2(\vartheta) - 1\right)\right)$$

.

Exemples divers sur des cônes sphéroïdaux ou sections coniques sphéroïdales aplatis plein ou creux (domaines bordés par des hyperboloïdes à une nappe, tronqués), soumis à des conditions aux limites homogènes angulaires et inhomogènes radiales

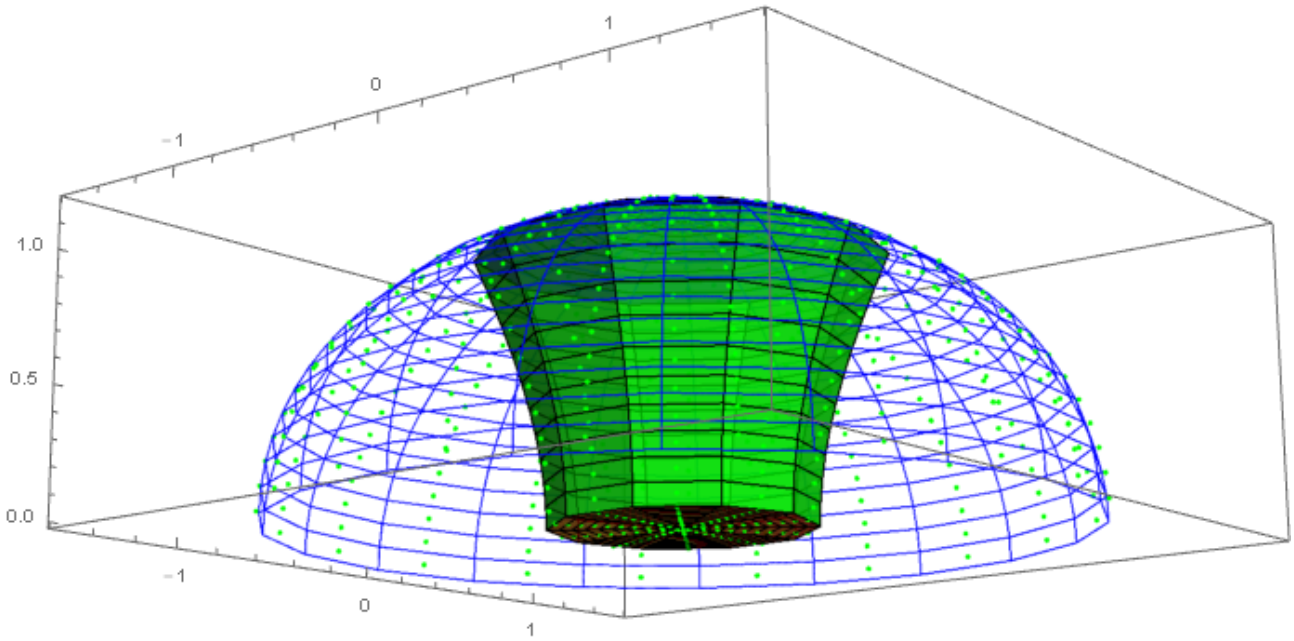
Exemple : *"Cône" sphéroïdal aplati plein d'angle θ_0, en coordonnées sphéroïdales (η,θ) soumis à des conditions aux limites de Dirichlet inhomogènes en $\eta=l_\eta$ et Dirichlet homogènes en $\theta=\theta_0$*

Soit le problème :

$$\Delta T(r,\theta)=0 \quad T(r,\theta)\ fini$$

$$T(r,\theta)\big|_{\eta=l_\eta}=f_\theta(Cos(\theta))$$

$$T(r,\theta)\big|_{\theta=\theta_0}=0$$



A noter que le domaine n'est pas un cône en réalité, mais l'intersection entre la nappe complète de l'hyperboloïde *$\theta=\theta_0$, le sphéroïde aplati $\eta=l_\eta$ et le disque de rayon a dans le plan z=0, comme suit:*

$$l_\eta=Cste \Rightarrow Sphéroide\ aplati\ \frac{x^2}{a^2Cosh^2(l_\eta)}+\frac{y^2}{a^2Cosh^2(l_\eta)}+\frac{z^2}{a^2Sinh^2(l_\eta)}=1$$

$$\theta_0=Cste \Rightarrow Hyperboloïde\ à\ une\ nappe\ \frac{x^2}{a^2Sin^2(\theta_0)}+\frac{y^2}{a^2Sin^2(\theta_0)}-\frac{z^2}{a^2Cos^2(\theta_0)}=1$$

$$Disque\ de\ rayon\ a\ dans\ le\ plan\ z=0$$

La solution doit comporter les mêmes contraintes que pour les solutions sur le sphéroïde aplati, à savoir :

$$T(\eta,\theta)\ fini$$

$$T(\eta,\theta)\ fonction\ paire\ en\ \theta\ soit\ \ T(\eta,-\theta)=T(\eta,\theta)$$

$$T(\eta,\theta)\quad ne\ comporte\ aucune\ singularité\ en\ \theta=0, continue\ et\ dérivable$$

Pour respecter la condition aux limites $T(\eta,\theta)\big|_{\theta=\theta_0}=0$*, on est amené à rechercher une extension des polynômes de Legendre de degré entier à des fonctions de Legendre de degré non entier* λ_n
$P_n(Cos(\theta)) \to P_{\lambda_n}(Cos(\theta)) \quad \lambda_n \quad tq \quad P_{\lambda_n}(Cos(\theta_0))=0$.

Dans ce cas la partie radiale n'est en général ni purement réelle, ni purement imaginaire, comme avec les indices entiers, et dans ce cas, on peut par convention prendre la partie réelle de la fonction, étant entendu que la combinaison linéaire :

Symétrie du mirroir

$$P_{\lambda_n}(\bar{z})=\overline{P_{\lambda_n}(z)} \Rightarrow P_{\lambda_n}^{réel}(i\ Sinh(\eta))=\frac{P_{\lambda_n}(i\ Sinh(\eta))+\overline{P_{\lambda_n}(i\ Sinh(\eta))}}{2}=\frac{P_{\lambda_n}(i\ Sinh(\eta))+P_{\lambda_n}(-i\ Sinh(\eta))}{2}$$

demeure bien solution de l'équation séparée radiale comme on peut le voir ici :

$$\frac{d^2R(\eta)}{d\eta^2}+\frac{Sinh(\eta)}{Cosh(\eta)}\frac{dR(\eta)}{d\eta}-n(n+1)R(\eta)=0$$

$$\eta \to -\eta$$

$$\Rightarrow \frac{d^2R(-\eta)}{d\eta^2}-\frac{Sinh(-\eta)}{Cosh(-\eta)}\frac{dR(-\eta)}{d\eta}-n(n+1)R(-\eta)=\frac{d^2R(-\eta)}{d\eta^2}+\frac{Sinh(\eta)}{Cosh(\eta)}\frac{dR(-\eta)}{d\eta}-n(n+1)R(-\eta)=0$$

$$R(\eta)\ solution \Rightarrow R(-\eta)\ solution$$

<u>*Exemple*</u> *si l'on prend la valeur* $\theta_0=\pi/2$*, alors on retrouve les valeurs propres* λ_n *=2n+1,*

si l'on prend l'angle $\theta_0=\pi/3$*, alors les 20 premières valeurs propres* λ_n *=* `1.77729,4.76278,7.75826,10.7561,13.7548,16.754,19.7534,22.753,25.7526,28.7524,31.7521,34.752,37.7518,40.7517,43.7516,46.7515,49.7514,52.7513,55.7512,58.7512`

si l'on prend l'angle $\theta_0=\pi/7$*, alors les 20 premières valeurs propres* λ_n *=* `4.85051, 11.7962, 18.7798, 25.7719, 32.7673, 39.7643, 46.7622, 53.7606, 60.7594, 67.7585, 74.7577, 81.757, 88.7565, 95.756, 102.756, 109.755, 116.755, 123.755, 130.754, 137.754`

si l'on prend l'angle $\theta_0=10\pi/7$*, alors les 20 premières valeurs propres* λ_n *=* `0.802557, 2.55757, 4.30927, 6.06011, 7.8106, 9.56093, 11.3112, 13.0613, 14.8115, 16.5616, 18.3117, 20.0617, 21.8118, 23.5618, 25.3119, 27.0619, 28.812, 30.562, 32.312, 34.062`

En respectant la contrainte de régularité du gradient et par principe de superposition on recherche la solution sous la forme d'une série :

$$T(\eta,\theta)=\sum_{n\neq 0,+\infty} B_n P_{\lambda_n}^{réel}(i\ Sinh(\eta))P_{\lambda_n}(Cos(\theta))$$

La prise en compte de la condition aux limites inhomogènes en $\eta=l_\eta$ *donne :*

$$B_n=\int_0^{\vartheta_0} d\vartheta\ Sin(\theta)\ f_\theta(Cos(\theta))\ P_{\lambda_n}(Cos(\theta)) \leftarrow z=Cos(\theta) \quad on\ pose\ \mu_0=Cos(\theta_0)$$

$$B_n=-\int_1^{Cos(\theta_0)} dz\ f_\theta(z)\ P_{\lambda_n}(z)=\int_{Cos(\theta_0)}^{1} dz\ f_\theta(z)\ P_{\lambda_n}(z) \quad \left\|P_{\lambda_n}(z)\right\|^2=\int_{Cos(\theta_0)}^{1} dz\ P_{\lambda_n}(z)^2=\int_{\mu_0}^{1} dz\ P_{\lambda_n}(z)^2$$

$$\lambda_n\ tq\ P_{\lambda_n}(\mu_0)=0 \qquad T(\eta,\theta)=\sum_{n\neq 0,+\infty}\frac{B_n}{\left\|P_{\lambda_n}(z)\right\|^2}\frac{P_{\lambda_n}^{réel}(i\ Sinh(\eta))}{P_{\lambda_n}^{réel}(i\ Sinh(l_\eta))}P_{\lambda_n}(Cos(\theta))$$

En utilisant les résultats de calculs similaires pour le cas des coordonnées sphériques, on peut expliciter cette solution sur le cône sphéroïdal comme suit :

$$\mu_0 = Cos(\theta_0) \quad B_n = \int_{\mu_0}^{1} dz\ f_\theta(z)\ P_{\lambda_n}(z)$$

$$T(\eta,\theta) = \sum_{n\neq 0,+\infty} -\frac{(2\lambda_n+1)}{\lambda_n} \frac{B_n}{P_{\lambda_n-1}(\mu_0)\dfrac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\partial \lambda_n}} \frac{P_{\lambda_n}^{réel}(i\ Sinh(\eta))}{P_{\lambda_n}^{réel}(i\ Sinh(l_\eta))} P_{\lambda_n}(Cos(\theta))$$

Lorsque $f_\vartheta(\vartheta)=1$ alors :

$$\mu_0 = Cos(\theta_0) \quad \lambda_n \quad tq\ P_{\lambda_n}(\mu_0)=0 \quad B_n = \int_{\mu_0}^{1} dz\ P_{\lambda_n}(z) = \left[\frac{P_{\lambda_n+1}(z)-P_{\lambda_n-1}(z)}{2\lambda_n+1}\right]_{\mu_0}^{1} = \frac{P_{\lambda_n-1}(\mu_0)-P_{\lambda_n+1}(\mu_0)}{2\lambda_n+1}$$

$$T(\eta,\theta) = \sum_{n\neq 0,+\infty} \frac{B_n}{\left\|P_{\lambda_n}(z)\right\|^2} \frac{P_{\lambda_n}^{réel}(i\ Sinh(\eta))}{P_{\lambda_n}^{réel}(i\ Sinh(l_\eta))} P_{\lambda_n}(Cos(\theta))$$

$$T(\eta,\theta) = \sum_{n\neq 0,+\infty} -\frac{P_{\lambda_n-1}(\mu_0)-P_{\lambda_n+1}(\mu_0)}{\lambda_n \dfrac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\partial \lambda_n} P_{\lambda_n-1}(\mu_0)} \frac{P_{\lambda_n}^{réel}(i\ Sinh(\eta))}{P_{\lambda_n}^{réel}(i\ Sinh(l_\eta))} P_{\lambda_n}(Cos(\theta)) \quad \lambda_n \quad tq\ P_{\lambda_n}(\mu_0)=0$$

Tous les termes de la série sont bien réels par construction de la partie radiale : $P_{\lambda_n}^{réel}(i\ Sinh(\eta))$ *définie par la partie réelle ou bien :*

$$P_{\lambda_n}^{réel}(i\ Sinh(\eta)) = \frac{P_{\lambda_n}(i\ Sinh(\eta)) + \overline{P_{\lambda_n}(i\ Sinh(\eta))}}{2} = \frac{P_{\lambda_n}(i\ Sinh(\eta)) + P_{\lambda_n}(-i\ Sinh(\eta))}{2}$$

Avec les formules de récurrence sur les fonctions de Legendre, il vient :

$$Formule\ de\ récurrence\ P_{\lambda_n}(\mu_0) = \frac{\lambda_n P_{\lambda_n-1}(\mu_0) + (\lambda_n+1)P_{\lambda_n+1}(\mu_0)}{(2\lambda_n+1)\mu_0}$$

$$P_{\lambda_n}(\mu_0)=0 \Leftrightarrow \lambda_n P_{\lambda_n-1}(\mu_0) = -(\lambda_n+1)P_{\lambda_n+1}(\mu_0) \Leftrightarrow P_{\lambda_n-1} = -\frac{(\lambda_n+1)P_{\lambda_n+1}(\mu_0)}{\lambda_n}$$

$$\Rightarrow P_{\lambda_n-1}(\mu_0) - P_{\lambda_n+1}(\mu_0) = -\frac{(2\lambda_n+1)P_{\lambda_n+1}(\mu_0)}{\lambda_n} = \frac{(2\lambda_n+1)P_{\lambda_n-1}(\mu_0)}{(\lambda_n+1)}$$

$$T(\eta,\theta) = -\sum_{n\neq 0,+\infty} \frac{(2\lambda_n+1)}{\lambda_n(\lambda_n+1)\dfrac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\partial \lambda_n}} \frac{P_{\lambda_n}^{réel}(i\ Sinh(\eta))}{P_{\lambda_n}^{réel}(i\ Sinh(l_\eta))} P_{\lambda_n}(Cos(\theta)) \quad \lambda_n \quad tq\ P_{\lambda_n}(\mu_0)=0$$

Problème : "Cône" sphéroïdal aplati, de longueur infini, ou <u>hyperboloïde à une nappe tronqué en z=0</u>, plein d'angle ϑ_0, en coordonnées sphéroïdales (η,ϑ) soumis à des conditions aux limites Dirichlet homogènes en $\vartheta=\vartheta_0$,

Soit le problème suivant :

$$\Delta T(\eta,\theta)=0 \quad T(\eta,\theta)\ fini \quad T(\eta,\theta)\Big|_{\substack{\eta\in[0,l_\eta]\\ \theta=\theta_0}}=T_0 \quad T(\eta,\theta)\Big|_{\substack{\eta=0\\ \theta\in[0,\pi]}}=T_0 \quad T(\eta,\theta)\Big|_{\substack{\eta\in[l_\eta,+\infty]\\ \theta=\theta_0}}=0$$

Le problème n'a pas « stricto sensu » de conditions aux limites paires en η. La solution peut également se développer à l'aide des parties réelles des fonction de Legendre de première espèce et deuxième espèce. Comme nous l'avons déjà vu dans d'autres systèmes de coordonnées (système sphéroïdal allongé et cône sphérique), on décompose en deux sous-problèmes, correspondant à des solutions dans les deux sous domaines : la forme des fonctions radiales utilisées anticipent le cas limite d'un angle d'ouverture à 90° pour lequel on cherche alors le profil sur l'axe de révolution, d'un disque plein porté à une température fixe, et zéro au delà sur le plan du disque. Dans ce type de problème alors les parties réelles des fonctions de premières espèces sont nulles dans le premier domaine (le domaine fini) et les fonctions de deuxième espèce sont purement réelles (dans le domaine non borné). Dans le domaine fini, il convient donc de prendre la partie imaginaire des fonctions de première espèce et dans le domaine non borné la partie réelle des fonctions de deuxième espèce. Cela permet également d'éviter d'utiliser des fonctions strictement proportionnelles par construction.

$$Décomposition\ de\ l'unité \quad 1=-\sum_{n\neq 0,+\infty}\frac{(2\lambda_n+1)}{\lambda_n(\lambda_n+1)\dfrac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\partial\lambda_n}}P_{\lambda_n}(Cos(\theta)) \quad \lambda_n \quad tq\ P_{\lambda_n}(\mu_0)=0$$

$$\Omega_1=[0,l_\eta]\times[0,\theta_0]\rightarrow T_{\Omega_1}(\eta,\theta)=\sum_{n\neq 0,+\infty}\frac{(2\lambda_n+1)}{\lambda_n P_{\lambda_n-1}(\mu_0)\dfrac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\partial\lambda_n}}\left(-\frac{T_0P_{\lambda_n-1}(\mu_0)}{(\lambda_n+1)}+A_n\frac{\mathrm{Im}\big(P_{\lambda_n}(i\ Sinh(\eta))\big)}{\mathrm{Im}\big(P_{\lambda_n}(i\ Sinh(l_\eta))\big)}\right)P_{\lambda_n}(Cos(\theta))$$

$$\Omega_2=[l_\eta,+\infty]\times[0,\theta_0]\rightarrow T_{\Omega_2}(\eta,\theta)=-\sum_{n\neq 0,+\infty}\frac{(2\lambda_n+1)}{\lambda_n P_{\lambda_n-1}(\mu_0)\dfrac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\partial\lambda_n}}B_n\frac{\mathrm{Re}\big(Q_{\lambda_n}(i\ Sinh(\eta))\big)}{\mathrm{Re}\big(Q_{\lambda_n}(i\ Sinh(l_\eta))\big)}P_{\lambda_n}(Cos(\theta))$$

Symétrie du miroir

$$P_{\lambda_n}^{réel}(i\ Sinh(\eta))=Re\big(P_{\lambda_n}(i\ Sinh(\eta))\big) \quad Q_{\lambda_n}^{réel}(i\ Sinh(\eta))=Re\big(Q_{\lambda_n}(i\ Sinh(\eta))\big)$$

$$P_{\lambda_n}^{im}(i\ Sinh(\eta))=Im\big(P_{\lambda_n}(i\ Sinh(\eta))\big) \quad Q_{\lambda_n}^{im}(i\ Sinh(\eta))=Im\big(Q_{\lambda_n}(i\ Sinh(\eta))\big)$$

$$\left.\begin{array}{l}P_{\lambda_n}(\bar z)=\overline{P_{\lambda_n}(z)}\\ Q_{\lambda_n}(\bar z)=\overline{Q_{\lambda_n}(z)}\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}P_{\lambda_n}^{réel}(i\ Sinh(\eta))=\dfrac{P_{\lambda_n}(i\ Sinh(\eta))+\overline{P_{\lambda_n}(i\ Sinh(\eta))}}{2}=\dfrac{P_{\lambda_n}(i\ Sinh(\eta))+P_{\lambda_n}(-i\ Sinh(\eta))}{2}\\ Q_{\lambda_n}^{réel}(i\ Sinh(\eta))=\dfrac{Q_{\lambda_n}(i\ Sinh(\eta))+\overline{Q_{\lambda_n}(i\ Sinh(\eta))}}{2}=\dfrac{Q_{\lambda_n}(i\ Sinh(\eta))+Q_{\lambda_n}(-i\ Sinh(\eta))}{2}\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}P_{\lambda_n}^{im}(i\ Sinh(\eta))=\dfrac{P_{\lambda_n}(i\ Sinh(\eta))-\overline{P_{\lambda_n}(i\ Sinh(\eta))}}{2i}=\dfrac{P_{\lambda_n}(i\ Sinh(\eta))-P_{\lambda_n}(-i\ Sinh(\eta))}{2i}\\ Q_{\lambda_n}^{im}(i\ Sinh(\eta))=\dfrac{Q_{\lambda_n}(i\ Sinh(\eta))-\overline{Q_{\lambda_n}(i\ Sinh(\eta))}}{2i}=\dfrac{Q_{\lambda_n}(i\ Sinh(\eta))-Q_{\lambda_n}(-i\ Sinh(\eta))}{2i}\end{array}\right.$$

Il vient pour les dérivées :

$$\frac{dP_{\lambda_n}(i\ Sinh(\eta))}{d\eta} = \frac{i\ Cosh(\eta)\lambda_n}{-Sinh^2(\eta)-1}\left(i\ Sinh(\eta)P_{\lambda_n}(i\ Sinh(\eta)) - P_{\lambda_n-1}(i\ Sinh(\eta))\right)$$

$$\frac{dP_{\lambda_n}(i\ Sinh(\eta))}{d\eta} = \frac{\lambda_n}{Cosh(\eta)}\left(Sinh(\eta)P_{\lambda_n}(i\ Sinh(\eta)) + i\ P_{\lambda_n-1}(i\ Sinh(\eta))\right)$$

$$\frac{dP_{\lambda_n}(-i\ Sinh(\eta))}{d\eta} = \frac{dP_{\lambda_n}(i\ Sinh(-\eta))}{d\eta} = -\frac{dP_{\lambda_n}(i\ Sinh(\eta'))}{d\eta'} \qquad \eta' = -\eta$$

$$= -\frac{\lambda_n}{Cosh(\eta')}\left(Sinh(\eta')P_{\lambda_n}(i\ Sinh(\eta')) + i\ P_{\lambda_n-1}(i\ Sinh(\eta'))\right)$$

.

soit :

$$\Rightarrow \frac{dP_{\lambda_n}(-i\ Sinh(\eta))}{d\eta} = \frac{\lambda_n}{Cosh(\eta)}\left(Sinh(\eta)P_{\lambda_n}(-i\ Sinh(\eta)) - i\ P_{\lambda_n-1}(-i\ Sinh(\eta))\right)$$

$$\Rightarrow \frac{dP^{réel}_{\lambda_n}(i\ Sinh(\eta))}{d\eta} = \frac{\lambda_n}{Cosh(\eta)}\left(Sinh(\eta)P^{réel}_{\lambda_n}(i\ Sinh(\eta)) - P^{im}_{\lambda_n-1}(i\ Sinh(\eta))\right)$$

$$\frac{dQ^{réel}_{\lambda_n}(i\ Sinh(\eta))}{d\eta} = \frac{\lambda_n}{Cosh(\eta)}\left(Sinh(\eta)Q^{réel}_{\lambda_n}(i\ Sinh(\eta)) - Q^{im}_{\lambda_n-1}(i\ Sinh(\eta))\right)$$

.

Plus généralement, on peut écrire :

$$\frac{d\,\mathrm{Re}\left(P_{\lambda_n}(i\ Sinh(\eta))\right)}{d\eta} = \frac{\lambda_n}{Cosh(\eta)}\left(Sinh(\eta)\,\mathrm{Re}\left(P_{\lambda_n}(i\ Sinh(\eta))\right) - \mathrm{Im}\left(P_{\lambda_n-1}(i\ Sinh(\eta))\right)\right)$$

$$\frac{d\,\mathrm{Im}\left(P_{\lambda_n}(i\ Sinh(\eta))\right)}{d\eta} = \frac{\lambda_n}{Cosh(\eta)}\left(Sinh(\eta)\,\mathrm{Im}\left(P_{\lambda_n}(i\ Sinh(\eta))\right) + \mathrm{Re}\left(P_{\lambda_n-1}(i\ Sinh(\eta))\right)\right)$$

$$\frac{d\,\mathrm{Re}\left(Q_{\lambda_n}(i\ Sinh(\eta))\right)}{d\eta} = \frac{\lambda_n}{Cosh(\eta)}\left(Sinh(\eta)\,\mathrm{Re}\left(Q_{\lambda_n}(i\ Sinh(\eta))\right) - \mathrm{Im}\left(Q_{\lambda_n-1}(i\ Sinh(\eta))\right)\right)$$

$$\frac{d\,\mathrm{Im}\left(Q_{\lambda_n}(i\ Sinh(\eta))\right)}{d\eta} = \frac{\lambda_n}{Cosh(\eta)}\left(Sinh(\eta)\,\mathrm{Im}\left(Q_{\lambda_n}(i\ Sinh(\eta))\right) + \mathrm{Re}\left(Q_{\lambda_n-1}(i\ Sinh(\eta))\right)\right)$$

.

Les continuités C_0 et C_1 conduisent à un système d'équations linéaires :

$$T_{\Omega_1}(\eta,\theta)\Big|_{\substack{\eta=l_\eta\\ \eta\in[0,\theta_0]}} = T_{\Omega_2}(\eta,\theta)\Big|_{\substack{\eta=l_\eta\\ \eta\in[0,\theta_0]}} \Rightarrow -\frac{T_0 P_{\lambda_n-1}(\mu_0)}{(\lambda_n+1)} + A_n = -B_n \Leftrightarrow A_n + B_n = \frac{T_0 P_{\lambda_n-1}(\mu_0)}{(\lambda_n+1)}$$

$$\frac{\partial T_{\Omega_1}(\eta,\theta)}{\partial\eta}\Bigg|_{\substack{\eta=l_\eta\\ \eta\in[0,\theta_0]}} = \frac{\partial T_{\Omega_2}(\eta,\theta)}{\partial\eta}\Bigg|_{\substack{\eta=l_\eta\\ \eta\in[0,\theta_0]}} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} A_n \dfrac{\lambda_n\left(Sinh(\eta)\,\mathrm{Im}\left(P_{\lambda_n}(i\,Sinh(l_\eta))\right)+\mathrm{Re}\left(P_{\lambda_n-1}(i\,Sinh(l_\eta))\right)\right)}{Cosh(\eta)\,\mathrm{Im}\left(P_{\lambda_n}(i\,Sinh(l_\eta))\right)} \\ = -B_n \dfrac{\lambda_n\left(Sinh(\eta)\,\mathrm{Re}\left(Q_{\lambda_n}(i\,Sinh(l_\eta))\right)-\mathrm{Im}\left(Q_{\lambda_n-1}(i\,Sinh(l_\eta))\right)\right)}{Cosh(\eta)\,\mathrm{Re}\left(Q_{\lambda_n}(i\,Sinh(l_\eta))\right)} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow Sinh(\eta)(A_n+B_n) + A_n \frac{\mathrm{Re}\left(P_{\lambda_n-1}(i\,Sinh(l_\eta))\right)}{\mathrm{Im}\left(P_{\lambda_n}(i\,Sinh(l_\eta))\right)} = B_n \frac{\mathrm{Im}\left(Q_{\lambda_n-1}(i\,Sinh(l_\eta))\right)}{\mathrm{Re}\left(Q_{\lambda_n}(i\,Sinh(l_\eta))\right)}$$

$$\Rightarrow A_n + B_n = \frac{T_0 P_{\lambda_n-1}(\mu_0)}{(\lambda_n+1)} \quad ; \quad B_n = \frac{\mathrm{Re}\left(Q_{\lambda_n}(i\,Sinh(l_\eta))\right)}{\mathrm{Im}\left(Q_{\lambda_n-1}(i\,Sinh(l_\eta))\right)}\left(\frac{T_0 P_{\lambda_n-1}(\mu_0)}{(\lambda_n+1)} Sinh(l_\eta) + A_n \frac{\mathrm{Re}\left(P_{\lambda_n-1}(i\,Sinh(l_\eta))\right)}{\mathrm{Im}\left(P_{\lambda_n}(i\,Sinh(l_\eta))\right)}\right)$$

$$\Rightarrow A_n\left(1+\frac{\mathrm{Re}\left(P_{\lambda_n-1}(i\,Sinh(l_\eta))\right)\mathrm{Re}\left(Q_{\lambda_n}(i\,Sinh(l_\eta))\right)}{\mathrm{Im}\left(P_{\lambda_n}(i\,Sinh(l_\eta))\right)\mathrm{Im}\left(Q_{\lambda_n-1}(i\,Sinh(l_\eta))\right)}\right) = \frac{T_0 P_{\lambda_n-1}(\mu_0)}{(\lambda_n+1)}\left(1 - Sinh(l_\eta)\frac{\mathrm{Re}\left(Q_{\lambda_n}(i\,Sinh(l_\eta))\right)}{\mathrm{Im}\left(Q_{\lambda_n-1}(i\,Sinh(l_\eta))\right)}\right)$$

$$\Rightarrow A_n = \frac{T_0 P_{\lambda_n-1}(\mu_0)}{(\lambda_n+1)} \frac{\mathrm{Im}\left(P_{\lambda_n}(i\,Sinh(l_\eta))\right)\left(\mathrm{Im}\left(Q_{\lambda_n-1}(i\,Sinh(l_\eta))\right) - Sinh(l_\eta)\mathrm{Re}\left(Q_{\lambda_n}(i\,Sinh(l_\eta))\right)\right)}{\mathrm{Im}\left(P_{\lambda_n}(i\,Sinh(l_\eta))\right)\mathrm{Im}\left(Q_{\lambda_n-1}(i\,Sinh(l_\eta))\right) + \mathrm{Re}\left(P_{\lambda_n-1}(i\,Sinh(l_\eta))\right)\mathrm{Re}\left(Q_{\lambda_n}(i\,Sinh(l_\eta))\right)}$$

$$B_n = \frac{T_0 P_{\lambda_n-1}(\mu_0)}{(\lambda_n+1)} - A_n$$

$$\Rightarrow B_n = \frac{T_0 P_{\lambda_n-1}(\mu_0)}{(\lambda_n+1)} \frac{\mathrm{Re}\left(Q_{\lambda_n}(i\,Sinh(l_\eta))\right)\left(\mathrm{Re}\left(P_{\lambda_n-1}(i\,Sinh(l_\eta))\right) + Sinh(l_\eta)\mathrm{Im}\left(P_{\lambda_n}(i\,Sinh(l_\eta))\right)\right)}{\mathrm{Im}\left(P_{\lambda_n}(i\,Sinh(l_\eta))\right)\mathrm{Im}\left(Q_{\lambda_n-1}(i\,Sinh(l_\eta))\right) + \mathrm{Re}\left(P_{\lambda_n-1}(i\,Sinh(l_\eta))\right)\mathrm{Re}\left(Q_{\lambda_n}(i\,Sinh(l_\eta))\right)}$$

Sous une forme « condensée » on écrira la solution :

$$\beta_n = \frac{\left(\mathrm{Im}\left(Q_{\lambda_n-1}(i\,Sinh(l_\eta))\right) - Sinh(l_\eta)\mathrm{Re}\left(Q_{\lambda_n}(i\,Sinh(l_\eta))\right)\right)}{\left(\mathrm{Re}\left(Q_{\lambda_n}(i\,Sinh(l_\eta))\right)\mathrm{Re}\left(P_{\lambda_n-1}(i\,Sinh(l_\eta))\right) + \mathrm{Im}\left(P_{\lambda_n}(i\,Sinh(l_\eta))\right)\mathrm{Im}\left(Q_{\lambda_n-1}(i\,Sinh(l_\eta))\right)\right)}$$

$$\xi_n = \frac{\left(\mathrm{Re}\left(P_{\lambda_n-1}(i\,Sinh(l_\eta))\right) + Sinh(l_\eta)\mathrm{Im}\left(P_{\lambda_n}(i\,Sinh(l_\eta))\right)\right)}{\mathrm{Re}\left(P_{\lambda_n-1}(i\,Sinh(l_\eta))\right)\mathrm{Re}\left(Q_{\lambda_n}(i\,Sinh(l_\eta))\right) + \mathrm{Im}\left(P_{\lambda_n}(i\,Sinh(l_\eta))\right)\mathrm{Im}\left(Q_{\lambda_n-1}(i\,Sinh(l_\eta))\right)}$$

$$A_n = \beta_n\left(\frac{T_0 P_{\lambda_n-1}(\mu_0)}{(\lambda_n+1)}\right)\mathrm{Im}\left(P_{\lambda_n}(i\,Sinh(l_\eta))\right) \quad B_n = \xi_n\left(\frac{T_0 P_{\lambda_n-1}(\mu_0)}{(\lambda_n+1)}\right)\mathrm{Re}\left(Q_{\lambda_n}(i\,Sinh(l_\eta))\right)$$

$$\Omega_1 = [0,l_\eta]\times[0,\theta_0] \rightarrow T_{\Omega 1}(\eta,\theta) = T_0 \sum_{n\neq 0,+\infty} \frac{(2\lambda_n+1)}{\lambda_n(\lambda_n+1)\dfrac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\partial\lambda_n}}\left[-1+\beta_n\,\mathrm{Im}\left(P_{\lambda_n}(i\,Sinh(\eta))\right)\right]P_{\lambda_n}(Cos(\theta))$$

$$\Omega_2 = [l_\eta,+\infty]\times[0,\theta_0] \rightarrow T_{\Omega 2}(\eta,\theta) = -T_0 \sum_{n\neq 0,+\infty} \frac{(2\lambda_n+1)}{\lambda_n(\lambda_n+1)\dfrac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\partial\lambda_n}}\xi_n\,\mathrm{Re}\left(Q_{\lambda_n}(i\,Sinh(\eta))\right)P_{\lambda_n}(Cos(\theta))$$

.

La continuité est bien assurée grâce à la relation entre coefficients :

$$\beta_n\,\mathrm{Im}\left(P_{\lambda_n}(i\,Sinh(l_\eta))\right) + \xi_n\,\mathrm{Re}\left(Q_{\lambda_n}(i\,Sinh(l_\eta))\right) = 1$$

Dans le cas de valeurs propres non entières, on peut écrire :

$$\mathrm{Re}\left(Q_{\lambda_n}(i\ Sinh(l_\eta))\right) = -\frac{\pi}{2} Tan\left(\lambda_n \frac{\pi}{2}\right) \mathrm{Re}\left(P_{\lambda_n}(i\ Sinh(l_\eta))\right)$$

$$\mathrm{Im}\left(Q_{\lambda_n}(i\ Sinh(l_\eta))\right) = \frac{\pi}{2} Cotan\left(\lambda_n \frac{\pi}{2}\right) \mathrm{Im}\left(P_{\lambda_n}(i\ Sinh(l_\eta))\right)$$

$$\mathrm{Im}\left(Q_{\lambda_n-1}(i\ Sinh(l_\eta))\right) = -\frac{\pi}{2} Tan\left(\lambda_n \frac{\pi}{2}\right) \mathrm{Im}\left(P_{\lambda_n-1}(i\ Sinh(l_\eta))\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \beta_n = \dfrac{\mathrm{Im}\left(P_{\lambda_n-1}(i\ Sinh(l_\eta))\right) - Sinh(l_\eta)\mathrm{Re}\left(P_{\lambda_n}(i\ Sinh(l_\eta))\right)}{\mathrm{Re}\left(P_{\lambda_n}(i\ Sinh(l_\eta))\right)\mathrm{Re}\left(P_{\lambda_n-1}(i\ Sinh(l_\eta))\right) + \mathrm{Im}\left(P_{\lambda_n}(i\ Sinh(l_\eta))\right)\mathrm{Im}\left(P_{\lambda_n-1}(i\ Sinh(l_\eta))\right)} \\ \xi_n = -\dfrac{2}{\pi Tan\left(\lambda_n \frac{\pi}{2}\right)} \dfrac{Sinh(l_\eta)\mathrm{Im}\left(P_{\lambda_n}(i\ Sinh(l_\eta))\right) + \mathrm{Re}\left(P_{\lambda_n-1}(i\ Sinh(l_\eta))\right)}{\mathrm{Re}\left(P_{\lambda_n}(i\ Sinh(l_\eta))\right)\mathrm{Re}\left(P_{\lambda_n-1}(i\ Sinh(l_\eta))\right) + \mathrm{Im}\left(P_{\lambda_n}(i\ Sinh(l_\eta))\right)\mathrm{Im}\left(P_{\lambda_n-1}(i\ Sinh(l_\eta))\right)} \end{cases}$$

Avec la relation :

$$\beta_n\, \mathrm{Im}\left(P_{\lambda_n}(i\ Sinh(l_\eta))\right) - \frac{\pi}{2} Tan\left(\lambda_n \frac{\pi}{2}\right) \xi_n\, \mathrm{Re}\left(P_{\lambda_n}(i\ Sinh(l_\eta))\right) = 1$$

.

Ces dernières formules ne s'appliquent pas lorsque les valeurs propres sont entières et dans ce cas il faut revenir aux formules avant développement des relations entre partie imaginaire et réelles des fonctions de première et deuxième espèce.

Voyons maintenant le cas particulier de l'angle d'ouverture $\vartheta_0=\pi/2$. Dans ce cas l'hyperboloïde dégénère en le plan (x,y) tout entier excluant un disque de rayon c, et les valeurs propres du problème aux limites de Dirichlet sont les entiers impairs. Nous avons donc fait le bon choix des fonctions propres car d'après la construction les fonctions de premières espèce sont purement imaginaire et les fonctions de deuxième espèce purement réelles. En effet :

$$\lambda_n = 2n+1 \quad \begin{cases} P_{2n+1}(i\ Sinh(\eta)) = -P_{2n+1}(-i\ Sinh(\eta)) = -\overline{P_{2n+1}(i\ Sinh(\eta))} \Rightarrow P_{2n+1}(i\ Sinh(\eta))\, purement\ imaginaire \\ Q_{2n+1}(i\ Sinh(\eta)) = Q_{2n+1}(-i\ Sinh(\eta)) = \overline{Q_{2n+1}(i\ Sinh(\eta))} \Rightarrow Q_{2n+1}(i\ Sinh(\eta))\, purement\ rée \end{cases} l$$

$$De\ même \quad \begin{cases} P_{2n}(i\ Sinh(\eta))\, purement\ réel \\ Q_{2n}(i\ Sinh(\eta))\, purement\ imaginaire \end{cases}$$

Après assurance des conditions de continuité de la solution et de sa dérivée, les coefficients et la solution s'écrivent cette fois-ci :

$$\mu_0 = Cos(\theta_0) = Cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \Rightarrow \lambda_n = 2n+1 \quad \left.\frac{\partial P_\lambda(0)}{\partial \lambda}\right|_{\lambda_n = 2n+1} = -(-1)^n \frac{2^{2n}\,(n!)^2}{(2n+1)!}$$

$$\Rightarrow \frac{(2\lambda_n+1)}{\lambda_n(\lambda_n+1)\dfrac{\partial P_{\lambda_n}(0)}{\partial \lambda_n}} = -(-1)^n \frac{(4n+3)(2n)!}{(2n+2)2^{2n}(n!)^2}$$

$$\Omega_1 = [0, l_\eta] \times [0, \theta_0] \rightarrow \frac{T_{\Omega 1}(\eta,\theta)}{T_0} = \sum_{n \neq 0, +\infty} (-1)^n \frac{(4n+3)(2n)!}{(2n+2)2^{2n}(n!)^2} \left[1 - \beta_n\, \mathrm{Im}\left(P_{2n+1}(i\ Sinh(\eta))\right)\right] P_{2n+1}(Cos(\theta))$$

$$\Omega_2 = [l_\eta, +\infty] \times [0, \theta_0] \rightarrow \frac{T_{\Omega 2}(\eta,\theta)}{T_0} = \sum_{n \neq 0, +\infty} (-1)^n \frac{(4n+3)(2n)!}{(2n+2)2^{2n}(n!)^2} \xi_n\, \mathrm{Re}\left(Q_{2n+1}(i\ Sinh(\eta))\right) P_{2n+1}(Cos(\theta))$$

Examinons le profil sur l'axe z cartésien. Selon les coordonnées sphéroïdales aplaties, la nappe de l'hyperboloïde se transforme en un disque de rayon r_0=c Cosh(l_η), et l'axe z est entièrement décrit par la variation de η pour un angle ϑ=0 :

$$x^2+y^2=r_0{}^2=Cosh^2(l_\eta)=1+Sinh^2(l_\eta)\Rightarrow Sinh(l_\eta)=\sqrt{r_0{}^2-1}$$

$$\Omega_1=[0,l_\eta]\times[0,\theta_0]\rightarrow\frac{T_{\Omega 1}(\eta,\theta)}{T_0}=\sum_{n\neq 0,+\infty}(-1)^n\frac{(4n+3)(2n)!}{(2n+2)2^{2n}\,(n!)^2}\left[1-\beta_n\,\mathrm{Im}\left(P_{2n+1}(i\,Sinh(\eta))\right)\right]P_{2n+1}(Cos(\theta))$$

$$\Omega_2=[l_\eta,+\infty]\times[0,\theta_0]\rightarrow\frac{T_{\Omega 2}(\eta,\theta)}{T_0}=\sum_{n\neq 0,+\infty}(-1)^n\frac{(4n+3)(2n)!}{(2n+2)2^{2n}\,(n!)^2}\xi_n\,\mathrm{Re}\left(Q_{2n+1}(i\,Sinh(\eta))\right)P_{2n+1}(Cos(\theta))$$

En introduisant la valeur du Wronskien dans ce cas particulier, il vient :

$$P_{\lambda_n}(iSinh(l_\eta))Q_{\lambda_n}'(iSinh(l_\eta))-P_{\lambda_n}'(iSinh(l_\eta))Q_{\lambda_n}(iSinh(l_\eta))=\frac{1}{1+Sinh^2(l_\eta)}=\frac{1}{Cosh^2(l_\eta)}$$

Sans le facteur $iCosh(l_\eta)$!

$$\left[P_{\lambda_n}(iSinh(l_\eta))Q_{\lambda_n}'(iSinh(l_\eta))-P_{\lambda_n}'(iSinh(l_\eta))Q_{\lambda_n}(iSinh(l_\eta))\right]=$$

$$=-\frac{\lambda_n}{Cosh^2(l_\eta)}\left[P_{\lambda_n-1}(Cosh(l_\eta))Q_{\lambda_n}(Cosh(l_\eta))-P_{\lambda_n}(Cosh(l_\eta))Q_{\lambda_n-1}(Cosh(l_\eta))\right]$$

$$\Rightarrow P_{\lambda_n-1}(iSinh(l_\eta))Q_{\lambda_n}(iSinh(l_\eta))-P_{\lambda_n}(iSinh(l_\eta))Q_{\lambda_n-1}(iSinh(l_\eta))=-\frac{1}{\lambda_n}$$

$$\Rightarrow P_{2n}(iSinh(l_\eta))Q_{2n+1}(iSinh(l_\eta))-P_{2n+1}(iSinh(l_\eta))Q_{2n}(iSinh(l_\eta))=-\frac{1}{2n+1}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Re}(Q_{2n+1}(i\,x_0))\mathrm{Re}(P_{2n}(i\,x_0))+\mathrm{Im}(P_{2n+1}(i\,x_0))\mathrm{Im}(Q_{2n}(i\,x_0))=-\frac{1}{2n+1}$$

En simplifiant avec le facteur d'échelle c=1, l'intervalle de valeur de z est séparé en deux sous-intervalles :

$$Disque\ de\ rayon\ r_0\ sur\ le\ plan\ (x,y)\quad r_0=Cosh(l_\eta)\quad Sinh(l_\eta)=x_0=\sqrt{r_0{}^2-1}\quad \theta=0\quad \lambda_n=2n+1$$

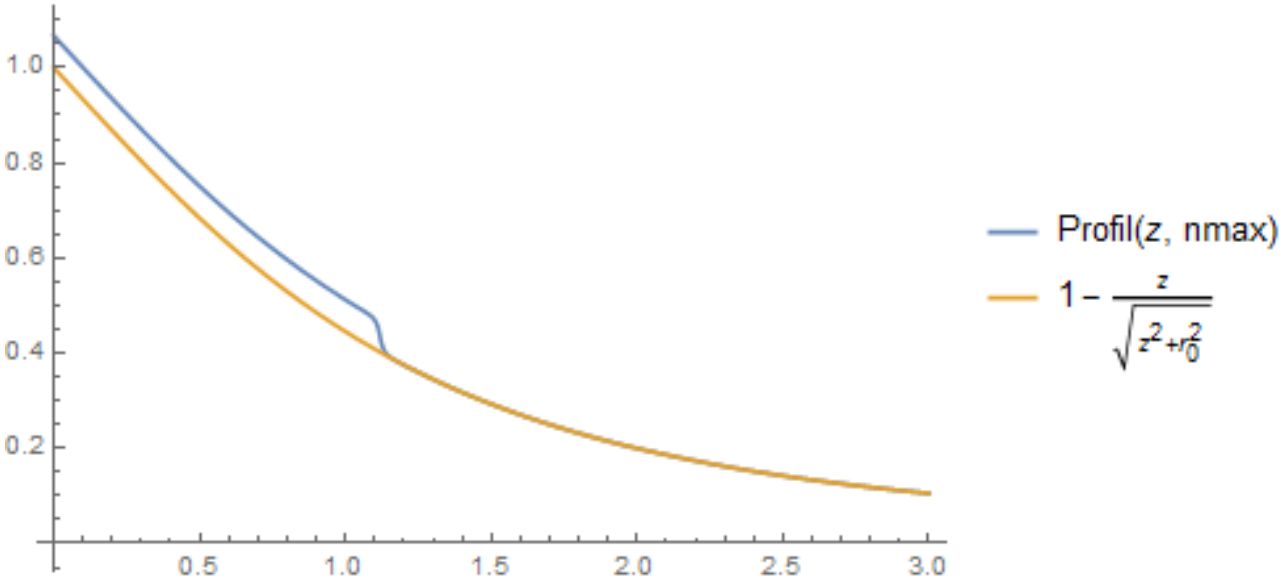
$$\beta_n=\frac{\left(\mathrm{Im}(Q_{2n}(i\,x_0))-x_0\,\mathrm{Re}(Q_{2n+1}(i\,x_0))\right)}{\left(\mathrm{Re}(Q_{2n+1}(i\,x_0))\mathrm{Re}(P_{2n}(i\,x_0))+\mathrm{Im}(P_{2n+1}(i\,x_0))\mathrm{Im}(Q_{2n}(i\,x_0))\right)}=-(2n+1)\left(\mathrm{Im}(Q_{2n}(i\,x_0))-x_0\,\mathrm{Re}(Q_{2n+1}(i\,x_0))\right)$$

$$\xi_n=\frac{\left(x_0\,\mathrm{Im}(P_{2n+1}(i\,x_0))+\mathrm{Re}(P_{2n}(i\,x_0))\right)}{\left(\mathrm{Re}(Q_{2n+1}(i\,x_0))\mathrm{Re}(P_{2n}(i\,x_0))+\mathrm{Im}(P_{2n+1}(i\,x_0))\mathrm{Im}(Q_{2n}(i\,x_0))\right)}=-(2n+1)\left(x_0\,\mathrm{Im}(P_{2n+1}(i\,x_0))+\mathrm{Re}(P_{2n}(i\,x_0))\right)$$

$$z=Sinh(\eta)\in\left[0,Sinh(l_\eta)=x_0=\sqrt{r_0{}^2-1}\right]\rightarrow\begin{cases}\dfrac{T_{\Omega 1}(z)}{T_0}=\displaystyle\sum_{n\neq 0,+\infty}(-1)^n\frac{(4n+3)(2n)!}{(2n+2)2^{2n}\,(n!)^2}\left[1-\beta_n\,\mathrm{Im}(P_{2n+1}(i\,z)\right]\\ \dfrac{T_{\Omega 2}(z)}{T_0}=\displaystyle\sum_{n\neq 0,+\infty}(-1)^n\frac{(4n+3)(2n)!}{(2n+2)2^{2n}\,(n!)^2}\xi_n\,\mathrm{Re}(Q_{2n+1}(i\,z))\end{cases}$$

La solution dans le cas limite $\vartheta_0=\pi/2$ correspond à une fonction limite dont la valeur est 1 sur la section annulaire [c, r_0=c Cosh(l_η)] et nulle au delà. D'après les valeurs numériques, la solution en z=0, au centre du disque est également constante = 1. Ce profil est à rapprocher de la solution connue du profil qui s'avère être une fonction très simple : $\frac{T(z)}{T_0}=1-\left(\frac{z}{r_0}\right)\Big/\sqrt{1+\frac{z^2}{r_0^2}}$.

Profil qui accuse numériquement encore un décrochement sur la fonction de première espèce dans le premier domaine de solution, décrochement constant qui s'amenuise avec la prise en compte de plus de terme dans la série. Tandis que pour le deuxième domaine, seul quelques termes suffisent pour épouser parfaitement la solution littérale :



Il s'avère que sur le premier domaine, la convergence est extrêmement lente. Il faut donc calculer un nombre important de termes (près de 300 sur ce domaine). Dans certains cas il arrive que les coefficients β_n divergent (et ξ_n tendent rapidement vers 0, et inversement) rendant impossible le calcul de termes indiciels plus élevés. Dans cas on choisit l'un ou l'autre des schémas de calcul suivant :

$$\textit{Schéma } 1 \quad \begin{cases} \beta_n = -(2n+1)\left(\mathrm{Im}(Q_{2n}(i\,x_0)) - x_0\,\mathrm{Re}(Q_{2n+1}(i\,x_0))\right) \\ \xi_n = \dfrac{1-\beta_n\,\mathrm{Im}(P_{2n+1}(i\,x_0))}{\mathrm{Re}(Q_{2n+1}(i\,x_0))} \end{cases}$$

$$\textit{Schéma } 2 \quad \begin{cases} \xi_n = -(2n+1)\left(x_0\,\mathrm{Im}(P_{2n+1}(i\,x_0)) + \mathrm{Re}(P_{2n}(i\,x_0))\right) \\ \beta_n = \dfrac{1-\xi_n\,\mathrm{Re}(Q_{2n+1}(i\,x_0))}{\mathrm{Im}(P_{2n+1}(i\,x_0))} \end{cases}$$

Exemple : *"Cône" sphéroïdal aplati plein d'angle θ_0, en coordonnées sphéroïdales (η,θ) soumis à des conditions aux limites de Dirichlet inhomogènes en $\eta=l_\eta$ et Neumann homogènes en $\theta=\theta_0$*

Soit le problème :

$$\Delta T(\eta,\theta)=0 \quad T(\eta,\theta)\ fini$$

$$T(\eta,\theta)\big|_{\eta=l_\eta}=f_\theta(Cos(\theta))$$

$$T'_\theta(\eta,\theta)\big|_{\theta=\theta_0}=0$$

La solution doit comporter les mêmes contraintes que pour les solutions sur le sphéroïde, à savoir

$$T(\eta,\theta)\ fini$$

$$T(\eta,\theta)\ fonction\ paire\ en\ \theta\ soit\ \ T(\eta,-\theta)=T(\eta,\theta)$$

$$T(\mu,\theta)\quad ne\ comporte\ aucune\ singularité\ en\ \theta=0, continue\ et\ dérivable$$

Pour respecter la condition aux limites $T'_\theta(\eta,\theta)\big|_{\theta=\theta_0}=0$*, on est amené à rechercher une extension des polynômes de Legendre de degré entier à des fonctions de Legendre de degré non entier λ_n* $P_n(Cos(\theta))\to P_{\lambda_n}(Cos(\theta))$*, ce qui donne la condition suivante pour établir les valeurs propres du problème de Sturm-Liouville.*

$$\mu_0=Cos(\theta_0)\,;\ \frac{dP_{\lambda_n}(z)}{dz}\bigg|_{z=\mu_0}=0 \quad \frac{\partial P_{\lambda_n}(z)}{\partial z}=\frac{\lambda_n}{z^2-1}\left(zP_{\lambda_n}(z)-P_{\lambda_n-1}(z)\right) \quad \forall\lambda_n>0\in\Re\ ou\ \mathbf{N}$$

$$\Rightarrow \frac{\lambda_n}{\mu_0^{\ 2}-1}\left(\mu_0P_{\lambda_n}(\mu_0)-P_{\lambda_n-1}(\mu_0)\right)=0$$

$$\Rightarrow \lambda_n=0\ ou\ \mu_0P_{\lambda_n}(\mu_0)-P_{\lambda_n-1}(\mu_0)=0$$

<u>*Exemple*</u> *si l'on prend la valeur* $\theta_0=\pi/2$*, alors on retrouve les valeurs propres λ_n =2n n≥0,*

si l'on prend l'angle $\theta_0=\pi/3$*, alors les 21 premières valeurs propres λ_n =* `0, 3.19569, 6.21953, 9.22885, 12.2338, 15.2369, 18.239, 21.2405, 24.2416, 27.2426, 30.2433, 33.2439, 36.2444, 39.2448, 42.2452, 45.2455, 48.2458, 51.246, 54.2462, 57.2464, 60.2466`

si l'on prend l'angle $\theta_0=\pi/7$*, alors les 20 premières valeurs propres λ_n =* `0, 8.05252, 15.14, 22.1738, 29.1917, 36.2028, 43.2104, 50.2158, 57.22, 64.2232, 71.2258, 78.228, 85.2298, 92.2313, 99.2326, 106.234, 113.235, 120.236, 127.236, 134.237, 141.238`

En respectant la contrainte de régularité du gradient et par principe de superposition on recherche la solution sous la forme d'une série :

$$T(r,\theta)=\sum_{n\neq0,+\infty}B_nP_{\lambda_n}^{réel}(i\ Sinh(\eta))P_{\lambda_n}(Cos(\theta))$$

La prise en compte de la condition aux limites inhomogènes en $r=l_r$, donne, en incluant la valeur propre 0 :

$$Fonctions\ propres\ P_0(z)=1 \quad P_n(z)$$

$$z=Cos(\theta) \quad \mu_0=Cos(\theta_0)$$

$$B_0=\int_{\mu_0}^{1}dz\ f_\theta(z) \qquad B_n=-\int_{1}^{\mu_0}dz\ f_\theta(z)\ P_{\lambda_n}(z)=\int_{\mu_0}^{1}dz\ f_\theta(z)\ P_{\lambda_n}(z) \quad \left\|P_{\lambda_n}(z)\right\|^2=\int_{\mu_0}^{1}dz\ P_{\lambda_n}(z)^2 \quad \left\|P_0(z)\right\|^2=\int_{\mu_0}^{1}dz=1-\mu_0$$

$$\lambda_n \quad tq \quad \lambda_n=0\ ou\ \mu_0P_{\lambda_n}(\mu_0)-P_{\lambda_n-1}(\mu_0)=0$$

$$T(\eta,\theta)=\frac{B_0}{1-\mu_0}+\sum_{n\neq0,+\infty}\frac{B_n}{\left\|P_{\lambda_n}(z)\right\|^2}\frac{P_{\lambda_n}^{réel}(i\ Sinh(\eta))}{P_{\lambda_n}^{réel}(i\ Sinh(l_\eta))}P_{\lambda_n}(Cos(\theta))$$

La norme des fonctions propres se calcule ainsi (voir résultats sur les coordonnées sphériques) :

$$\left\| P_{\lambda_n}(z)^2 \right\| = \frac{\lambda_n}{(2\lambda_n+1)} P_{\lambda_n}(\mu_0)\left(\frac{\partial P_{\lambda_n-1}(\mu_0)}{\partial \lambda} - \mu_0 \frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\partial \lambda} \right)$$

La solution du problème s'écrit donc :

$$\mu_0 = Cos(\theta_0)$$

$$B_0 = \int_{\mu_0}^{1} dz\ f_\theta(z) \quad B_n = \int_{\mu_0}^{1} dz\ f_\theta(z)\ P_{\lambda_n}(z)$$

$$\lambda_n \quad tq \quad \lambda_n = 0\ ou\ \mu_0 P_{\lambda_n}(\mu_0) - P_{\lambda_n-1}(\mu_0) = 0$$

$$T(\eta,\theta) = \frac{B_0}{1-\mu_0} + \sum_{n\neq 0,+\infty} \frac{2\lambda_n+1}{\lambda_n} \frac{B_n}{P_{\lambda_n}(\mu_0)\left(\frac{\partial P_{\lambda_n-1}(\mu_0)}{\partial \lambda} - \mu_0 \frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\partial \lambda} \right)} \frac{P_{\lambda_n}^{réel}(i\ Sinh(\eta))}{P_{\lambda_n}^{réel}(i\ Sinh(l_\eta))} P_{\lambda_n}(Cos(\theta))$$

Lorsque $f_\vartheta(\vartheta)=1$ alors on a :

$$\mu_0 = Cos(\theta_0) \quad \lambda_n \quad tq \quad \lambda_n = 0\ ou\ \mu_0 P_{\lambda_n}(\mu_0) - P_{\lambda_n-1}(\mu_0) = 0$$

$$B_0 = 1-\mu_0 \quad B_n = \int_{\mu_0}^{1} dz\ P_{\lambda_n}(z) = \frac{1}{2\lambda_n+1}\left[P_{\lambda_n+1}(z) - P_{\lambda_n-1}(z) \right]_{\mu_0}^{1} = \frac{1}{2\lambda_n+1}\left(P_{\lambda_n-1}(\mu_0) - P_{\lambda_n+1}(\mu_0) \right)$$

$$= \frac{1}{2\lambda_n+1}\left(\mu_0 P_{\lambda_n}(\mu_0) - P_{\lambda_n+1}(\mu_0) \right)$$

en utilisant la forme alternative de l'intégrale indéfinie $\int dz\ P_{\lambda_n}(z) = \frac{1}{\lambda_n+1}\left[zP_{\lambda_n}(z) - P_{\lambda_n-1}(z) \right]$

$$B_n = \int_{\mu_0}^{1} dz\ P_{\lambda_n}(z) = \frac{1}{\lambda_n+1}\left[zP_{\lambda_n}(z) - P_{\lambda_n-1}(z) \right]_{\mu_0}^{1} = \frac{1}{\lambda_n+1}\left[P_{\lambda_n-1}(\mu_0) - \mu_0 P_{\lambda_n}(\mu_0) \right] = 0$$

$$\Rightarrow T(\eta,\theta) = \frac{1-\mu_0}{1-\mu_0} = 1$$

Et l'on retrouve bien la solution triviale $T(\eta,\vartheta)=1$

A titre d'illustration, choisissons une autre fonction limite de profil :

$$f_\theta(\theta) = 1 - Heaviside(\theta-\theta_1) \quad avec\ \theta_1 \in \left]0,\theta_0\right[$$

et posons $\mu_1 = Cos(\theta_1)$

$$B_0 = \int_{\mu_1}^{1} dz = (1-\mu_1) \quad B_n = \int_{\mu_1}^{1} dz\ P_{\lambda_n}(z) = \frac{1}{2\lambda_n+1}\left[P_{\lambda_n+1}(z) - P_{\lambda_n-1}(z) \right]_{\mu_1}^{1} = \frac{1}{2\lambda_n+1}\left[P_{\lambda_n-1}(\mu_1) - P_{\lambda_n+1}(\mu_1) \right]$$

Il vient la solution suivante :

$$\mu_0 = Cos(\theta_0) \quad \mu_1 = Cos(\theta_1)$$

$$\lambda_n \quad tq \quad \lambda_n = 0\ ou\ \mu_0 P_{\lambda_n}(\mu_0) - P_{\lambda_n-1}(\mu_0) = 0$$

$$T(\eta,\theta) = \frac{1-\mu_1}{1-\mu_0} + \sum_{n\neq 0,+\infty} \frac{\left(P_{\lambda_n-1}(\mu_1) - P_{\lambda_n+1}(\mu_1) \right)}{\lambda_n P_{\lambda_n}(\mu_0)\left(\frac{\partial P_{\lambda_n-1}(\mu_0)}{\partial \lambda} - \mu_0 \frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\partial \lambda} \right)} \frac{P_{\lambda_n}^{réel}(i\ Sinh(\eta))}{P_{\lambda_n}^{réel}(i\ Sinh(l_\eta))} P_{\lambda_n}(Cos(\theta))$$

Exemple : *Cône sphéroïdal aplati plein d'angle θ_0, en coordonnées sphéroïdales (η,θ) soumis à des conditions aux limites de Dirichlet inhomogènes en $\eta=l_\eta$ et de Robin homogènes en θ_0*

Soit le problème en transformant la condition aux limites en variable z=Cos(θ):

$$\Delta T(\eta,\theta)=0 \quad T(\eta,\theta)\ fini$$

$$T(\eta,\theta)\big|_{\eta=l_\eta}=f_\theta(Cos(\theta)) \quad z=Cos(\theta) \quad \mu_0=Cos(\theta_0)$$

$$\alpha'\,T_\theta^{'}(\eta,\theta)+\beta\,T(r,\theta)\big|_{\theta=\theta_0}=0 \Leftrightarrow \alpha\,T_z^{'}(\eta,z)+\beta\,T(r,z)\big|_{z=\mu_0}$$

La solution doit comporter les mêmes contraintes que pour les solutions sur la sphère, à savoir

$$T(\eta,\theta)\ fini$$

$$T(\eta,\theta)\ fonction\ paire\ en\ \theta\ soit\ \ T(\eta,-\theta)=T(\eta,\theta)$$

$$T(\eta,\theta)\quad ne\ comporte\ aucune\ singularité\ en\ \theta=0,\ continue\ et\ dérivable$$

On est amené à rechercher une extension des polynômes de Legendre de degré entier à des fonctions de Legendre de degré non entier λ_n $P_n(Cos(\theta))\rightarrow P_{\lambda_n}(Cos(\theta))$ *, ce qui donne la condition suivante pour établir les valeurs propres du problème de Sturm-Liouville.*

$$\mu_0=Cos(\theta_0)\,;\,\alpha\,\frac{dP_{\lambda_n}(z)}{dz}+\beta\,P_{\lambda_n}(z)\bigg|_{z=\mu_0}=0 \quad \frac{\partial P_{\lambda_n}(z)}{\partial z}=\frac{\lambda_n}{z^2-1}\left(zP_{\lambda_n}(z)-P_{\lambda_n-1}(z)\right)$$

$$\Rightarrow \alpha\,\frac{\lambda_n}{\mu_0^{\ 2}-1}\left(\mu_0 P_{\lambda_n}(\mu_0)-P_{\lambda_n-1}(\mu_0)\right)+\beta\,P_{\lambda_n}(\mu_0)=0$$

<u>Exemple</u> si l'on prend la valeur $\theta_0=\pi/2\,;\alpha=1/2\,;\beta=1/2$*, alors on trouve les 20 premières valeurs propres λ_n =1.73778, 3.85727, 5.90164, 7.92492, 9.93927, 11.949, 13.9561, 15.9614, 17.9656, 19.9689, 21.9717, 23.974, 25.976, 27.9777, 29.9791, 31.9804, 33.9815, 35.9826, 37.9835, 39.9843.*

si l'on prend la valeur $\theta_0=\pi/7\,;\alpha=1/2\,;\beta=1/2$*, alors on trouve les 20 premières valeurs propres λ_n =7.93878, 15.0781, 22.1311, 29.1591, 36.1765, 43.1882, 50.1968, 57.2032, 64.2083, 71.2123, 78.2157, 85.2185, 92.2209, 99.2229, 106.225, 113.226, 120.228, 127.229, 134.23, 141.231.*

si l'on prend la valeur $\theta_0=5\pi/6\,;\alpha=1/2\,;\beta=1/2$*, alors on trouve les 20 premières valeurs propres λ_n =1.01732, 2.21493, 3.41202, 4.60986, 5.8083, 7.00714, 8.20625, 9.40555, 10.605, 11.8045, 13.0041, 14.2038, 15.4035, 16.6033, 17.8031, 19.0029, 20.2027, 21.4026, 22.6025, 23.8023.*

En général il n'est pas nécessaire d'inclure la valeur propre 0 dans le cas où β≠0, si β=0 alors c'est une condition de Neumann homogène et la valeur propre nulle ne doit pas être oubliée. La prise en compte de la condition aux limites inhomogènes en $r=l_r$, donne donc :

$$z=Cos(\theta) \quad \mu_0=Cos(\theta_0)$$

$$B_n=\int_{\mu_0}^{1}dz\ f_\theta(z)\ P_{\lambda_n}(z) \quad \left\|P_{\lambda_n}(z)\right\|^2=\int_{\mu_0}^{1}dz\ P_{\lambda_n}(z)^2$$

$$\lambda_n \quad tq \quad \alpha\,\frac{\lambda_n}{\mu_0^{\ 2}-1}\left(\mu_0 P_{\lambda_n}(\mu_0)-P_{\lambda_n-1}(\mu_0)\right)+\beta\,P_{\lambda_n}(\mu_0)=0$$

$$T(\eta,\theta)=\sum_{n\neq 0,+\infty}\frac{B_n}{\left\|P_{\lambda_n}(z)\right\|^2}\frac{P_{\lambda_n}^{réel}(i\ Sinh(\eta))}{P_{\lambda_n}^{réel}(i\ Sinh(l_\eta))}\,P_{\lambda_n}(Cos(\theta))$$

Dans le cas particulier de notre problème le calcul des normes devient (voir section sur les coordonnées sphériques):

$$\textit{Première forme} \quad (1)$$

$$\left\|P_{\lambda_n}(z)^2\right\| = \frac{\lambda_n}{(2\lambda_n+1)}\left(-P_{\lambda_n-1}(\mu_0)\frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\partial\lambda} + \alpha\, P_{\lambda_n-1}(\mu_0)\left(\frac{\beta\left(\mu_0{}^2-1\right)P_{\lambda_n-1}(\mu_0)}{\left(\alpha\,\mu_0\lambda_n+\beta\left(\mu_0{}^2-1\right)\right)^2} + \frac{\lambda_n}{\alpha\,\mu_0\lambda_n+\beta\left(\mu_0{}^2-1\right)}\frac{\partial P_{\lambda_n-1}(\mu_0)}{\partial\lambda}\right)\right)$$

$$\textit{Deuxième forme} \quad (2)$$

$$\left\|P_{\lambda_n}(z)^2\right\| = \frac{P_{\lambda_n}(\mu_0)}{(2\lambda_n+1)}\left(\frac{\beta\left(\mu_0{}^2-1\right)P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\alpha\,\lambda_n} + \lambda_n\left(\frac{\partial P_{\lambda_n-1}(\mu_0)}{\partial\lambda} - \frac{\alpha\,\mu_0\lambda_n+\beta\left(\mu_0{}^2-1\right)}{\alpha\,\lambda_n}\frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\partial\lambda}\right)\right)$$

$$si\ \beta=1\ et\ \alpha=0 \quad C.L.\ de\ Dirichlet$$

$$\Rightarrow P_{\lambda_n}(\mu_0)=0$$

$$\left\|P_{\lambda_n}(z)^2\right\| = -\frac{\lambda_n}{2\lambda_n+1}P_{\lambda_n-1}(\mu_0)\frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\partial\lambda_n}$$

$$si\ \alpha=1\ et\ \beta=0 \quad C.L.\ de\ Neumann$$

$$P_{\lambda_n-1}(\mu_0)=\mu_0 P_{\lambda_n}(\mu_0)$$

$$\Rightarrow \left\|P_{\lambda_n}(z)^2\right\| = \frac{\lambda_n}{(2\lambda_n+1)}P_{\lambda_n}(\mu_0)\left(\frac{\partial P_{\lambda_n-1}(\mu_0)}{\partial\lambda} - \mu_0\frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\partial\lambda}\right)$$

Et la solution devient :

$$z=Cos(\theta) \quad \mu_0=Cos(\theta_0)$$

$$B_n=\int_{\mu_0}^{1}dz\ f_\theta(z)\ P_{\lambda_n}(z) \quad \left\|P_{\lambda_n}(z)\right\|^2=\int_{\mu_0}^{1}dz\ P_{\lambda_n}(z)^2$$

$$\lambda_n \quad tq \quad \alpha\frac{\lambda_n}{\mu_0{}^2-1}\left(\mu_0 P_{\lambda_n}(\mu_0)-P_{\lambda_n-1}(\mu_0)\right)+\beta\ P_{\lambda_n}(\mu_0)=0$$

$$T(\eta,\theta)=\sum_{n\neq 0,+\infty}\frac{B_n(2\lambda_n+1)\dfrac{P_{\lambda_n}^{réel}(i\ Sinh(\eta))}{P_{\lambda_n}^{réel}(i\ Sinh(l_\eta))}P_{\lambda_n}(Cos(\theta))}{\lambda_n\left(-P_{\lambda_n-1}(\mu_0)\dfrac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\partial\lambda}+\alpha\ P_{\lambda_n-1}(\mu_0)\left(\begin{array}{l}\dfrac{\beta\left(\mu_0{}^2-1\right)P_{\lambda_n-1}(\mu_0)}{\left(\alpha\,\mu_0\lambda_n+\beta\left(\mu_0{}^2-1\right)\right)^2}+\\ +\dfrac{\lambda_n}{\alpha\,\mu_0\lambda_n+\beta\left(\mu_0{}^2-1\right)}\dfrac{\partial P_{\lambda_n-1}(\mu_0)}{\partial\lambda}\end{array}\right)\right)} \quad (1)$$

ou bien

$$T(\eta,\theta)=\sum_{n\neq 0,+\infty}\frac{B_n(2\lambda_n+1)\dfrac{P_{\lambda_n}^{réel}(i\ Sinh(\eta))}{P_{\lambda_n}^{réel}(i\ Sinh(l_\eta))}P_{\lambda_n}(Cos(\theta))}{P_{\lambda_n}(\mu_0)\left(\begin{array}{l}\dfrac{\beta\left(\mu_0{}^2-1\right)P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\alpha\,\lambda_n}+\\ +\lambda_n\left(\dfrac{\partial P_{\lambda_n-1}(\mu_0)}{\partial\lambda}-\dfrac{\alpha\,\mu_0\lambda_n+\beta\left(\mu_0{}^2-1\right)}{\alpha\,\lambda_n}\dfrac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\partial\lambda}\right)\end{array}\right)} \quad (2)$$

Lorsque $f_\vartheta(\vartheta)=1$, on obtient alors :

$$z = Cos(\theta) \quad \mu_0 = Cos(\theta_0)$$

$$B_n = \int_{\mu_0}^{1} dz\ P_{\lambda_n}(z) = \frac{1}{2\lambda_n+1}\left(P_{\lambda_n-1}(\mu_0) - P_{\lambda_n+1}(\mu_0)\right) \Rightarrow (2\lambda_n+1)B_n = \left(P_{\lambda_n-1}(\mu_0) - P_{\lambda_n+1}(\mu_0)\right)$$

$$\lambda_n \quad tq \quad \alpha\ \frac{\lambda_n}{\mu_0^{\ 2}-1}\left(\mu_0 P_{\lambda_n}(\mu_0) - P_{\lambda_n-1}(\mu_0)\right) + \beta\ P_{\lambda_n}(\mu_0) = 0$$

$$T(\eta,\theta) = \sum_{n\neq 0,+\infty} \frac{\left(P_{\lambda_n-1}(\mu_0) - P_{\lambda_n+1}(\mu_0)\right)\dfrac{P_{\lambda_n}^{réel}(i\ Sinh(\eta))}{P_{\lambda_n}^{réel}(i\ Sinh(l_\eta))}\ P_{\lambda_n}(Cos(\theta))}{\lambda_n\left(-P_{\lambda_n-1}(\mu_0)\dfrac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\partial\lambda} + \alpha\ P_{\lambda_n-1}(\mu_0)\left(\dfrac{\beta\left(\mu_0^{\ 2}-1\right)P_{\lambda_n-1}(\mu_0)}{\left(\alpha\ \mu_0\lambda_n + \beta\left(\mu_0^{\ 2}-1\right)\right)^2} + \dfrac{\lambda_n}{\alpha\ \mu_0\lambda_n + \beta\left(\mu_0^{\ 2}-1\right)}\dfrac{\partial P_{\lambda_n-1}(\mu_0)}{\partial\lambda}\right)\right)} \quad (1)$$

ou bien

$$T(\eta,\theta) = \sum_{n\neq 0,+\infty} \frac{\left(P_{\lambda_n-1}(\mu_0) - P_{\lambda_n+1}(\mu_0)\right)\dfrac{P_{\lambda_n}^{réel}(i\ Sinh(\eta))}{P_{\lambda_n}^{réel}(i\ Sinh(l_\eta))}\ P_{\lambda_n}(Cos(\theta))}{P_{\lambda_n}(\mu_0)\left(\dfrac{\beta\left(\mu_0^{\ 2}-1\right)P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\alpha\ \lambda_n} + \lambda_n\left(\dfrac{\partial P_{\lambda_n-1}(\mu_0)}{\partial\lambda} - \dfrac{\alpha\ \mu_0\lambda_n + \beta\left(\mu_0^{\ 2}-1\right)}{\alpha\ \lambda_n}\dfrac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\partial\lambda}\right)\right)} \quad (2)$$

<u>Etude des cas limites α=1, β=0 (homogène Neumann) et α=0, β=1 (homogène Dirichlet)</u>

Pour ce qui est du passage à la limite α->0, β->1, la forme (1) donne directement la solution déjà énoncée précédemment :

$$z = Cos(\theta) \quad \mu_0 = Cos(\theta_0) \quad B_n = \int_{\mu_0}^{1} dz\ f_\theta(z)\ P_{\lambda_n}(z) \quad \left\|P_{\lambda_n}(z)\right\|^2 = \int_{\mu_0}^{1} dz\ P_{\lambda_n}(z)^2 \quad \lambda_n \quad tq\ P_{\lambda_n}(\mu_0) = 0$$

$$T(\eta,\theta) = \sum_{n\neq 0,+\infty} -\frac{(2\lambda_n+1)}{\lambda_n} B_n \frac{\dfrac{P_{\lambda_n}^{réel}(i\ Sinh(\eta))}{P_{\lambda_n}^{réel}(i\ Sinh(l_\eta))}\ P_{\lambda_n}(Cos(\theta))}{P_{\lambda_n-1}(\mu_0)\dfrac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\partial\lambda}}$$

.

Pour le passage à la limite α->1, β->0, la forme (2) donne également la solution déjà énoncée précédemment :

$$z = Cos(\theta) \quad \mu_0 = Cos(\theta_0)$$

$$B_n = \int_{\mu_0}^{1} dz\ f_\theta(z)\ P_{\lambda_n}(z) \quad \left\|P_{\lambda_n}(z)\right\|^2 = \int_{\mu_0}^{1} dz\ P_{\lambda_n}(z)^2$$

$$\lambda_n \quad tq \quad \frac{\lambda_n}{\mu_0^{\ 2}-1}\left(\mu_0 P_{\lambda_n}(\mu_0) - P_{\lambda_n-1}(\mu_0)\right) \quad soit \quad \lambda_n = 0 \quad ou \quad \mu_0 P_{\lambda_n}(\mu_0) = P_{\lambda_n-1}(\mu_0)$$

$$Pour \quad \lambda_n > 0 \Rightarrow terme\ identique\ cas\ Neumann$$

$$Pour \quad \lambda_n = 0 \Rightarrow B_n = \int_{\mu_0}^{1} dz\ f_\theta(z) \quad \left\|P_0(z)\right\|^2 = 1-\mu_0$$

$$T(\eta,\theta) = \frac{B_0}{1-\mu_0} + \sum_{n\neq 0,+\infty} \frac{(2\lambda_n+1)}{\lambda_n} \frac{B_n\ \dfrac{P_{\lambda_n}^{réel}(i\ Sinh(\eta))}{P_{\lambda_n}^{réel}(i\ Sinh(l_\eta))}\ P_{\lambda_n}(Cos(\theta))}{P_{\lambda_n}(\mu_0)\left(\dfrac{\partial P_{\lambda_n-1}(\mu_0)}{\partial\lambda} - \mu_0\dfrac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\partial\lambda}\right)}$$

Exemple : *"Cône" sphéroïdal aplati creux d'angle θ_0, en coordonnées sphéroïdales aplaties (η,θ) soumis à des conditions aux limites de Dirichlet homogènes en $\eta=l_{\eta 1}$, inhomogènes en $\eta=l_{\eta 2}$. et de Robin homogènes en θ_0*

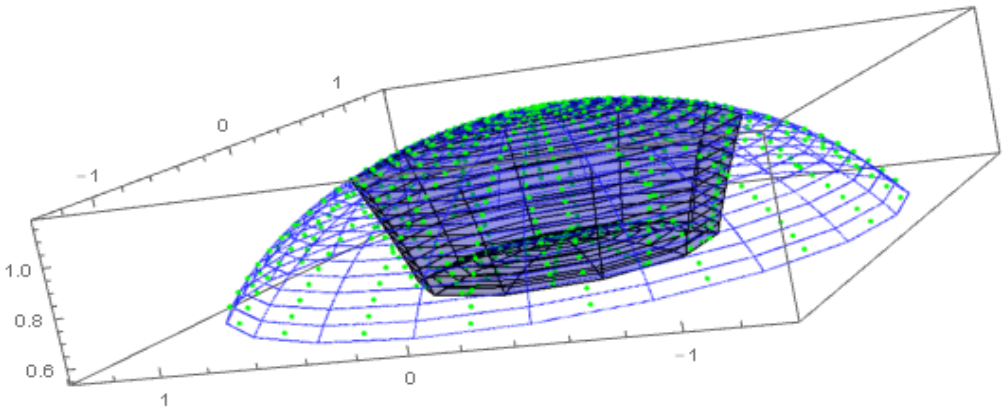
Soit le problème :

$$\Delta T(r,\theta)=0$$

$$T(\eta,\theta)\big|_{r=l_{r1}}=0 \quad T(r,\eta)\ fini \quad z=Cos(\theta)\ et\ \mu_0=Cos(\theta_0)$$

$$T(\eta,\theta)\big|_{r=l_{r2}}=f_\theta(Cos(\theta))$$

$$\alpha' T_\theta^{'}(\eta,\theta)+\beta\, T(\eta,\theta)\big|_{\theta=\theta_0}=0 \Leftrightarrow \alpha\, T_z^{'}(\eta,z)+\beta\, T(\eta,z)\big|_{z=\mu_0}=0$$



Comme nous l'avons dit, la partie radiale n'est en général ni purement réelle, ni purement imaginaire, à l'instar des indices entiers, et dans ce cas, on peut par convention prendre l'une ou l'autre des parties réelles ou imaginaires des fonctions de première et deuxième espèce, étant entendu que les deux combinaisons linéaires *demeurent bien solutions de l'équation séparée radiale avec le changement η->-η. Toutefois, il y a dépendance entre les parties réelles et imaginaires des fonctions de première espèce et deuxième espèce, comme il a été établi précédemment :*

$$\begin{cases} Q_{\lambda_n}^{réel}(i\ Sinh(\eta))=-\dfrac{\pi Tan\left(\dfrac{\lambda_n\pi}{2}\right)}{2}P_{\lambda_n}^{réel}(i\ Sinh(\eta)) \\ Q_{\lambda_n}^{imag}(i\ Sinh(\eta))=\dfrac{\pi Cotan\left(\dfrac{\lambda_n\pi}{2}\right)}{2}P_{\lambda_n}^{imag}(i\ Sinh(\eta)) \end{cases}.$$

Ainsi si l'on fait le choix d'une partie réelle de fonction de première espèce, il faut alors choisir la partie imaginaire de la fonction de deuxième espèce (ou de première espèce indifféremment). Par la symétrie du miroir les fonctions s'expriment comme suit :

$$Symétrie\ du\ mirroir \quad P_{\lambda_n}(\bar{z})=\overline{P_{\lambda_n}(z)} \quad Q_{\lambda_n}(\bar{z})=\overline{Q_{\lambda_n}(z)}$$

$$\Rightarrow P_{\lambda_n}^{réel}(i\ Sinh(\eta))=\frac{P_{\lambda_n}(i\ Sinh(\eta))+\overline{P_{\lambda_n}(i\ Sinh(\eta))}}{2}=\frac{P_{\lambda_n}(i\ Sinh(\eta))+P_{\lambda_n}(-i\ Sinh(\eta))}{2}$$

$$\Rightarrow Q_{\lambda_n}^{imag}(i\ Sinh(\eta))=\frac{Q_{\lambda_n}(i\ Sinh(\eta))-\overline{Q_{\lambda_n}(i\ Sinh(\eta))}}{2i}=\frac{Q_{\lambda_n}(i\ Sinh(\eta))-Q_{\lambda_n}(-i\ Sinh(\eta))}{2i}.$$

Il faut ensuite tenir compte du changement de la partie radiale des solutions qui possèdent les formes suivantes, sachant que pour des valeurs quelconques des paramètres α,β la valeur propre nulle n'intervient pas en général (sauf pour le problème de Neumann α=1,β=0) :

Valeur propre n

$$T(\eta,\theta)\big|_{\eta=l_{\eta 1}}=0 \Rightarrow partie\ radiale \propto \left(\frac{P_{\lambda_n}^{réel}\left(i\ Sinh(\eta)\right)}{P_{\lambda_n}^{réel}\left(i\ Sinh(l_{\eta 1})\right)}-\frac{Q_{\lambda_n}^{imag}\left(i\ Sinh(\eta)\right)}{Q_{\lambda_n}^{imag}\left(i\ Sinh(l_{\eta 1})\right)}\right)$$

Valeur propre 0

$$T(\eta,\theta)\big|_{\eta=l_{\eta 1}}=0 \Rightarrow partie\ radiale \propto Arctan\left(Sinh(\eta)\right)-Arctan\left(Sinh(l_{\eta 1})\right)$$

En suivant la suite de calcul effectué dans l'exemple précédent, on trouve la solution suivante, exprimée sous deux formes :

$$z=Cos(\theta) \quad \mu_0=Cos(\theta_0) \quad B_n=\int_{\mu_0}^{1} dz\ f_\theta(z)\ P_{\lambda_n}(z) \quad \left\|P_{\lambda_n}(z)\right\|^2=\int_{\mu_0}^{1} dz\ P_{\lambda_n}(z)^2$$

$$\lambda_n \quad tq \quad \alpha\ \frac{\lambda_n}{\mu_0^{\ 2}-1}\left(\mu_0 P_{\lambda_n}(\mu_0)-P_{\lambda_n-1}(\mu_0)\right)+\beta\ P_{\lambda_n}(\mu_0)=0$$

$$T(\eta,\theta)=\sum_{n\neq 0,+\infty}\frac{B_n(2\lambda_n+1)\dfrac{\left(\dfrac{P_{\lambda_n}^{réel}\left(i\ Sinh(\eta)\right)}{P_{\lambda_n}^{réel}\left(i\ Sinh(l_{\eta 1})\right)}-\dfrac{Q_{\lambda_n}^{imag}\left(i\ Sinh(\eta)\right)}{Q_{\lambda_n}^{imag}\left(i\ Sinh(l_{\eta 1})\right)}\right)}{\left(\dfrac{P_{\lambda_n}^{réel}\left(i\ Sinh(l_{\eta 2})\right)}{P_{\lambda_n}^{réel}\left(i\ Sinh(l_{\eta 1})\right)}-\dfrac{Q_{\lambda_n}^{imag}\left(i\ Sinh(l_{\eta 2})\right)}{Q_{\lambda_n}^{imag}\left(i\ Sinh(l_{\eta 1})\right)}\right)}\ P_{\lambda_n}\left(Cos(\theta)\right)}{\lambda_n\left(-P_{\lambda_n-1}(\mu_0)\dfrac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\partial\lambda}+\alpha\ P_{\lambda_n-1}(\mu_0)\left(\begin{array}{l}\dfrac{\beta\left(\mu_0^{\ 2}-1\right)P_{\lambda_n-1}(\mu_0)}{\left(\alpha\ \mu_0\lambda_n+\beta\left(\mu_0^{\ 2}-1\right)\right)^2}+\\ +\dfrac{\lambda_n}{\alpha\ \mu_0\lambda_n+\beta\left(\mu_0^{\ 2}-1\right)}\dfrac{\partial P_{\lambda_n-1}(\mu_0)}{\partial\lambda}\end{array}\right)\right)} \quad (1)$$

ou bien

$$T(\eta,\theta)=\sum_{n\neq 0,+\infty}\frac{B_n(2\lambda_n+1)\dfrac{\left(\dfrac{P_{\lambda_n}^{réel}\left(i\ Sinh(\eta)\right)}{P_{\lambda_n}^{réel}\left(i\ Sinh(l_{\eta 1})\right)}-\dfrac{Q_{\lambda_n}^{imag}\left(i\ Sinh(\eta)\right)}{Q_{\lambda_n}^{imag}\left(i\ Sinh(l_{\eta 1})\right)}\right)}{\left(\dfrac{P_{\lambda_n}^{réel}\left(i\ Sinh(l_{\eta 2})\right)}{P_{\lambda_n}^{réel}\left(i\ Sinh(l_{\eta 1})\right)}-\dfrac{Q_{\lambda_n}^{imag}\left(i\ Sinh(l_{\eta 2})\right)}{Q_{\lambda_n}^{imag}\left(i\ Sinh(l_{\eta 1})\right)}\right)}\ P_{\lambda_n}\left(Cos(\theta)\right)}{P_{\lambda_n}(\mu_0)\left(\dfrac{\beta\left(\mu_0^{\ 2}-1\right)P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\alpha\ \lambda_n}+\lambda_n\left(\dfrac{\partial P_{\lambda_n-1}(\mu_0)}{\partial\lambda}-\dfrac{\alpha\ \mu_0\lambda_n+\beta\left(\mu_0^{\ 2}-1\right)}{\alpha\ \lambda_n}\dfrac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\partial\lambda}\right)\right)} \quad (2)$$

.

Lorsque $f_\vartheta(\vartheta)=1$, on obtient alors :

$$z = Cos(\theta) \quad \mu_0 = Cos(\theta_0)$$

$$B_n = \int_{\mu_0}^{1} dz\ P_{\lambda_n}(z) = \frac{1}{2\lambda_n+1}\left(P_{\lambda_n-1}(\mu_0) - P_{\lambda_n+1}(\mu_0)\right) \Rightarrow (2\lambda_n+1)B_n = \left(P_{\lambda_n-1}(\mu_0) - P_{\lambda_n+1}(\mu_0)\right)$$

$$\lambda_n \quad tq \quad \alpha\ \frac{\lambda_n}{\mu_0^{\ 2}-1}\left(\mu_0 P_{\lambda_n}(\mu_0) - P_{\lambda_n-1}(\mu_0)\right) + \beta\ P_{\lambda_n}(\mu_0) = 0$$

$$T(\eta,\theta) = \sum_{n\neq 0,+\infty} \frac{\left(P_{\lambda_n-1}(\mu_0) - P_{\lambda_n+1}(\mu_0)\right)\dfrac{\left(\dfrac{P_{\lambda_n}^{réel}\left(i\ Sinh(\eta)\right)}{P_{\lambda_n}^{réel}\left(i\ Sinh(l_{\eta 1})\right)} - \dfrac{Q_{\lambda_n}^{imag}\left(i\ Sinh(\eta)\right)}{Q_{\lambda_n}^{imag}\left(i\ Sinh(l_{\eta 1})\right)}\right)}{\left(\dfrac{P_{\lambda_n}^{réel}\left(i\ Sinh(l_{\eta 2})\right)}{P_{\lambda_n}^{réel}\left(i\ Sinh(l_{\eta 1})\right)} - \dfrac{Q_{\lambda_n}^{imag}\left(i\ Sinh(l_{\eta 2})\right)}{Q_{\lambda_n}^{imag}\left(i\ Sinh(l_{\eta 1})\right)}\right)} P_{\lambda_n}\left(Cos(\theta)\right)}{\lambda_n\left(-P_{\lambda_n-1}(\mu_0)\dfrac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\partial\lambda} + \alpha\ P_{\lambda_n-1}(\mu_0)\left(\begin{array}{l}\dfrac{\beta\left(\mu_0^{\ 2}-1\right)P_{\lambda_n-1}(\mu_0)}{\left(\alpha\ \mu_0\lambda_n + \beta\left(\mu_0^{\ 2}-1\right)\right)^2} + \\ + \dfrac{\lambda_n}{\alpha\ \mu_0\lambda_n + \beta\left(\mu_0^{\ 2}-1\right)}\dfrac{\partial P_{\lambda_n-1}(\mu_0)}{\partial\lambda}\end{array}\right)\right)} \quad (1)$$

ou bien

$$T(\eta,\theta) = \sum_{n\neq 0,+\infty} \frac{\left(P_{\lambda_n-1}(\mu_0) - P_{\lambda_n+1}(\mu_0)\right)\dfrac{\left(\dfrac{P_{\lambda_n}^{réel}\left(i\ Sinh(\eta)\right)}{P_{\lambda_n}^{réel}\left(i\ Sinh(l_{\eta 1})\right)} - \dfrac{Q_{\lambda_n}^{imag}\left(i\ Sinh(\eta)\right)}{Q_{\lambda_n}^{imag}\left(i\ Sinh(l_{\eta 1})\right)}\right)}{\left(\dfrac{P_{\lambda_n}^{réel}\left(i\ Sinh(l_{\eta 2})\right)}{P_{\lambda_n}^{réel}\left(i\ Sinh(l_{\eta 1})\right)} - \dfrac{Q_{\lambda_n}^{imag}\left(i\ Sinh(l_{\eta 2})\right)}{Q_{\lambda_n}^{imag}\left(i\ Sinh(l_{\eta 1})\right)}\right)} P_{\lambda_n}\left(Cos(\theta)\right)}{P_{\lambda_n}(\mu_0)\left(\dfrac{\beta\left(\mu_0^{\ 2}-1\right)P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\alpha\ \lambda_n} + \lambda_n\left(\dfrac{\partial P_{\lambda_n-1}(\mu_0)}{\partial\lambda} - \dfrac{\alpha\ \mu_0\lambda_n + \beta\left(\mu_0^{\ 2}-1\right)}{\alpha\ \lambda_n}\dfrac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\partial\lambda}\right)\right)} \quad (2)$$

<u>Etude des cas limites α=1, β=0 (homogène Neumann) et α=0, β=1 (homogène Dirichlet)</u>

Pour ce qui est du passage à la limite α->0, β->1 (Dirichlet), la forme (1) donne directement la solution déjà énoncée précédemment :

$$z = Cos(\theta) \quad \mu_0 = Cos(\theta_0)$$

$$B_n = \int_{\mu_0}^{1} dz\ f_\theta(z)\ P_{\lambda_n}(z) \quad \left\|P_{\lambda_n}(z)\right\|^2 = \int_{\mu_0}^{1} dz\ P_{\lambda_n}(z)^2$$

$$\lambda_n \quad tq\ P_{\lambda_n}(\mu_0) = 0$$

$$T(\eta,\theta) = \sum_{n\neq 0,+\infty} -\frac{(2\lambda_n+1)}{\lambda_n} B_n \frac{\left(\dfrac{P_{\lambda_n}^{réel}\left(i\ Sinh(\eta)\right)}{P_{\lambda_n}^{réel}\left(i\ Sinh(l_{\eta 1})\right)} - \dfrac{Q_{\lambda_n}^{imag}\left(i\ Sinh(\eta)\right)}{Q_{\lambda_n}^{imag}\left(i\ Sinh(l_{\eta 1})\right)}\right)}{\left(\dfrac{P_{\lambda_n}^{réel}\left(i\ Sinh(l_{\eta 2})\right)}{P_{\lambda_n}^{réel}\left(i\ Sinh(l_{\eta 1})\right)} - \dfrac{Q_{\lambda_n}^{imag}\left(i\ Sinh(l_{\eta 2})\right)}{Q_{\lambda_n}^{imag}\left(i\ Sinh(l_{\eta 1})\right)}\right)} \frac{P_{\lambda_n}\left(Cos(\theta)\right)}{P_{\lambda_n-1}(\mu_0)\dfrac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\partial\lambda}}$$

Pour le passage à la limite α->1, β->0, la forme (2) donne également la solution déjà énoncée précédemment (en y ajoutant la valeur propre nulle car la condition homogène est de Neumann) :

$z = Cos(\theta) \quad \mu_0 = Cos(\theta_0)$

$$\lambda_n \quad tq \quad \frac{\lambda_n}{\mu_0^{\ 2}-1}\left(\mu_0 P_{\lambda_n}(\mu_0) - P_{\lambda_n-1}(\mu_0)\right) = 0 \Rightarrow \lambda_n = 0 \quad ou \quad \mu_0 P_{\lambda_n}(\mu_0) = P_{\lambda_n-1}(\mu_0)$$

$$On\ rajoute\ la\ solution\ \lambda_n = 0 \Rightarrow B_0 = \int_{\mu_0}^{1} dz\ f_\theta(z) \quad et \quad \left\|P_0(z)\right\|^2 = \int_{\mu_0}^{1} dz\ = 1-\mu_0$$

$$\lambda_n > 0 \Rightarrow B_n = \int_{\mu_0}^{1} dz\ f_\theta(z)\ P_{\lambda_n}(z) \quad et \quad \left\|P_{\lambda_n}(z)^2\right\| = \frac{\lambda_n P_{\lambda_n}(\mu_0)}{(2\lambda_n+1)}\left(\frac{\partial P_{\lambda_n-1}(\mu_0)}{\partial\lambda} - \mu_0\frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\partial\lambda}\right)$$

$$T(r,\theta) = \frac{B_0}{1-\mu_0}\left(\frac{Arctan(Sinh(\eta)) - Arctan(Sinh(l_{\eta 1}))}{Arctan(Sinh(l_{\eta 2})) - Arctan(Sinh(l_{\eta 1}))}\right)$$

$$+\sum_{n\neq 0,+\infty} \frac{(2\lambda_n+1)B_n \dfrac{\left(\dfrac{P_{\lambda_n}^{réel}(i\ Sinh(\eta))}{P_{\lambda_n}^{réel}(i\ Sinh(l_{\eta 1}))} - \dfrac{Q_{\lambda_n}^{imag}(i\ Sinh(\eta))}{Q_{\lambda_n}^{imag}(i\ Sinh(l_{\eta 1}))}\right)}{\left(\dfrac{P_{\lambda_n}^{réel}(i\ Sinh(l_{\eta 2}))}{P_{\lambda_n}^{réel}(i\ Sinh(l_{\eta 1}))} - \dfrac{Q_{\lambda_n}^{imag}(i\ Sinh(l_{\eta 2}))}{Q_{\lambda_n}^{imag}(i\ Sinh(l_{\eta 1}))}\right)} P_{\lambda_n}(Cos(\theta))}{\lambda_n P_{\lambda_n}(\mu_0)\left(\dfrac{\partial P_{\lambda_n-1}(\mu_0)}{\partial\lambda} - \mu_0\dfrac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\partial\lambda}\right)} \qquad (2)$$

Exemple : *Section sphéroïdale aplatie pleine entre les angles θ_1,θ_2, en coordonnées sphéroïdales aplaties (η,θ) soumise à des conditions aux limites de Dirichlet inhomogènes en* r=l_r. homogènes en *θ_1 et θ_2*

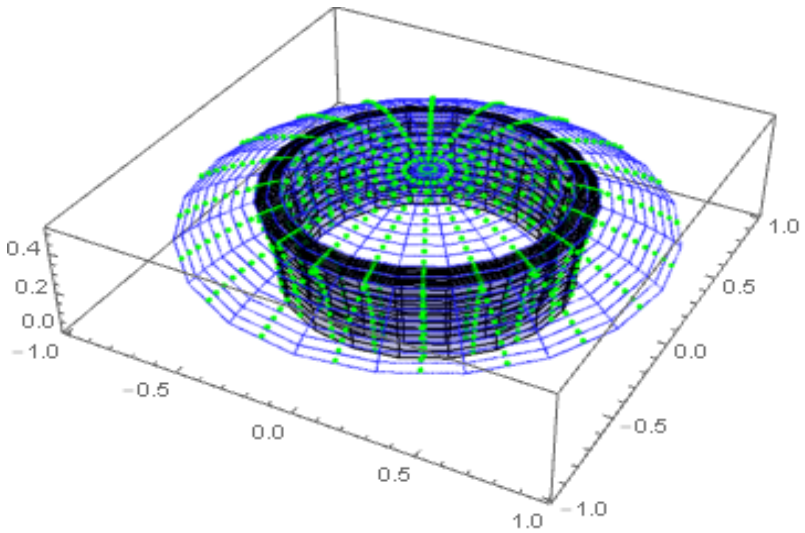
Soit le problème :

$\Delta T(\eta,\theta) = 0 \quad T(\eta,\theta)\ fini$

$T(\eta,\theta)\big|_{\eta=l_\eta} = f_\theta(Cos(\theta))$

$T(\eta,\theta)\big|_{\theta=\theta_1} = 0$

$T(\eta,\theta)\big|_{\theta=\theta_2} = 0$



La solution doit comporter les mêmes contraintes que pour les solutions sur la sphère, à savoir

$T(\eta,\theta)\ fini$

$T(\eta,\theta)\ fonction\ paire\ en\ \theta\ soit\ \ T(\eta,-\theta)=T(\eta,\theta)$

$T(\eta,\theta)\quad ne\ comporte\ aucune\ singularité,\ doit\ être\ continue\ et\ dérivable$

Par construction on utilise les fonctions radiales :

$Symétrie\ du\ mirroir$

$$P_{\lambda_n}(\bar{z})=\overline{P_{\lambda_n}(z)}$$

$$\Rightarrow P_{\lambda_n}^{réel}(i\ Sinh(\eta))=\frac{P_{\lambda_n}(i\ Sinh(\eta))+\overline{P_{\lambda_n}(i\ Sinh(\eta))}}{2}=\frac{P_{\lambda_n}(i\ Sinh(\eta))+P_{\lambda_n}(-i\ Sinh(\eta))}{2}$$

Pour respecter la condition aux limites

$$T(\eta,\theta)\big|_{\theta=\theta_1}=0$$

$$T(\eta,\theta)\big|_{\theta=\theta_2}=0,$$

on est amené à rechercher une extension des polynômes de Legendre de degré entier à des fonctions de Legendre de degré non entier λ_n $P_n(Cos(\theta))\to P_{\lambda_n}(Cos(\theta))$*, ainsi que des fonctions de Legendre de deuxième espèce :* $Q_n(Cos(\theta))\to Q_{\lambda_n}(Cos(\theta))$*. En respectant la contrainte de régularité du gradient et par principe de superposition on recherche la solution sous la forme d'une série :*

$$T(\eta,\theta)=\sum_{n\neq 0,+\infty}P_{\lambda_n}^{réel}(i\ Sinh(\eta))\Big(C_nP_{\lambda_n}(Cos(\theta))+D_nQ_{\lambda_n}(Cos(\theta))\Big)$$

$$T(\eta,\theta)\big|_{\theta=\theta_2}=0\Rightarrow C_nP_{\lambda_n}(Cos(\theta_2))+D_nQ_{\lambda_n}(Cos(\theta_2))=0\Rightarrow D_n=-C_n\frac{P_{\lambda_n}(Cos(\theta_2))}{Q_{\lambda_n}(Cos(\theta_2))}$$

$$\Rightarrow T(\eta,\theta)\propto\sum_{n\neq 0,+\infty}P_{\lambda_n}^{réel}(i\ Sinh(\eta))C_n\left(\frac{P_{\lambda_n}(Cos(\theta))}{P_{\lambda_n}(Cos(\theta_2))}-\frac{Q_{\lambda_n}(Cos(\theta))}{Q_{\lambda_n}(Cos(\theta_2))}\right)$$

$$T(\eta,\theta)\big|_{\theta=\theta_1}=0\Rightarrow\sum_{n\neq 0,+\infty}P_{\lambda_n}^{réel}(i\ Sinh(\eta))C_n\left(\frac{P_{\lambda_n}(Cos(\theta_1))}{P_{\lambda_n}(Cos(\theta_2))}-\frac{Q_{\lambda_n}(Cos(\theta_1))}{Q_{\lambda_n}(Cos(\theta_2))}\right)=0$$

$$\lambda_n\quad tq\quad\frac{P_{\lambda_n}(Cos(\theta_1))}{P_{\lambda_n}(Cos(\theta_2))}=\frac{Q_{\lambda_n}(Cos(\theta_1))}{Q_{\lambda_n}(Cos(\theta_2))}$$

$Comme\ \theta_2>\theta_1\Rightarrow Cos(\theta_2)<Cos(\theta_1)$

$on\ pose\ \mu_1=Cos(\theta_2)\ et\ \mu_2=Cos(\theta_1)\ de\ telle\ manière\ que\ \mu_1<\mu_2$

$$\lambda_n\quad tq\quad\frac{P_{\lambda_n}(\mu_2)}{P_{\lambda_n}(\mu_1)}=\frac{Q_{\lambda_n}(\mu_2)}{Q_{\lambda_n}(\mu_1)}$$

$$\Phi_{\lambda_n}(Cos(\theta))=\frac{P_{\lambda_n}(Cos(\theta))}{P_{\lambda_n}(Cos(\theta_2))}-\frac{Q_{\lambda_n}(Cos(\theta))}{Q_{\lambda_n}(Cos(\theta_2))}\quad et\ z=Cos(\theta)\quad\Phi_{\lambda_n}(z)=\frac{P_{\lambda_n}(z)}{P_{\lambda_n}(\mu_1)}-\frac{Q_{\lambda_n}(z)}{Q_{\lambda_n}(\mu_1)}$$

$$\left\|\Phi_{\lambda_n}(Cos(\theta))\right\|^2=\int_{\theta_1}^{\theta_2}d\theta\ Sin(\theta)\Big(\Phi_{\lambda_n}(Cos(\theta))\Big)^2=-\int_{\mu_2}^{\mu_1}dz\Big(\Phi_{\lambda_n}(z)\Big)^2=\int_{\mu_1}^{\mu_2}dz\Big(\Phi_{\lambda_n}(z)\Big)^2=\left\|\Phi_{\lambda_n}(z)\right\|^2$$

.

Exemple

si l'on prend l'angle $\theta_1 = \pi/7 \quad \theta_2 = 6\pi/7$*, alors les 10 premières valeurs propres* λ_n = `0.785441, 2.23009, 3.64994, 5.06115, 6.46833, 7.8733, 9.27695, 10.6797, 12.0819, 13.4837`

si l'on prend l'angle $\theta_1 = \pi/7 \quad \theta_2 = 5\pi/14$*, alors les 10 premières valeurs propres* λ_n = `4.1092, 8.80259, 13.4792, 18.1509, 22.8207, 27.4895, 32.1576, 36.8254, 41.493, 46.1603`

La prise en compte de la condition aux limites inhomogènes en r=l$_r$*, donne :*

$$\mu_1 = Cos(\theta_2);\ \mu_2 = Cos(\theta_1) \quad z = Cos(\theta) \quad \Phi_n(z) = \frac{P_{\lambda_n}(z)}{P_{\lambda_n}(\mu_1)} - \frac{Q_{\lambda_n}(z)}{Q_{\lambda_n}(\mu_1)} \qquad \left\|\Phi_{\lambda_n}(z)\right\|^2 = \int_{\mu_1}^{\mu_2} dz\ \Phi_{\lambda_n}(z)^2$$

$$\lambda_n \quad tq \quad \frac{P_{\lambda_n}(\mu_2)}{P_{\lambda_n}(\mu_1)} = \frac{Q_{\lambda_n}(\mu_2)}{Q_{\lambda_n}(\mu_1)} \quad B_n = \int_{\mu_1}^{\mu_2} dz\ f_\theta(z)\, P_{\lambda_n}(z) \quad C_n = \int_{\mu_1}^{\mu_2} dz\ f_\theta(z)\, Q_{\lambda_n}(z)$$

$$\left\|\Phi_{\lambda_n}(z)\right\|^2 = \frac{\lambda_n}{(2\lambda_n+1)}\Phi_{\lambda_n-1}(\mu_2)\frac{\partial\Phi_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial\lambda} \quad \textit{voir tableau synoptique en fin de section}$$

$$\Phi_{\lambda_n-1}(\mu_1) = \frac{P_{\lambda_n-1}(\mu_1)}{P_{\lambda_n}(\mu_1)} - \frac{Q_{\lambda_n-1}(\mu_1)}{Q_{\lambda_n}(\mu_1)} \quad \Phi_{\lambda_n-1}(\mu_2) = \frac{P_{\lambda_n-1}(\mu_2)}{P_{\lambda_n}(\mu_1)} - \frac{Q_{\lambda_n-1}(\mu_2)}{Q_{\lambda_n}(\mu_1)}$$

$$\frac{\partial\Phi_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial\lambda} = \frac{1}{P_{\lambda_n}(\mu_1)}\left[\frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial\lambda} - \frac{P_{\lambda_n}(\mu_2)}{P_{\lambda_n}(\mu_1)}\frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial\lambda}\right] - \frac{1}{Q_{\lambda_n}(\mu_1)}\left[\frac{\partial Q_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial\lambda} - \frac{Q_{\lambda_n}(\mu_2)}{Q_{\lambda_n}(\mu_1)}\frac{\partial Q_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial\lambda}\right]$$

$$T(\eta,\theta) = \sum_{n\neq 0,+\infty} \frac{\left(\frac{B_n}{P_{\lambda_n}(\mu_1)} - \frac{C_n}{Q_{\lambda_n}(\mu_1)}\right)}{\left\|\Phi_{\lambda_n}(z)\right\|^2}\frac{P_{\lambda_n}^{réel}(i\ Sinh(\eta))}{P_{\lambda_n}^{réel}(i\ Sinh(l_\eta))}\left(\frac{P_{\lambda_n}(Cos(\theta))}{P_{\lambda_n}(\mu_1)} - \frac{Q_{\lambda_n}(Cos(\theta))}{Q_{\lambda_n}(\mu_1)}\right)$$

.

Lorsque la fonction limite $f_\theta(z)=1$, on a avec les formes littérales des normes des fonctions propres :

$$\Phi_n(z) = \frac{P_{\lambda_n}(z)}{P_{\lambda_n}(\mu_1)} - \frac{Q_{\lambda_n}(z)}{Q_{\lambda_n}(\mu_1)} \qquad \left\|\Phi_{\lambda_n}(z)\right\|^2 = \int_{\mu_1}^{\mu_2} dz\ \Phi_{\lambda_n}(z)^2$$

$$(1) \Rightarrow B_n' = \frac{P_{\lambda_n+1}(\mu_2) - P_{\lambda_n-1}(\mu_2) - \left(P_{\lambda_n+1}(\mu_1) - P_{\lambda_n-1}(\mu_1)\right)}{P_{\lambda_n}(\mu_1)} \quad et \quad C_n' = \frac{Q_{\lambda_n+1}(\mu_2) - Q_{\lambda_n-1}(\mu_2) - \left(Q_{\lambda_n+1}(\mu_1) - Q_{\lambda_n-1}(\mu_1)\right)}{Q_{\lambda_n}(\mu_1)}$$

$$T(r,\theta) = \sum_{n\neq 0,+\infty} \frac{(B_n' - C_n')}{(2\lambda_n+1)\left\|\Phi_{\lambda_n}(z)\right\|^2}\frac{P_{\lambda_n}^{réel}(i\ Sinh(\eta))}{P_{\lambda_n}^{réel}(i\ Sinh(l_\eta))}\left(\frac{P_{\lambda_n}(Cos(\theta))}{P_{\lambda_n}(\mu_1)} - \frac{Q_{\lambda_n}(Cos(\theta))}{Q_{\lambda_n}(\mu_1)}\right)$$

ou bien

$$(2) \Rightarrow B_n' = \frac{P_{\lambda_n-1}(\mu_1) - P_{\lambda_n-1}(\mu_2)}{P_{\lambda_n}(\mu_1)} \quad et \quad C_n' = \frac{Q_{\lambda_n-1}(\mu_1) - Q_{\lambda_n-1}(\mu_2)}{Q_{\lambda_n}(\mu_1)}$$

$$T(r,\theta) = \sum_{n\neq 0,+\infty} \frac{1}{\lambda_n}\frac{(B_n' - C_n')}{\left\|\Phi_{\lambda_n}(z)\right\|^2}\frac{P_{\lambda_n}^{réel}(i\ Sinh(\eta))}{P_{\lambda_n}^{réel}(i\ Sinh(l_\eta))}\left(\frac{P_{\lambda_n}(Cos(\theta))}{P_{\lambda_n}(\mu_1)} - \frac{Q_{\lambda_n}(Cos(\theta))}{Q_{\lambda_n}(\mu_1)}\right)$$

ou bien

$$(3) \Rightarrow B_n' = \frac{P_{\lambda_n+1}(\mu_2) - P_{\lambda_n+1}(\mu_1)}{P_{\lambda_n}(\mu_1)} \quad et \quad C_n' = \frac{Q_{\lambda_n+1}(\mu_2) - Q_{\lambda_n+1}(\mu_1)}{Q_{\lambda_n}(\mu_1)}$$

$$T(r,\theta) = \sum_{n\neq 0,+\infty} \frac{1}{(\lambda_n+1)}\frac{(B_n' - C_n')}{\left\|\Phi_{\lambda_n}(z)\right\|^2}\frac{P_{\lambda_n}^{réel}(i\ Sinh(\eta))}{P_{\lambda_n}^{réel}(i\ Sinh(l_\eta))}\left(\frac{P_{\lambda_n}(Cos(\theta))}{P_{\lambda_n}(\mu_1)} - \frac{Q_{\lambda_n}(Cos(\theta))}{Q_{\lambda_n}(\mu_1)}\right)$$

.

Exemple : *Section sphéroïdale aplatie pleine entre les angles θ_1,θ_2, en coordonnées sphéroïdales aplaties (η,θ) soumise à des conditions aux limites de Dirichlet inhomogènes en* $\eta=l_\eta$ de Neumann homogènes en θ_1 *et* θ_2

Soit le problème :

$$\Delta T(\eta,\theta)=0 \quad T(r,\theta)\ fini$$

$$T(\eta,\theta)\big|_{\eta=l_\eta}=f_\theta(Cos(\theta))\ avec\ z=Cos(\theta)$$

$$T_z^{'}(r,\theta)\big|_{\theta=\theta_1}=0 \quad T_z^{'}(r,\theta)\big|_{\theta=\theta_2}=0$$

La solution doit comporter les mêmes contraintes que pour les solutions sur la sphère, à savoir

$$T(\eta,\theta)\ fini$$

$$T(\eta,\theta)\ fonction\ paire\ en\ \theta\ soit\ \ T(\eta,-\theta)=T(\eta,\theta)$$

$$T(\eta,\theta)\quad ne\ comporte\ aucune\ singularité,\ doit\ être\ continue\ et\ dérivable$$

On est amené comme dans l'exemple précédent à rechercher une série comportant les extensions des fonctions de Legendre de première et deuxième espèce de degré entier à des degrés non entier λ_n. *Soit* $P_n(Cos(\theta))\to P_{\lambda_n}(Cos(\theta))$, $Q_n(Cos(\theta))\to Q_{\lambda_n}(Cos(\theta))$. *En respectant la contrainte de régularité du gradient et par principe de superposition on recherche la solution sous la forme:*

$$T(\eta,\theta)=\sum_{n\neq 0,+\infty}P_{\lambda_n}^{réel}(i\ Sinh(\eta))\Big(C_nP_{\lambda_n}(Cos(\theta))+D_nQ_{\lambda_n}(Cos(\theta))\Big)\quad Comme\ \theta_2>\theta_1\Rightarrow Cos(\theta_2)<Cos(\theta_1)$$

$$on\ pose\ \mu_1=Cos(\theta_2)\ et\ \mu_2=Cos(\theta_1)\ de\ telle\ manière\ que\ \mu_1<\mu_2$$

$$P_{\lambda_n}^{'}(\mu_1)=\frac{\lambda_n}{\mu_1^{\ 2}-1}\Big(\mu_1P_{\lambda_n}(\mu_1)-P_{\lambda_n-1}(\mu_1)\Big)\quad P_{\lambda_n}^{'}(\mu_2)=\frac{\lambda_n}{\mu_2^{\ 2}-1}\Big(\mu_2P_{\lambda_n}(\mu_2)-P_{\lambda_n-1}(\mu_2)\Big)$$

$$Q_{\lambda_n}^{'}(\mu_1)=\frac{\lambda_n}{\mu_1^{\ 2}-1}\Big(\mu_1Q_{\lambda_n}(\mu_1)-Q_{\lambda_n-1}(\mu_1)\Big)\quad Q_{\lambda_n}^{'}(\mu_2)=\frac{\lambda_n}{\mu_2^{\ 2}-1}\Big(\mu_2Q_{\lambda_n}(\mu_2)-Q_{\lambda_n-1}(\mu_2)\Big)$$

$$T_z^{'}(r,z)\big|_{z=\mu_1}=0\Rightarrow C_n\frac{\lambda_n}{\mu_1^{\ 2}-1}\Big(\mu_1P_{\lambda_n}(\mu_1)-P_{\lambda_n-1}(\mu_1)\Big)+D_n\frac{\lambda_n}{\mu_1^{\ 2}-1}\Big(\mu_1Q_{\lambda_n}(\mu_1)-Q_{\lambda_n-1}(\mu_1)\Big)=0$$

$$\Rightarrow D_n=-C_n\frac{\Big(\mu_1P_{\lambda_n}(\mu_1)-P_{\lambda_n-1}(\mu_1)\Big)}{\Big(\mu_1Q_{\lambda_n}(\mu_1)-Q_{\lambda_n-1}(\mu_1)\Big)}$$

$$T(\eta,z)\propto\sum_{n\neq 0,+\infty}P_{\lambda_n}^{réel}(i\ Sinh(\eta))C_n\left(\frac{P_{\lambda_n}(z)}{P_{\lambda_n}^{'}(\mu_1)}-\frac{Q_{\lambda_n}(z)}{Q_{\lambda_n}^{'}(\mu_1)}\right)$$

$$T(\eta,z)\big|_{z=\mu_2}=0\Rightarrow\sum_{n\neq 0,+\infty}P_{\lambda_n}^{réel}(i\ Sinh(\eta))C_n\frac{\lambda_n}{\mu_2^{\ 2}-1}\left(\frac{\Big(\mu_2P_{\lambda_n}(\mu_2)-P_{\lambda_n-1}(\mu_2)\Big)}{\Big(\mu_1P_{\lambda_n}(\mu_1)-P_{\lambda_n-1}(\mu_1)\Big)}-\frac{\Big(\mu_2Q_{\lambda_n}(\mu_2)-Q_{\lambda_n-1}(\mu_2)\Big)}{\Big(\mu_1Q_{\lambda_n}(\mu_1)-Q_{\lambda_n-1}(\mu_1)\Big)}\right)=0$$

$$soit\ \lambda_n\quad tq\quad \lambda_n=0\quad ou\quad \frac{\Big(\mu_2P_{\lambda_n}(\mu_2)-P_{\lambda_n-1}(\mu_2)\Big)}{\Big(\mu_1P_{\lambda_n}(\mu_1)-P_{\lambda_n-1}(\mu_1)\Big)}=\frac{\Big(\mu_2Q_{\lambda_n}(\mu_2)-Q_{\lambda_n-1}(\mu_2)\Big)}{\Big(\mu_1Q_{\lambda_n}(\mu_1)-Q_{\lambda_n-1}(\mu_1)\Big)}$$

$$ou\ encore\quad \frac{P_{\lambda_n}^{'}(\mu_2)}{P_{\lambda_n}^{'}(\mu_1)}=\frac{Q_{\lambda_n}^{'}(\mu_2)}{Q_{\lambda_n}^{'}(\mu_1)}$$

$$\Phi_{\lambda_n}(z)=\frac{P_{\lambda_n}(z)}{P_{\lambda_n}^{'}(\mu_1)}-\frac{Q_{\lambda_n}(z)}{Q_{\lambda_n}^{'}(\mu_1)}\quad \Big\|\Phi_{\lambda_n}(z)\Big\|^2=\int_{\mu_1}^{\mu_2}dz\,\Phi_{\lambda_n}(z)^2$$

<u>*Exemple*</u>

si l'on prend l'angle $\theta_1 = \pi/7 \quad \theta_2 = \pi/2 - \theta_1 = 5\pi/14$*, alors les 20 premières valeurs propres* λ_n *=* `4.33461, 8.92499, 13.5624, 18.2138, 22.8712, 27.5316, 32.1938, 36.8571, 41.5211, 46.1857, 50.8506, 55.5158, 60.1813, 64.8469, 69.5127, 74.1786, 78.8445, 83.5106, 88.1767, 92.8428`

si l'on prend l'angle $\theta_1 = \pi/7 \quad \theta_2 = \pi - \theta_1 = 6\pi/7$*, alors les 20 premières valeurs propres* λ_n *=* `1.19646, 2.49885, 3.8465, 5.21496, 6.59421, 7.97964, 9.36888, 10.7606, 12.1541, 13.5489, 14.9445, 16.3409, 17.7378, 19.1352, 20.5328, 21.9308, 23.329, 24.7274, 26.126, 27.5247`

si l'on prend l'angle $\theta_1 = \pi/14 \quad \theta_2 = 3\pi/7$*, alors les 20 premières valeurs propres* λ_n *=* `2.60589, 5.30231, 8.04798, 10.8157, 13.5946, 16.3799, 19.1691, 21.9608, 24.7542, 27.5489, 30.3446, 33.1409, 35.9378, 38.7352, 41.5329, 44.3308, 47.129, 49.9274, 52.726, 55.5247`

La prise en compte de la condition aux limites inhomogènes en r=l_r, donne la solution du problème (sans oublier la solution de valeur propre nulle) :

$$z = Cos(\theta) \quad \mu_1 = Cos(\theta_2);\ \mu_2 = Cos(\theta_1)$$

$$\lambda_n \quad tq \quad \lambda_n = 0 \quad ou \quad \frac{\left(\mu_2 P_{\lambda_n}(\mu_2) - P_{\lambda_n - 1}(\mu_2)\right)}{\left(\mu_1 P_{\lambda_n}(\mu_1) - P_{\lambda_n - 1}(\mu_1)\right)} = \frac{\left(\mu_2 Q_{\lambda_n}(\mu_2) - Q_{\lambda_n - 1}(\mu_2)\right)}{\left(\mu_1 Q_{\lambda_n}(\mu_1) - Q_{\lambda_n - 1}(\mu_1)\right)}$$

$$P'_{\lambda_n}(\mu_1) = \frac{\lambda_n}{\mu_1^2 - 1}\left(\mu_1 P_{\lambda_n}(\mu_1) - P_{\lambda_n - 1}(\mu_1)\right) \quad P'_{\lambda_n}(\mu_2) = \frac{\lambda_n}{\mu_2^2 - 1}\left(\mu_2 P_{\lambda_n}(\mu_2) - P_{\lambda_n - 1}(\mu_2)\right)$$

$$Q'_{\lambda_n}(\mu_1) = \frac{\lambda_n}{\mu_1^2 - 1}\left(\mu_1 Q_{\lambda_n}(\mu_1) - Q_{\lambda_n - 1}(\mu_1)\right) \quad Q'_{\lambda_n}(\mu_2) = \frac{\lambda_n}{\mu_2^2 - 1}\left(\mu_2 Q_{\lambda_n}(\mu_2) - Q_{\lambda_n - 1}(\mu_2)\right)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial\lambda\partial z} = \frac{1}{P_{\lambda_n}'(\mu_1)}\left[\frac{\partial^2 P_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial\lambda\partial z} - \frac{P_{\lambda_n}'(\mu_2)}{P_{\lambda_n}'(\mu_1)}\frac{\partial^2 P_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial\lambda\partial z}\right] - \frac{1}{Q_{\lambda_n}'(\mu_1)}\left[\frac{\partial^2 Q_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial\lambda\partial z} - \frac{Q_{\lambda_n}'(\mu_2)}{Q_{\lambda_n}'(\mu_1)}\frac{\partial^2 Q_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial\lambda\partial z}\right]$$

$$\frac{\partial^2 P_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial\lambda\partial z} = \frac{\lambda_n}{\mu_1^2 - 1}\left(\mu_1 \frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial\lambda} - \frac{\partial P_{\lambda_n - 1}(\mu_1)}{\partial\lambda}\right) \quad \frac{\partial^2 P_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial\lambda\partial z} = \frac{\lambda_n}{\mu_2^2 - 1}\left(\mu_2 \frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial\lambda} - \frac{\partial P_{\lambda_n - 1}(\mu_2)}{\partial\lambda}\right)$$

$$\frac{\partial^2 Q_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial\lambda\partial z} = \frac{\lambda_n}{\mu_1^2 - 1}\left(\mu_1 \frac{\partial Q_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial\lambda} - \frac{\partial Q_{\lambda_n - 1}(\mu_1)}{\partial\lambda}\right) \quad \frac{\partial^2 Q_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial\lambda\partial z} = \frac{\lambda_n}{\mu_2^2 - 1}\left(\mu_2 \frac{\partial Q_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial\lambda} - \frac{\partial Q_{\lambda_n - 1}(\mu_2)}{\partial\lambda}\right)$$

$$\Phi_{\lambda_n}(z) = \frac{P_{\lambda_n}(z)}{P_{\lambda_n}'(\mu_1)} - \frac{Q_{\lambda_n}(z)}{Q_{\lambda_n}'(\mu_1)} \quad \left\|\Phi_0(z)\right\|^2 = \mu_2 - \mu_1 \quad \left\|\Phi_{\lambda_n}(z)\right\|^2 = -\frac{\left(1 - \mu_2^2\right)\Phi_{\lambda_n}(\mu_2)\dfrac{\partial^2 \Phi_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial z \partial\lambda}}{\left(2\lambda_n + 1\right)}$$

$$F_n = \frac{B_n}{P_{\lambda_n}'(\mu_1)} - \frac{C_n}{Q_{\lambda_n}'(\mu_1)} \quad B_n = \int_{\mu_1}^{\mu_2} dz\ f_\theta(z)\ P_{\lambda_n}(z) \quad C_n = \int_{\mu_1}^{\mu_2} dz\ f_\theta(z)\ Q_{\lambda_n}(z) \quad B_0 = \int_{\mu_1}^{\mu_2} dz\ f_\theta(z)$$

$$T(\eta,\theta) = \frac{B_0}{\left\|\Phi_0(z)\right\|^2} + \sum_{n \neq 0, +\infty} \frac{F_n \dfrac{P_{\lambda_n}^{réel}\left(i\ Sinh(\eta)\right)}{P_{\lambda_n}^{réel}\left(i\ Sinh(l_\eta)\right)}\left(\dfrac{P_{\lambda_n}(Cos(\theta))}{P_{\lambda_n}'(\mu_1)} - \dfrac{Q_{\lambda_n}(Cos(\theta))}{Q_{\lambda_n}'(\mu_1)}\right)}{\left\|\Phi_{\lambda_n}(z)\right\|^2}$$

$$T(\eta,\theta) = \frac{B_0}{\left(\mu_2 - \mu_1\right)} + \sum_{n \neq 0, +\infty} \frac{F_n \dfrac{P_{\lambda_n}^{réel}\left(i\ Sinh(\eta)\right)}{P_{\lambda_n}^{réel}\left(i\ Sinh(l_\eta)\right)}\left(\dfrac{P_{\lambda_n}(Cos(\theta))}{P_{\lambda_n}'(\mu_1)} - \dfrac{Q_{\lambda_n}(Cos(\theta))}{Q_{\lambda_n}'(\mu_1)}\right)}{\left\|\Phi_{\lambda_n}(z)\right\|^2}$$

Lorsque la fonction limite $f_\theta(z)=1$, on a

$$B_n = \int_{\mu_1}^{\mu_2} dz\, P_{\lambda_n}(z) \quad C_n = \int_{\mu_1}^{\mu_2} dz\, Q_{\lambda_n}(z)$$

en utilisant les équations (3)

$$\Rightarrow B_n = \frac{\left(\mu_2 P_{\lambda_n}(\mu_2) - P_{\lambda_n-1}(\mu_2)\right) - \left(\mu_1 P_{\lambda_n}(\mu_1) - P_{\lambda_n-1}(\mu_1)\right)}{\lambda_n+1} \quad C_n = \frac{\left(\mu_2 Q_{\lambda_n}(\mu_2) - Q_{\lambda_n-1}(\mu_2)\right) - \left(\mu_1 Q_{\lambda_n}(\mu_1) - Q_{\lambda_n-1}(\mu_1)\right)}{\lambda_n+1}$$

$$F_n = \frac{1}{\lambda_n+1}\left(\frac{\left(\mu_2 P_{\lambda_n}(\mu_2) - P_{\lambda_n-1}(\mu_2)\right)}{P_{\lambda_n}'(\mu_1)} - \frac{\left(\mu_2 Q_{\lambda_n}(\mu_2) - Q_{\lambda_n-1}(\mu_2)\right)}{Q_{\lambda_n}'(\mu_1)}\right) = 0$$

On retrouve donc la solution triviale, puisque $B_0=\mu_2-\mu_1$: $T(\eta,\theta)=1$.

Lorsque la fonction limite $f_\theta(z)$ présente un profil en fonction de Heaviside :

$$f_\theta(z) = 1 \quad si\ z \in \left[\mu_1, \frac{\mu_1+\mu_2}{2}\right] \quad f_\theta(z) = 0 \quad si\ z \notin \left[\mu_1, \frac{\mu_1+\mu_2}{2}\right]$$

$$B_0 = \int_{\mu_1}^{\frac{\mu_1+\mu_2}{2}} dz = \frac{\mu_2-\mu_1}{2} \quad B_n = \int_{\mu_1}^{\frac{\mu_1+\mu_2}{2}} dz\, P_{\lambda_n}(z) \quad C_n = \int_{\mu_1}^{\frac{\mu_1+\mu_2}{2}} dz\, Q_{\lambda_n}(z)$$

en utilisant les équations (3)

$$\Rightarrow B_n = \frac{\left(\left(\frac{\mu_1+\mu_2}{2}\right)P_{\lambda_n}\left(\frac{\mu_1+\mu_2}{2}\right) - P_{\lambda_n-1}\left(\frac{\mu_1+\mu_2}{2}\right)\right) - \left(\mu_1 P_{\lambda_n}(\mu_1) - P_{\lambda_n-1}(\mu_1)\right)}{\lambda_n+1}$$

$$C_n = \frac{\left(\left(\frac{\mu_1+\mu_2}{2}\right)Q_{\lambda_n}\left(\frac{\mu_1+\mu_2}{2}\right) - Q_{\lambda_n-1}\left(\frac{\mu_1+\mu_2}{2}\right)\right) - \left(\mu_1 Q_{\lambda_n}(\mu_1) - Q_{\lambda_n-1}(\mu_1)\right)}{\lambda_n+1}$$

$$F_n = \left(\frac{\left(\left(\frac{\mu_1+\mu_2}{2}\right)P_{\lambda_n}\left(\frac{\mu_1+\mu_2}{2}\right) - P_{\lambda_n-1}\left(\frac{\mu_1+\mu_2}{2}\right)\right)}{P_{\lambda_n}'(\mu_1)} - \frac{\left(\left(\frac{\mu_1+\mu_2}{2}\right)Q_{\lambda_n}\left(\frac{\mu_1+\mu_2}{2}\right) - Q_{\lambda_n-1}\left(\frac{\mu_1+\mu_2}{2}\right)\right)}{Q_{\lambda_n}'(\mu_1)}\right)$$

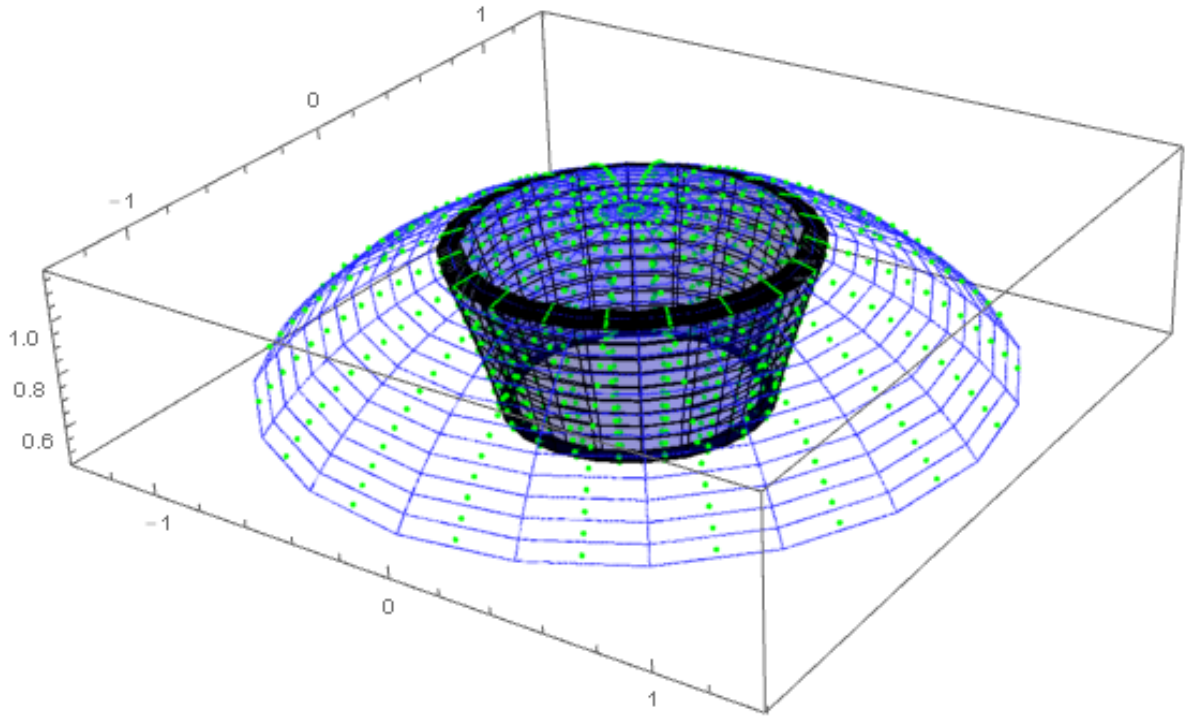
$$\Phi_{\lambda_n}(z) = \frac{P_{\lambda_n}(z)}{P_{\lambda_n}'(\mu_1)} - \frac{Q_{\lambda_n}(z)}{Q_{\lambda_n}'(\mu_1)} \quad \left\|\Phi_{\lambda_n}(z)\right\|^2 = \int_{\mu_1}^{\mu_2} dz\, \Phi_{\lambda_n}(z)^2$$

$$T(r,\theta) = \frac{1}{2} + \sum_{n\neq 0,+\infty} \frac{F_n \dfrac{P_{\lambda_n}^{réel}\left(i\ Sinh(\eta)\right)}{P_{\lambda_n}^{réel}\left(i\ Sinh(l_\eta)\right)}\left(\dfrac{P_{\lambda_n}(Cos(\theta))}{P_{\lambda_n}'(\mu_1)} - \dfrac{Q_{\lambda_n}(Cos(\theta))}{Q_{\lambda_n}'(\mu_1)}\right)}{\left(\lambda_n+1\right)\left\|\Phi_{\lambda_n}(z)\right\|^2}$$

Exemple : *Section sphéroïdale aplatie creuse entre les angles θ_1,θ_2, en coordonnées sphéroïdales aplaties (η,θ) soumise à des conditions aux limites de Dirichlet inhomogènes en $\eta=l_{\eta 1}$ et inhomogènes en $\eta=l_{\eta 2}$,* homogènes en θ_1 *et* θ_2.

Soit le problème :

$$\Delta T(\eta,\theta)=0 \quad T(\eta,\theta)\ fini$$
$$T(\eta,\theta)\big|_{\eta=l_{\eta 1}}=0 \quad T(\eta,\theta)\big|_{\eta=l_{\eta 2}}=f_\theta(Cos(\theta))$$
$$T(\eta,\theta)\big|_{\theta=\theta_1}=0 \quad T(\eta,\theta)\big|_{\theta=\theta_2}=0$$



Comme il y a dépendance entre les parties réelles et imaginaires des fonctions de première espèce et deuxième espèce, comme il a été établi précédemment :

$$\begin{cases} Q_{\lambda_n}^{réel}(i\ Sinh(\eta)) = -\dfrac{\pi Tan\left(\dfrac{\lambda_n \pi}{2}\right)}{2} P_{\lambda_n}^{réel}(i\ Sinh(\eta)) \\ Q_{\lambda_n}^{imag}(i\ Sinh(\eta)) = \dfrac{\pi Cotan\left(\dfrac{\lambda_n \pi}{2}\right)}{2} P_{\lambda_n}^{imag}(i\ Sinh(\eta)) \end{cases}.$$

on fait le choix de la partie réelle de fonction de première espèce, et de la partie imaginaire de la fonction de deuxième espèce (ou de première espèce indifféremment).

En reprenant les résultats d'un exemple précédent nous avons :

$$\mu_1 = Cos(\theta_2);\ \mu_2 = Cos(\theta_1) \quad \lambda_n \quad tq \quad \frac{P_{\lambda_n}(\mu_2)}{P_{\lambda_n}(\mu_1)} = \frac{Q_{\lambda_n}(\mu_2)}{Q_{\lambda_n}(\mu_1)} \quad z = Cos(\theta)$$

$$B_n = \int_{\mu_1}^{\mu_2} dz\ f_\theta(z)\, P_{\lambda_n}(z) \quad C_n = \int_{\mu_1}^{\mu_2} dz\ f_\theta(z)\, Q_{\lambda_n}(z) \qquad \Phi_n(z) = \frac{P_{\lambda_n}(z)}{P_{\lambda_n}(\mu_1)} - \frac{Q_{\lambda_n}(z)}{Q_{\lambda_n}(\mu_1)}$$

$$\left\|\Phi_{\lambda_n}(z)\right\|^2 = \frac{\lambda_n}{(2\lambda_n+1)}\Phi_{\lambda_n-1}(\mu_2)\frac{\partial\Phi_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial\lambda} \quad \textit{voir tableau synoptique en fin de section}$$

$$\Phi_{\lambda_n-1}(\mu_1) = \frac{P_{\lambda_n-1}(\mu_1)}{P_{\lambda_n}(\mu_1)} - \frac{Q_{\lambda_n-1}(\mu_1)}{Q_{\lambda_n}(\mu_1)} \quad \Phi_{\lambda_n-1}(\mu_2) = \frac{P_{\lambda_n-1}(\mu_2)}{P_{\lambda_n}(\mu_1)} - \frac{Q_{\lambda_n-1}(\mu_2)}{Q_{\lambda_n}(\mu_1)}$$

$$\frac{\partial\Phi_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial\lambda} = \frac{1}{P_{\lambda_n}(\mu_1)}\left[\frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial\lambda} - \frac{P_{\lambda_n}(\mu_2)}{P_{\lambda_n}(\mu_1)}\frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial\lambda}\right] - \frac{1}{Q_{\lambda_n}(\mu_1)}\left[\frac{\partial Q_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial\lambda} - \frac{Q_{\lambda_n}(\mu_2)}{Q_{\lambda_n}(\mu_1)}\frac{\partial Q_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial\lambda}\right]$$

$$T(\eta,\theta) = \sum_{n\neq 0,+\infty} \frac{\left(\frac{B_n}{P_{\lambda_n}(\mu_1)} - \frac{C_n}{Q_{\lambda_n}(\mu_1)}\right)}{\left\|\Phi_{\lambda_n}(z)\right\|^2} \frac{\left(\frac{P_{\lambda_n}^{réel}(i\ Sinh(\eta))}{P_{\lambda_n}^{réel}(i\ Sinh(l_{\eta1}))} - \frac{Q_{\lambda_n}^{imag}(i\ Sinh(\eta))}{Q_{\lambda_n}^{imag}(i\ Sinh(l_{\eta1}))}\right)}{\left(\frac{P_{\lambda_n}^{réel}(i\ Sinh(l_{\eta2}))}{P_{\lambda_n}^{réel}(i\ Sinh(l_{\eta1}))} - \frac{Q_{\lambda_n}^{imag}(i\ Sinh(l_{\eta2}))}{Q_{\lambda_n}^{imag}(i\ Sinh(l_{\eta1}))}\right)} \left(\frac{P_{\lambda_n}(Cos(\theta))}{P_{\lambda_n}(\mu_1)} - \frac{Q_{\lambda_n}(Cos(\theta))}{Q_{\lambda_n}(\mu_1)}\right)$$

Lorsque la fonction limite $f_\vartheta(z)=1$, on a avec les expressions formelles des normes des fonctions propres :

En utilisant les trois formes des intégrales indéfinies

$$(1) \Rightarrow B_n' = \frac{P_{\lambda_n+1}(\mu_2) - P_{\lambda_n-1}(\mu_2) - \left(P_{\lambda_n+1}(\mu_1) - P_{\lambda_n-1}(\mu_1)\right)}{P_{\lambda_n}(\mu_1)} \quad et \quad C_n' = \frac{Q_{\lambda_n+1}(\mu_2) - Q_{\lambda_n-1}(\mu_2) - \left(Q_{\lambda_n+1}(\mu_1) - Q_{\lambda_n-1}(\mu_1)\right)}{Q_{\lambda_n}(\mu_1)}$$

$$T(\eta,\theta) = \sum_{n\neq 0,+\infty} \frac{1}{(2\lambda_n+1)} \frac{(B_n' - C_n')}{\left\|\Phi_{\lambda_n}(z)\right\|^2} \frac{\left(\frac{P_{\lambda_n}^{réel}(i\ Sinh(\eta))}{P_{\lambda_n}^{réel}(i\ Sinh(l_{\eta1}))} - \frac{Q_{\lambda_n}^{imag}(i\ Sinh(\eta))}{Q_{\lambda_n}^{imag}(i\ Sinh(l_{\eta1}))}\right)}{\left(\frac{P_{\lambda_n}^{réel}(i\ Sinh(l_{\eta2}))}{P_{\lambda_n}^{réel}(i\ Sinh(l_{\eta1}))} - \frac{Q_{\lambda_n}^{imag}(i\ Sinh(l_{\eta2}))}{Q_{\lambda_n}^{imag}(i\ Sinh(l_{\eta1}))}\right)} \left(\frac{P_{\lambda_n}(Cos(\theta))}{P_{\lambda_n}(\mu_1)} - \frac{Q_{\lambda_n}(Cos(\theta))}{Q_{\lambda_n}(\mu_1)}\right)$$

$$(2)\ ou\ bien \Rightarrow B_n' = \frac{P_{\lambda_n-1}(\mu_1) - P_{\lambda_n-1}(\mu_2)}{P_{\lambda_n}(\mu_1)} \quad et \quad C_n' = \frac{Q_{\lambda_n-1}(\mu_1) - Q_{\lambda_n-1}(\mu_2)}{Q_{\lambda_n}(\mu_1)}$$

$$T(\eta,\theta) = \sum_{n\neq 0,+\infty} \frac{1}{\lambda_n} \frac{(B_n' - C_n')}{\left\|\Phi_{\lambda_n}(z)\right\|^2} \frac{\left(\frac{P_{\lambda_n}^{réel}(i\ Sinh(\eta))}{P_{\lambda_n}^{réel}(i\ Sinh(l_{\eta1}))} - \frac{Q_{\lambda_n}^{imag}(i\ Sinh(\eta))}{Q_{\lambda_n}^{imag}(i\ Sinh(l_{\eta1}))}\right)}{\left(\frac{P_{\lambda_n}^{réel}(i\ Sinh(l_{\eta2}))}{P_{\lambda_n}^{réel}(i\ Sinh(l_{\eta1}))} - \frac{Q_{\lambda_n}^{imag}(i\ Sinh(l_{\eta2}))}{Q_{\lambda_n}^{imag}(i\ Sinh(l_{\eta1}))}\right)} \left(\frac{P_{\lambda_n}(Cos(\theta))}{P_{\lambda_n}(\mu_1)} - \frac{Q_{\lambda_n}(Cos(\theta))}{Q_{\lambda_n}(\mu_1)}\right)$$

$$(3)\ ou\ bien \Rightarrow B_n' = \frac{P_{\lambda_n+1}(\mu_2) - P_{\lambda_n+1}(\mu_1)}{P_{\lambda_n}(\mu_1)} \quad et \quad C_n' = \frac{Q_{\lambda_n+1}(\mu_2) - Q_{\lambda_n+1}(\mu_1)}{Q_{\lambda_n}(\mu_1)}$$

$$T(\eta,\theta) = \sum_{n\neq 0,+\infty} \frac{1}{(\lambda_n+1)} \frac{(B_n' - C_n')}{\left\|\Phi_{\lambda_n}(z)\right\|^2} \frac{\left(\frac{P_{\lambda_n}^{réel}(i\ Sinh(\eta))}{P_{\lambda_n}^{réel}(i\ Sinh(l_{\eta1}))} - \frac{Q_{\lambda_n}^{imag}(i\ Sinh(\eta))}{Q_{\lambda_n}^{imag}(i\ Sinh(l_{\eta1}))}\right)}{\left(\frac{P_{\lambda_n}^{réel}(i\ Sinh(l_{\eta2}))}{P_{\lambda_n}^{réel}(i\ Sinh(l_{\eta1}))} - \frac{Q_{\lambda_n}^{imag}(i\ Sinh(l_{\eta2}))}{Q_{\lambda_n}^{imag}(i\ Sinh(l_{\eta1}))}\right)} \left(\frac{P_{\lambda_n}(Cos(\theta))}{P_{\lambda_n}(\mu_1)} - \frac{Q_{\lambda_n}(Cos(\theta))}{Q_{\lambda_n}(\mu_1)}\right)$$

Exemple : *Section sphéroïdale aplatie creuse entre les angles θ_1,θ_2, en coordonnées sphéroïdales aplaties (η,θ) soumise à des conditions aux limites de Dirichlet inhomogènes en $\eta=l_{\eta 1}$ et inhomogènes en $\eta=l_{\eta 2}$* , Neumann homogènes en θ_1 *et* θ_2

Soit le problème :
$$\Delta T(r,\theta)=0 \quad T(\eta,\theta)\big|_{\eta=l_{\eta 1}}=0 \quad T(\eta,\theta)\ fini \quad T(\eta,\theta)\big|_{\eta=l_{\eta 2}}=f_\theta(Cos(\theta))$$
$$T_z'(\eta,\theta)\big|_{\theta=\theta_1}=0 \quad T_z'(\eta,\theta)\big|_{\theta=\theta_2}=0$$

En suivant les résultats d'un exemple précédent, il vient :

$$P'_{\lambda_n}(\mu_1)=\frac{\lambda_n}{\mu_1^{\ 2}-1}\left(\mu_1 P_{\lambda_n}(\mu_1)-P_{\lambda_n-1}(\mu_1)\right) \quad P'_{\lambda_n}(\mu_2)=\frac{\lambda_n}{\mu_2^{\ 2}-1}\left(\mu_2 P_{\lambda_n}(\mu_2)-P_{\lambda_n-1}(\mu_2)\right)$$

$$Q'_{\lambda_n}(\mu_1)=\frac{\lambda_n}{\mu_1^{\ 2}-1}\left(\mu_1 Q_{\lambda_n}(\mu_1)-Q_{\lambda_n-1}(\mu_1)\right) \quad Q'_{\lambda_n}(\mu_2)=\frac{\lambda_n}{\mu_2^{\ 2}-1}\left(\mu_2 Q_{\lambda_n}(\mu_2)-Q_{\lambda_n-1}(\mu_2)\right)$$

$$\frac{\partial^2\Phi_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial\lambda\partial z}=\frac{1}{P_{\lambda_n}'(\mu_1)}\left[\frac{\partial^2 P_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial\lambda\partial z}-\frac{P_{\lambda_n}'(\mu_2)}{P_{\lambda_n}'(\mu_1)}\frac{\partial^2 P_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial\lambda\partial z}\right]-\frac{1}{Q_{\lambda_n}'(\mu_1)}\left[\frac{\partial^2 Q_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial\lambda\partial z}-\frac{Q_{\lambda_n}'(\mu_2)}{Q_{\lambda_n}'(\mu_1)}\frac{\partial^2 Q_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial\lambda\partial z}\right]$$

$$\frac{\partial^2 P_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial\lambda\partial z}=\frac{\lambda_n}{\mu_1^{\ 2}-1}\left(\mu_1\frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial\lambda}-\frac{\partial P_{\lambda_n-1}(\mu_1)}{\partial\lambda}\right) \quad \frac{\partial^2 P_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial\lambda\partial z}=\frac{\lambda_n}{\mu_2^{\ 2}-1}\left(\mu_2\frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial\lambda}-\frac{\partial P_{\lambda_n-1}(\mu_2)}{\partial\lambda}\right)$$

$$\frac{\partial^2 Q_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial\lambda\partial z}=\frac{\lambda_n}{\mu_1^{\ 2}-1}\left(\mu_1\frac{\partial Q_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial\lambda}-\frac{\partial Q_{\lambda_n-1}(\mu_1)}{\partial\lambda}\right) \quad \frac{\partial^2 Q_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial\lambda\partial z}=\frac{\lambda_n}{\mu_2^{\ 2}-1}\left(\mu_2\frac{\partial Q_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial\lambda}-\frac{\partial Q_{\lambda_n-1}(\mu_2)}{\partial\lambda}\right)$$

$$\Phi_{\lambda_n}(z)=\frac{P_{\lambda_n}(z)}{P_{\lambda_n}'(\mu_1)}-\frac{Q_{\lambda_n}(z)}{Q_{\lambda_n}'(\mu_1)} \quad \left\|\Phi_0(z)\right\|^2=\mu_2-\mu_1 \quad \left\|\Phi_{\lambda_n}(z)\right\|^2=-\frac{\left(1-\mu_2^{\ 2}\right)\Phi_{\lambda_n}(\mu_2)\dfrac{\partial^2\Phi_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial z\partial\lambda}}{(2\lambda_n+1)}$$

$$F_n=\frac{B_n}{P_{\lambda_n}'(\mu_1)}-\frac{C_n}{Q_{\lambda_n}'(\mu_1)} \quad B_n=\int_{\mu_1}^{\mu_2}dz\ f_\theta(z)\,P_{\lambda_n}(z) \quad C_n=\int_{\mu_1}^{\mu_2}dz\ f_\theta(z)\,Q_{\lambda_n}(z) \quad B_0=\int_{\mu_1}^{\mu_2}dz\ f_\theta(z)$$

$$T(\eta,\theta)=\frac{B_0}{(\mu_2-\mu_1)}\left(\frac{Arctan(Sinh(\eta))-Arctan(Sinh(l_{\eta 1}))}{Arctan(Sinh(l_{\eta 2}))-Arctan(Sinh(l_{\eta 1}))}\right)+$$
$$F_n\frac{\left(\dfrac{P_{\lambda_n}^{réel}(i\ Sinh(\eta))}{P_{\lambda_n}^{réel}(i\ Sinh(l_{\eta 1}))}-\dfrac{Q_{\lambda_n}^{imag}(i\ Sinh(\eta))}{Q_{\lambda_n}^{imag}(i\ Sinh(l_{\eta 1}))}\right)}{\left(\dfrac{P_{\lambda_n}^{réel}(i\ Sinh(l_{\eta 2}))}{P_{\lambda_n}^{réel}(i\ Sinh(l_{\eta 1}))}-\dfrac{Q_{\lambda_n}^{imag}(i\ Sinh(l_{\eta 2}))}{Q_{\lambda_n}^{imag}(i\ Sinh(l_{\eta 1}))}\right)}\left(\frac{P_{\lambda_n}(Cos(\theta))}{P_{\lambda_n}'(\mu_1)}-\frac{Q_{\lambda_n}(Cos(\theta))}{Q_{\lambda_n}'(\mu_1)}\right)$$
$$+\sum_{n\neq 0,+\infty}\frac{}{\left\|\Phi_{\lambda_n}(z)\right\|^2}$$

Lorsque la fonction limite $f_\theta(z)=1$, on a

$$B_n=\int_{\mu_1}^{\mu_2}dz\ P_{\lambda_n}(z) \quad C_n=\int_{\mu_1}^{\mu_2}dz\ Q_{\lambda_n}(z) \quad en\ utilisant\ les\ équations\ (3)$$

$$\Rightarrow B_n=\frac{\left(\mu_2 P_{\lambda_n}(\mu_2)-P_{\lambda_n-1}(\mu_2)\right)-\left(\mu_1 P_{\lambda_n}(\mu_1)-P_{\lambda_n-1}(\mu_1)\right)}{\lambda_n+1} \quad C_n=\frac{\left(\mu_2 Q_{\lambda_n}(\mu_2)-Q_{\lambda_n-1}(\mu_2)\right)-\left(\mu_1 Q_{\lambda_n}(\mu_1)-Q_{\lambda_n-1}(\mu_1)\right)}{\lambda_n+1}$$

$$F_n=\frac{1}{\lambda_n+1}\left(\frac{\left(\mu_2 P_{\lambda_n}(\mu_2)-P_{\lambda_n-1}(\mu_2)\right)}{P_{\lambda_n}'(\mu_1)}-\frac{\left(\mu_2 Q_{\lambda_n}(\mu_2)-Q_{\lambda_n-1}(\mu_2)\right)}{Q_{\lambda_n}'(\mu_1)}\right)=0$$

On retrouve bien la solution triviale, puisque $B_0=\mu_2-\mu_1$:

$$T(\eta,\theta)=\frac{Arctan(Sinh(\eta))-Arctan(Sinh(l_{\eta 1}))}{Arctan(Sinh(l_{\eta 2}))-Arctan(Sinh(l_{\eta 1}))}$$

Lorsque la fonction limite $f_\theta(z)$ présente un profil en fonction de Heaviside, cela donne :

$$f_\theta(z)=1 \quad si\ z\in\left[\mu_1,\frac{\mu_1+\mu_2}{2}\right] \quad f_\theta(z)=0 \quad si\ z\notin\left[\mu_1,\frac{\mu_1+\mu_2}{2}\right]$$

Il vient

$$F_n=\left(\frac{\left(\left(\frac{\mu_1+\mu_2}{2}\right)P_{\lambda_n}\left(\frac{\mu_1+\mu_2}{2}\right)-P_{\lambda_n-1}\left(\frac{\mu_1+\mu_2}{2}\right)\right)}{P_{\lambda_n}'(\mu_1)}-\frac{\left(\left(\frac{\mu_1+\mu_2}{2}\right)Q_{\lambda_n}\left(\frac{\mu_1+\mu_2}{2}\right)-Q_{\lambda_n-1}\left(\frac{\mu_1+\mu_2}{2}\right)\right)}{Q_{\lambda_n}'(\mu_1)}\right)$$

$$\Phi_{\lambda_n}(z)=\frac{P_{\lambda_n}(z)}{P_{\lambda_n}'(\mu_1)}-\frac{Q_{\lambda_n}(z)}{Q_{\lambda_n}'(\mu_1)}$$

$$T(r,\theta)=\frac{1}{2}\left(\frac{Arctan(Sinh(\eta))-Arctan(Sinh(l_{\eta 1}))}{Arctan(Sinh(l_{\eta 2}))-Arctan(Sinh(l_{\eta 1}))}\right)+$$

$$+\sum_{n\neq 0,+\infty}\frac{\lambda_n^{\ 2}}{(\lambda_n+1)(\mu_1^{\ 2}-1)^2}\frac{F_n\dfrac{\left(\dfrac{P_{\lambda_n}^{réel}(i\ Sinh(\eta))}{P_{\lambda_n^{réel}}(i\ Sinh(l_{\eta 1}))}-\dfrac{Q_{\lambda_n}^{imag}(i\ Sinh(\eta))}{Q_{\lambda_n}^{imag}(i\ Sinh(l_{\eta 1}))}\right)}{\left(\dfrac{P_{\lambda_n}^{réel}(i\ Sinh(l_{\eta 2}))}{P_{\lambda_n}^{réel}(i\ Sinh(l_{\eta 1}))}-\dfrac{Q_{\lambda_n}^{imag}(i\ Sinh(l_{\eta 2}))}{Q_{\lambda_n}^{imag}(i\ Sinh(l_{\eta 1}))}\right)}\left(\dfrac{P_{\lambda_n}(Cos(\theta))}{P_{\lambda_n}'(\mu_1)}-\dfrac{Q_{\lambda_n}(Cos(\theta))}{Q_{\lambda_n}'(\mu_1)}\right)}{\left\|\Phi_{\lambda_n}(z)\right\|^2}.$$

Tableau synoptique des normes des fonctions propres angulaires d'un problème aux limites sur une section sphérique
Formules communes pour le calcul des normes

$$\frac{\partial P_\lambda(z)}{\partial z} = \frac{\lambda}{z^2-1}\left(zP_\lambda(z) - P_{\lambda-1}(z)\right) \quad \frac{\partial Q_\lambda(z)}{\partial z} = \frac{\lambda}{z^2-1}\left(zQ_\lambda(z) - Q_{\lambda-1}(z)\right) \quad \forall \lambda > 0 \in \Re \; ou \; \mathbf{N}$$

$$\frac{\partial^2 P_\lambda(z)}{\partial\lambda\partial z} = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial P_\lambda(z)}{\partial z} + \frac{\lambda}{z^2-1}\left(z\frac{\partial P_\lambda(z)}{\partial\lambda} - \frac{\partial P_{\lambda-1}(z)}{\partial\lambda}\right) \quad \forall \lambda > 0 \in \Re \; ou \; \mathbf{N}$$

$$\frac{\partial^2 Q_\lambda(z)}{\partial\lambda\partial z} = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial Q_\lambda(z)}{\partial z} + \frac{\lambda}{z^2-1}\left(z\frac{\partial Q_\lambda(z)}{\partial\lambda} - \frac{\partial Q_{\lambda-1}(z)}{\partial\lambda}\right) \quad \forall \lambda > 0 \in \Re \; ou \; \mathbf{N}$$

$$\frac{\partial P_\lambda(z)}{\partial\lambda} = \sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{(-\lambda)_k(\lambda+1)_k}{(k!)^2}\left(\psi(k+\lambda+1) - \psi(\lambda-k+1)\right)\left(\frac{1-z}{2}\right)^k$$

$$\forall \lambda > 0 \in \Re \, , \lambda \notin \mathbf{Z} \quad tel \; que \left|\frac{1-z}{2}\right| < 1$$

$$\frac{\partial Q_\lambda(z)}{\partial\lambda} = \pi\frac{Cos(\pi\lambda)}{Sin(\pi\lambda)}Q_\lambda(z) - \psi^{(1)}(\lambda+1)P_\lambda(z) +$$

$$+\sum_{k=0}^{k=\infty}\frac{(-\lambda)_k(\lambda+1)_k}{(k!)^2}\left(\frac{1}{2}Log\left(\frac{1+z}{1-z}\right) + \psi(k+1) - \psi(\lambda+1)\right)\left(\psi(k+\lambda+1) - \psi(k-\lambda)\right)\left(\frac{1-z}{2}\right)^k$$

$$\forall \lambda > 0 \in \Re \, , \lambda \notin \mathbf{Z} \quad tel \; que \left|\frac{1-z}{2}\right| < 1$$

où

$(\alpha)_k$ *est le symbole de Pochhammer* $\quad (\alpha)_k = \alpha\,(\alpha+1)\,\cdots(\alpha+k\text{-}1) = \dfrac{\Gamma(\alpha+\mathrm{k})}{\Gamma(\alpha)}$

$\Gamma(l)$ *fonction Gamma*

$\psi(\alpha)$ *fonction Digamma dérivée logarithmique de la fonction Gamma* $\Leftarrow \psi(\alpha) = \dfrac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}$

$\psi^{(1)}(\alpha)$ *dérivée première de la fonction Digamma*

.

Tableau synoptique des normes des fonctions propres angulaires d'un problème aux limites sur une section sphérique
Expression des normes

Problèmes aux limites	Système de valeurs propres, équation transcendantale : λ_n	Système de Fonctions propres angulaires $\Phi_{\lambda_n}(z)$	Normes des fonctions propres angulaire $\left\|\Phi_{\lambda_n}(z)\right\|^2 = \int_{\mu_1}^{\mu_2} dz \left(\Phi_{\lambda_n}(z)\right)^2$
Dirichlet sur un cône d'angle d'ouverture θ0 : $\mu_0 = Cos(\theta_0) \quad z = Cos(\theta)$	$P_{\lambda_n}(\mu_0) = 0$	$\Phi_{\lambda_n}(z) = P_{\lambda_n}(z)$ $\Phi_{\lambda_n}(\mu_0) = 0$	$\left\|\Phi_{\lambda_n}(z)\right\|^2 = -\frac{\lambda_n}{(2\lambda_n+1)} P_{\lambda_n-1}(\mu_0) \frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\partial \lambda}$
Neumann sur un cône d'angle d'ouverture θ0 : $\mu_0 = Cos(\theta_0) \quad z = Cos(\theta)$	$\frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\partial z} = 0$	$\Phi_{\lambda_n}(z) = P_{\lambda_n}(z)$ $\frac{\partial \Phi_{\lambda_n}(\mu_0)}{\partial z} = 0$	$\left\|\Phi_{\lambda_n}(z)\right\|^2 = \frac{\left(1-\mu_0^2\right) P_{\lambda_n}(\mu_0) \frac{\partial^2 P_{\lambda_n}(\mu_0)}{\partial \lambda\, \partial z}}{(2\lambda_n+1)}$
Dirichlet sur une section conique-sphérique d'angles θ1 et θ2 : $\theta_1 < \theta_2 \Rightarrow \mu_2 = Cos(\theta_1)$ $\mu_1 = Cos(\theta_2) \quad z = Cos(\theta)$	$\frac{P_{\lambda_n}(\mu_2)}{P_{\lambda_n}(\mu_1)} = \frac{Q_{\lambda_n}(\mu_2)}{Q_{\lambda_n}(\mu_1)}$	$\Phi_{\lambda_n}(z) = \frac{P_{\lambda_n}(z)}{P_{\lambda_n}(\mu_1)} - \frac{Q_{\lambda_n}(z)}{Q_{\lambda_n}(\mu_1)}$ $\Phi_{\lambda_n}(\mu_1) = \Phi_{\lambda_n}(\mu_2) = 0$	$\frac{\partial \Phi_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial \lambda} = \frac{1}{P_{\lambda_n}(\mu_1)}\left[\frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial \lambda} - \frac{P_{\lambda_n}(\mu_2)}{P_{\lambda_n}(\mu_1)}\frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial \lambda}\right] - \frac{1}{Q_{\lambda_n}(\mu_1)}\left[\frac{\partial Q_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial \lambda} - \frac{Q_{\lambda_n}(\mu_2)}{Q_{\lambda_n}(\mu_1)}\frac{\partial Q_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial \lambda}\right]$ $\left\|\Phi_{\lambda_n}(z)\right\|^2 = \frac{\lambda_n}{(2\lambda_n+1)} \Phi_{\lambda_n-1}(\mu_2) \frac{\partial \Phi_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial \lambda}$
Dirichlet sur une section conique-sphérique d'angles θ1 et θ2 : $\theta_1 < \theta_2 \Rightarrow \mu_2 = Cos(\theta_1)$ $\mu_1 = Cos(\theta_2) \quad z = Cos(\theta)$	$\frac{P_{\lambda_n}(\mu_2)}{P_{\lambda_n}(\mu_1)} = \frac{Q_{\lambda_n}(\mu_2)}{Q_{\lambda_n}(\mu_1)}$	$\Phi_{\lambda_n}(z) = \frac{P_{\lambda_n}(z)}{P_{\lambda_n}(\mu_2)} - \frac{Q_{\lambda_n}(z)}{Q_{\lambda_n}(\mu_2)}$ $\Phi_{\lambda_n}(\mu_1) = \Phi_{\lambda_n}(\mu_2) = 0$	$\frac{\partial \Phi_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial \lambda} = \frac{1}{P_{\lambda_n}(\mu_2)}\left[\frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial \lambda} - \frac{P_{\lambda_n}(\mu_1)}{P_{\lambda_n}(\mu_2)}\frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial \lambda}\right] - \frac{1}{Q_{\lambda_n}(\mu_2)}\left[\frac{\partial Q_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial \lambda} - \frac{Q_{\lambda_n}(\mu_1)}{Q_{\lambda_n}(\mu_2)}\frac{\partial Q_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial \lambda}\right]$ $\left\|\Phi_{\lambda_n}(z)\right\|^2 = -\frac{\lambda_n}{(2\lambda_n+1)} \Phi_{\lambda_n-1}(\mu_1) \frac{\partial \Phi_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial \lambda}$
Neumann sur une section conique-sphérique d'angles θ1 et θ2 : $\theta_1 < \theta_2 \Rightarrow \mu_2 = Cos(\theta_1)$ $\mu_1 = Cos(\theta_2) \quad z = Cos(\theta)$	$\frac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_2)/\partial z}{\partial P_{\lambda_n}(\mu_1)/\partial z} = \frac{\partial Q_{\lambda_n}(\mu_2)/\partial z}{\partial Q_{\lambda_n}(\mu_1)/\partial z}$	$\Phi_{\lambda_n}(z) = \frac{P_{\lambda_n}(z)}{\partial P_{\lambda_n}(\mu_1)/\partial z} - \frac{Q_{\lambda_n}(z)}{\partial Q_{\lambda_n}(\mu_1)/\partial z}$ $\frac{\partial \Phi_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial z} = \frac{\partial \Phi_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial z} = 0$	$\frac{\partial^2 \Phi_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial \lambda \partial z} = \frac{1}{P_{\lambda_n}'(\mu_1)}\left[\frac{\partial^2 P_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial \lambda \partial z} - \frac{P_{\lambda_n}'(\mu_2)}{P_{\lambda_n}'(\mu_1)}\frac{\partial^2 P_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial \lambda \partial z}\right] -$ $-\frac{1}{Q_{\lambda_n}'(\mu_1)}\left[\frac{\partial^2 Q_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial \lambda \partial z} - \frac{Q_{\lambda_n}'(\mu_2)}{Q_{\lambda_n}'(\mu_1)}\frac{\partial^2 Q_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial \lambda \partial z}\right]$ $\left\|\Phi_{\lambda_n}(z)\right\|^2 = -\frac{\left(1-\mu_2^2\right)\Phi_{\lambda_n}(\mu_2) \frac{\partial^2 \Phi_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial z \partial \lambda}}{(2\lambda_n+1)}$

Expression des normes (suite)

Problèmes aux limites	Système de valeurs propres, équation transcendantale : λ_n	Système de Fonctions propres angulaires $\Phi_{\lambda_n}(z)$	Normes des fonctions propres angulaires $\left\|\Phi_{\lambda_n}(z)\right\|^2 = \int_{\mu_1}^{\mu_2} dz \left(\Phi_{\lambda_n}(z)\right)^2$
Neumann sur une section conique-sphérique d'angles θ1 et θ2 : $\theta_1 < \theta_2 \Rightarrow \mu_2 = Cos(\theta_1)$ $\mu_1 = Cos(\theta_2) \quad z = Cos(\theta)$	$\dfrac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_2)/\partial z}{\partial P_{\lambda_n}(\mu_1)/\partial z} = \dfrac{\partial Q_{\lambda_n}(\mu_2)/\partial z}{\partial Q_{\lambda_n}(\mu_1)/\partial z}$	$\Phi_{\lambda_n}(z) = \dfrac{P_{\lambda_n}(z)}{\partial P_{\lambda_n}(\mu_2)/\partial z} - \dfrac{Q_{\lambda_n}(z)}{\partial P_{\lambda_n}(\mu_2)/\partial z}$ $\dfrac{\partial \Phi_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial z} = \dfrac{\partial \Phi_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial z} = 0$	$\dfrac{\partial^2 \Phi_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial \lambda \partial z} = \dfrac{1}{P_{\lambda_n}'(\mu_2)}\left[\dfrac{\partial^2 P_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial \lambda \partial z} - \dfrac{P_{\lambda_n}'(\mu_1)}{P_{\lambda_n}'(\mu_2)}\dfrac{\partial^2 P_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial \lambda \partial z}\right] -$ $- \dfrac{1}{Q_{\lambda_n}'(\mu_2)}\left[\dfrac{\partial^2 Q_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial \lambda \partial z} - \dfrac{Q_{\lambda_n}'(\mu_1)}{Q_{\lambda_n}'(\mu_2)}\dfrac{\partial^2 Q_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial \lambda \partial z}\right]$ $\left\|\Phi_{\lambda_n}(z)\right\|^2 = \dfrac{\left(1-\mu_1^2\right)\Phi_{\lambda_n}(\mu_1)\dfrac{\partial^2 \Phi_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial z \partial \lambda}}{(2\lambda_n+1)}$
Mixte Robin sur une section conique-sphérique d'angles θ1 et θ2 : $\theta_1 < \theta_2 \Rightarrow \mu_2 = Cos(\theta_1)$ $\mu_1 = Cos(\theta_2) \quad z = Cos(\theta)$	$\dfrac{\alpha_2 P_{\lambda_n}'(\mu_2) + \beta_2 P_{\lambda_n}(\mu_2)}{\alpha_1 P_{\lambda_n}'(\mu_1) - \beta_1 P_{\lambda_n}(\mu_1)} = \dfrac{\alpha_2 Q_{\lambda_n}'(\mu_2) + \beta_2 Q_{\lambda_n}(\mu_2)}{\alpha_1 Q_{\lambda_n}'(\mu_1) - \beta_1 Q_{\lambda_n}(\mu_1)}$	$\Phi_{\lambda_n}(z) = \dfrac{P_{\lambda_n}(z)}{\alpha_1 P_{\lambda_n}'(\mu_1) - \beta_1 P_{\lambda_n}(\mu_1)} - \dfrac{Q_{\lambda_n}(z)}{\alpha_1 Q_{\lambda_n}'(\mu_1) - \beta_1 Q_{\lambda_n}(\mu_1)}$ $\begin{cases} \alpha_1 \Phi_{\lambda_n}'(\mu_1) - \beta_1 \Phi_{\lambda_n}(\mu_1) = 0 \\ \alpha_2 \Phi_{\lambda_n}'(\mu_2) + \beta_2 \Phi_{\lambda_n}(\mu_2) = 0 \end{cases}$	$\dfrac{\partial \Phi_{\lambda_n}(z)}{\partial \lambda} = \dfrac{1}{\alpha_1 P_{\lambda_n}'(\mu_1) - \beta_1 P_{\lambda_n}(\mu_1)}\left[\dfrac{\partial P_{\lambda_n}(z)}{\partial \lambda} - \dfrac{P_{\lambda_n}(z)}{\left(\alpha_1 P_{\lambda_n}'(\mu_1) - \beta_1 P_{\lambda_n}(\mu_1)\right)}\left(\alpha_1 \dfrac{\partial^2 P_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial \lambda \partial z} - \beta_1 \dfrac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial \lambda}\right)\right] -$ $- \dfrac{1}{\alpha_1 Q_{\lambda_n}'(\mu_1) - \beta_1 Q_{\lambda_n}(\mu_1)}\left[\dfrac{\partial Q_{\lambda_n}(z)}{\partial \lambda} - \dfrac{Q_{\lambda_n}(z)}{\left(\alpha_1 Q_{\lambda_n}'(\mu_1) - \beta_1 Q_{\lambda_n}(\mu_1)\right)}\left(\alpha_1 \dfrac{\partial^2 Q_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial \lambda \partial z} - \beta_1 \dfrac{\partial Q_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial \lambda}\right)\right]$ $\dfrac{\partial^2 \Phi_{\lambda_n}(z)}{\partial \lambda \partial z} = \dfrac{1}{\left(\alpha_1 P_{\lambda_n}'(\mu_1) - \beta_1 P_{\lambda_n}(\mu_1)\right)}\left[\dfrac{\partial^2 P_{\lambda_n}(z)}{\partial \lambda \partial z} - \dfrac{P_{\lambda_n}'(z)}{\left(\alpha_1 P_{\lambda_n}'(\mu_1) - \beta_1 P_{\lambda_n}(\mu_1)\right)}\left(\alpha_1 \dfrac{\partial^2 P_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial \lambda \partial z} - \beta_1 \dfrac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial \lambda}\right)\right] -$ $- \dfrac{1}{\left(\alpha_1 Q_{\lambda_n}'(\mu_1) - \beta_1 Q_{\lambda_n}(\mu_1)\right)}\left[\dfrac{\partial^2 Q_{\lambda_n}(z)}{\partial \lambda \partial z} - \dfrac{Q_{\lambda_n}'(z)}{\left(\alpha_1 Q_{\lambda_n}'(\mu_1) - \beta_1 Q_{\lambda_n}(\mu_1)\right)}\left(\alpha_1 \dfrac{\partial^2 Q_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial \lambda \partial z} - \beta_1 \dfrac{\partial Q_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial \lambda}\right)\right]$ $\left\|\Phi_{\lambda_n}(z)\right\|^2 = \dfrac{\left(1-\mu_2^2\right)\left(\dfrac{\partial \Phi_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial \lambda}\dfrac{\partial \Phi_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial z} - \Phi_{\lambda_n}(\mu_2)\dfrac{\partial^2 \Phi_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial z \partial \lambda}\right)}{(2\lambda_n+1)}$
Mixte Robin sur une section conique-sphérique d'angles θ1 et θ2 : $\theta_1 < \theta_2 \Rightarrow \mu_2 = Cos(\theta_1)$ $\mu_1 = Cos(\theta_2) \quad z = Cos(\theta)$	$\dfrac{\alpha_2 P_{\lambda_n}'(\mu_2) + \beta_2 P_{\lambda_n}(\mu_2)}{\alpha_1 P_{\lambda_n}'(\mu_1) - \beta_1 P_{\lambda_n}(\mu_1)} = \dfrac{\alpha_2 Q_{\lambda_n}'(\mu_2) + \beta_2 Q_{\lambda_n}(\mu_2)}{\alpha_1 Q_{\lambda_n}'(\mu_1) - \beta_1 Q_{\lambda_n}(\mu_1)}$	$\Phi_{\lambda_n}(z) = \dfrac{P_{\lambda_n}(z)}{\alpha_2 P_{\lambda_n}'(\mu_2) + \beta_2 P_{\lambda_n}(\mu_2)} - \dfrac{Q_{\lambda_n}(z)}{\alpha_2 Q_{\lambda_n}'(\mu_2) + \beta_2 Q_{\lambda_n}(\mu_2)}$ $\begin{cases} \alpha_1 \Phi_{\lambda_n}'(\mu_1) - \beta_1 \Phi_{\lambda_n}(\mu_1) = 0 \\ \alpha_2 \Phi_{\lambda_n}'(\mu_2) + \beta_2 \Phi_{\lambda_n}(\mu_2) = 0 \end{cases}$	$\dfrac{\partial \Phi_{\lambda_n}(z)}{\partial \lambda} = \dfrac{1}{\alpha_2 P_{\lambda_n}'(\mu_2) + \beta_2 P_{\lambda_n}(\mu_2)}\left[\dfrac{\partial P_{\lambda_n}(z)}{\partial \lambda} - \dfrac{P_{\lambda_n}(z)}{\left(\alpha_2 P_{\lambda_n}'(\mu_2) + \beta_2 P_{\lambda_n}(\mu_2)\right)}\left(\alpha_2 \dfrac{\partial^2 P_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial \lambda \partial z} + \beta_2 \dfrac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial \lambda}\right)\right] -$ $- \dfrac{1}{\alpha_2 Q_{\lambda_n}'(\mu_2) + \beta_2 Q_{\lambda_n}(\mu_2)}\left[\dfrac{\partial Q_{\lambda_n}(z)}{\partial \lambda} - \dfrac{Q_{\lambda_n}(z)}{\left(\alpha_2 Q_{\lambda_n}'(\mu_2) + \beta_2 Q_{\lambda_n}(\mu_2)\right)}\left(\alpha_2 \dfrac{\partial^2 Q_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial \lambda \partial z} + \beta_2 \dfrac{\partial Q_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial \lambda}\right)\right]$ $\dfrac{\partial^2 \Phi_{\lambda_n}(z)}{\partial \lambda \partial z} = \dfrac{1}{\alpha_2 P_{\lambda_n}'(\mu_2) + \beta_2 P_{\lambda_n}(\mu_2)}\left[\dfrac{\partial^2 P_{\lambda_n}(z)}{\partial \lambda \partial z} - \dfrac{P_{\lambda_n}'(z)}{\left(\alpha_2 P_{\lambda_n}'(\mu_2) + \beta_2 P_{\lambda_n}(\mu_2)\right)}\left(\alpha_2 \dfrac{\partial^2 P_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial \lambda \partial z} + \beta_2 \dfrac{\partial P_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial \lambda}\right)\right] -$ $- \dfrac{1}{\alpha_2 Q_{\lambda_n}'(\mu_2) + \beta_2 Q_{\lambda_n}(\mu_2)}\left[\dfrac{\partial^2 Q_{\lambda_n}(z)}{\partial \lambda \partial z} - \dfrac{Q_{\lambda_n}'(z)}{\left(\alpha_2 Q_{\lambda_n}'(\mu_2) + \beta_2 Q_{\lambda_n}(\mu_2)\right)}\left(\alpha_2 \dfrac{\partial^2 Q_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial \lambda \partial z} + \beta_2 \dfrac{\partial Q_{\lambda_n}(\mu_2)}{\partial \lambda}\right)\right]$ $\left\|\Phi_{\lambda_n}(z)\right\|^2 = \dfrac{\left(\mu_1^2-1\right)\left(\dfrac{\partial \Phi_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial \lambda}\dfrac{\partial \Phi_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial z} - \Phi_{\lambda_n}(\mu_1)\dfrac{\partial^2 \Phi_{\lambda_n}(\mu_1)}{\partial z \partial \lambda}\right)}{(2\lambda_n+1)}$

Problèmes aux limites sur des hyperboloïdes à une nappe, homogènes dans la dimension radiale η, sans dépendance azimutale

Considérations générales

Le choix des solutions suivantes permet de prendre en charge des problèmes aux limites homogène angulaire sur un hyperboloïde de révolution à une nappe :

$$R(\eta) = A\, P_{-\frac{1}{2}+i\tau}\left(iSinh(\eta)\right) + B\, Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}\left(iSinh(\eta)\right)$$

$$\Theta(\theta) = A\, P_{-\frac{1}{2}+i\tau}\left(Cos(\theta)\right) + B\, Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}\left(Cos(\theta)\right)$$

Tel qu'un problème de Dirichlet ou de Neumann sous la forme :

$$\Delta T(\eta,\theta) = 0 \quad (\eta,\theta) \in \left\{-\infty < l_{\eta 1} \le \eta \le l_{\eta 2} < +\infty\,,\, 0 \le \theta < \theta_0\right\} \quad Lim_{\theta\to 0} T(\eta,\theta) \quad finie$$

$$\begin{cases} T(\eta,\theta)\big|_{\eta=l_{\eta 1}} = 0 \\ ou \\ \left.\dfrac{\partial T(\eta,\theta)}{\partial\theta}\right|_{\eta=l_{\eta 1}} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} T(\eta,\theta)\big|_{\eta=l_{\eta 2}} = 0 \\ ou \\ \left.\dfrac{\partial T(\eta,\theta)}{\partial\theta}\right|_{\eta=l_{\eta 2}} = 0 \end{cases} \quad T(\eta,\theta)\big|_{\theta=\theta_0} = f(\eta)$$

La finitude des solutions est gouvernée par les propriétés asymptotiques des fonctions de Legendre de première et deuxième espèce, à degré imaginaire (donc les fonctions coniques de Mehler) et à argument imaginaire, à savoir notamment la valeur en z=+i∞ :

$$\lim_{z\to+\infty} Q_\nu(z) = 0 \quad et \quad \lim_{z\to+\infty} P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(z) = 0$$

.

On sait par ailleurs qu'il n'y a pas de divergence des fonctions coniques de Mehler de première et deuxième espèce en z=0 et d'argument imaginaire contrairement la divergence de la fonction conique de deuxième espèce et d'argument réel pour la valeur z=1. Par contre il faut garder à l'esprit que *la contrainte de régularité du gradient* s'applique ici dans le couple de fonctions radiales et angulaires, lorsque l'origine des coordonnées est incluse dans le domaine :

$$R(\eta)\Theta(\theta) = P_{-\frac{1}{2}+i\tau}\left(iSinh(\eta)\right) P_{-\frac{1}{2}+i\tau}\left(Cos(\theta)\right) \quad problème\ intérieur$$

$$ou\ R(\eta)\Theta(\theta) = Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}\left(iSinh(\eta)\right) P_{-\frac{1}{2}+i\tau}\left(Cos(\theta)\right) \quad problème\ extérieur$$

Commençons par le cas de l'intervalle η € [0,$l_{\eta 0}$]->z=iSinh(η) € [0,i z_0=i Sinh(l_η)] :

La contrainte de régularité du gradient écarte les fonctions de coniques de Mehler de deuxième espèce. Il reste à construire les solutions avec celles de première espèce. La fonction p(x) dans l'expression de l'opérateur de Sturm-Liouville ne s'annule jamais dans l'intervalle considéré. De ce fait le problème de Sturm-Liouville est totalement régulier et l'opérateur de Sturm-Liouville est auto-adjoint. C*e problème de Sturm-Liouville s'écrit comme suit :*

$$\begin{cases} z = iSinh(\eta) \\ (1-z^2)\dfrac{d^2U(z)}{dz^2} - 2z\dfrac{dU(z)}{dz} - \left(\dfrac{1}{4}+\tau^2\right)U(z) = 0 \end{cases} \quad Notation \quad \lambda = -\left(\frac{1}{4}+\tau^2\right) = \nu(\nu+1) \Rightarrow \nu = -\frac{1}{2}+i\tau$$

$$z = i\varsigma \Rightarrow -\frac{d}{d\varsigma}\left((1+\varsigma^2)\frac{dU(\varsigma)}{d\varsigma}\right) - \left(\frac{1}{4}+\tau^2\right)U(\varsigma) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{d\varsigma}\left(p(\varsigma)\frac{dU(\varsigma)}{d\varsigma}\right) + \left[\tilde{\lambda}\, w(\varsigma) - s(\varsigma)\right]U(\varsigma) = 0 \quad p(\varsigma) = 1+\varsigma^2 \quad s(\varsigma) = 0 \quad w(\varsigma) = 1$$

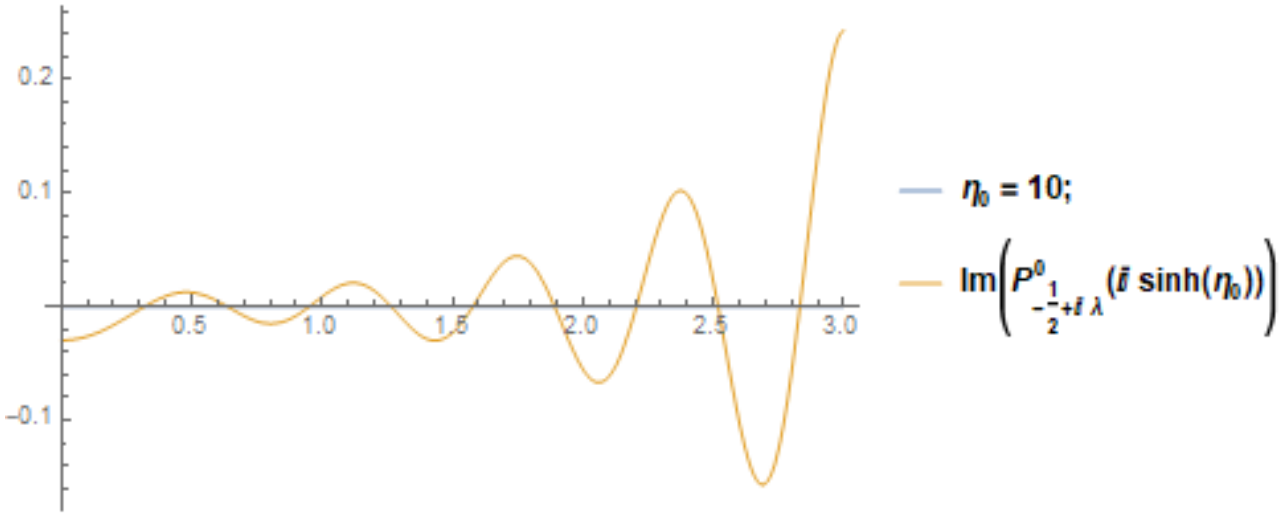
$$\tilde{\lambda} = -\lambda = \frac{1}{4}+\tau^2 = \left(\frac{1}{2}-i\tau\right)\left(\frac{1}{2}+i\tau\right)$$

Il existe donc un système de fonctions propres complet et orthogonal pour un problème aux limites homogène radial de ce type. Les valeurs propres de Sturm-Liouville sont négatives ce qui conduit pour les fonctions de Legendre à des valeurs propres discrètes imaginaires, celles du paramètres τ des fonctions coniques de Mehler. Par construction le choix se porte sur la partie imaginaire des fonctions coniques de Mehler, car elles s'annulent en η=0, et les solutions de l'équation transcendantale suivante existent :

$$\tau_n \quad tel\ que\ \mathrm{Im}\left(P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(iSinh(l_\eta))\right) = \frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(iSinh(l_\eta)) - P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(-iSinh(l_\eta))}{2i} = 0 \quad z_0 = iSinh(l_\eta)$$

Par exemple pour une valeur z0=i Sinh(1), il vient les cinq premières valeurs propres suivantes , τn=3.17235,6.2984,9.4349,12.574,15.714,18.8546,21.9955,25.1365,28.2777,31.419...

Pour illustration voici le graphe de la fonctions propre selon le paramètre τ :



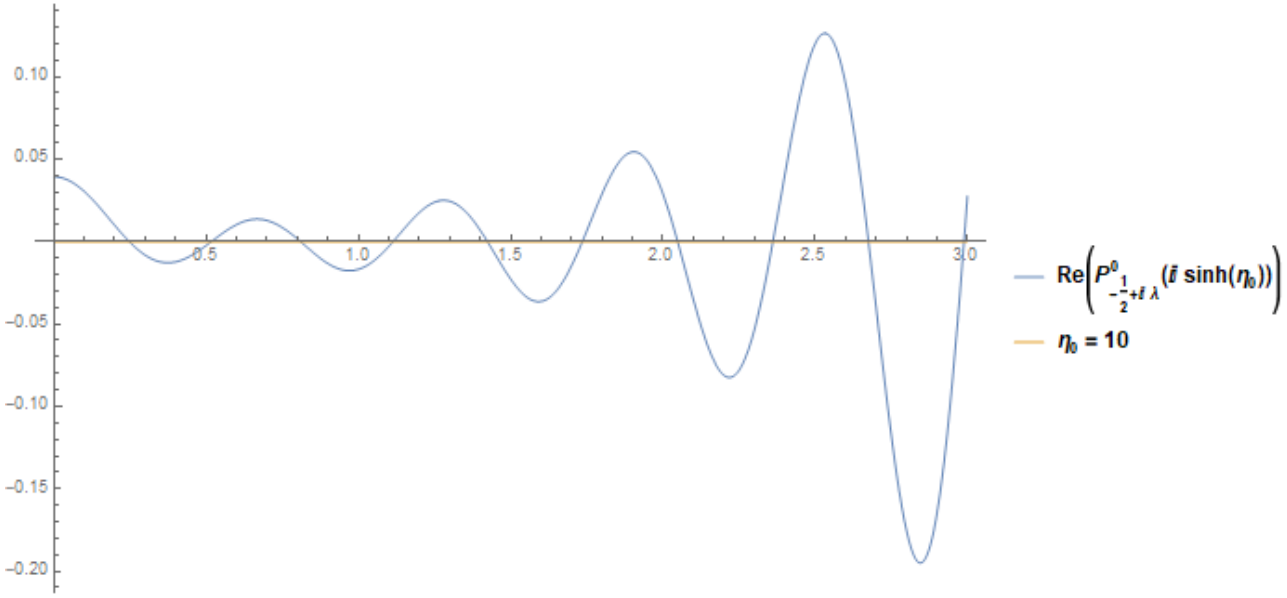
Cas de l'intervalle η € [-$l_{\eta 0}$,$l_{\eta 0}$]->z=iSinh(η) € [-i z_0=-i Sinh(l_η),i z_0=i Sinh(l_η)] :

Par construction le choix se porte sur la partie réelle des fonctions coniques de Mehler, car ce sont des fonctions paires et assurent ainsi l'annulation sur les deux bords du domaine, et les solutions de l'équation transcendantale suivante existent :

$$\tau_n \quad tel\ que\ \mathrm{Re}\left(P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}\left(iSinh(l_\eta)\right)\right)=\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}\left(iSinh(l_\eta)\right)+P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}\left(-iSinh(l_\eta)\right)}{2}=0 \quad z_0=iSinh(l_\eta)$$

Par exemple pour une valeur z0=i Sinh(1), il vient les premières valeurs propres suivantes , τn=1.64018,4.73274,7.86614,11.0042,14.1439,17.2843,20.425,23.566,26.7071,29.8483...

Pour illustration voici le graphe de la fonctions propre selon le paramètre τ :



.

Cas de l'intervalle η € [$l_{\eta 1}$,$l_{\eta 2}$]->z=iSinh(η) € [z1=i Sinh($l_{\eta 1}$), z2=i Sinh($l_{\eta 2}$)] :

On note les deux fonctions linéairement indépendantes comme suit :

$$P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}\left(i\ Sinh(\eta)\right)=\mathrm{Re}\left(P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}\left(i\ Sinh(\eta)\right)\right)=\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}\left(i\ Sinh(\eta)\right)+P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}\left(-i\ Sinh(\eta)\right)}{2}$$

$$P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}\left(i\ Sinh(\eta)\right)=\mathrm{Im}\left(P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}\left(i\ Sinh(\eta)\right)\right)=\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}\left(i\ Sinh(\eta)\right)-P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}\left(-i\ Sinh(\eta)\right)}{2i}$$

Dans ce cas le problème de Sturm-Liouville devient régulier avec des valeurs propres négatives (entraînant des paramètres imaginaires pour les fonctions propres), il existe un spectre discret de valeurs propres et un système orthogonal et complet de fonctions propres . Les valeurs propres peut être construites par la résolution d'une équation transcendantale comme suit pour un problème homogène de Dirichlet en lη1 et lη2:

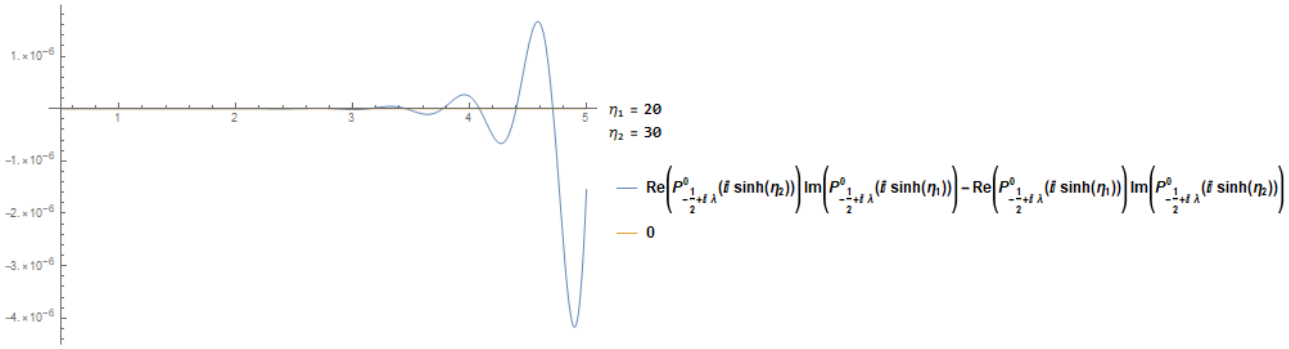
$$\tau_n \quad tel\ que\ \frac{P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}\left(i\ Sinh(l_{\eta 1})\right)}{P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}\left(i\ Sinh(l_{\eta 2})\right)}=\frac{P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}\left(i\ Sinh(l_{\eta 1})\right)}{P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}\left(i\ Sinh(l_{\eta 2})\right)}$$

.

Contentons-nous de ce cas de figure sachant que les équations transcendantales dans le cas des conditions homogènes de Neumann, ou combinées Dirichlet/Neumann ne sont pas beaucoup plus difficile à obtenir. Même si cela n'est pas une preuve, voici le graphe de l'équation transcendantale en tant que fonction du paramètre τ, les solutions étant l'ensemble des points d'intersection avec l'axe des abscisse :

$l_{\eta 1} = 20 \quad l_{\eta 2} = 30$

$$F(\tau, l_{\eta 1}, l_{\eta 2}) = P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(iSinh(l_{\eta 2}))P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(iSinh(l_{\eta 1})) - P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(iSinh(l_{\eta 1}))P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(iSinh(l_{\eta 2}))$$



Pour l'exemple pour les valeur $l_{\eta 1} = 20 \quad l_{\eta 2} = 30$, voici le jeu de valeurs propres τ_n : 0.314159,0.628319,0.942478,1.25664,1.5708,1.88496,2.19911,2.51327,2.82743,3.14159

<u>Cas de l'intervalle η € [-∞,+∞]->z=iSinh(η) € [-i ∞,+i ∞] :</u>

Dans ce cas il n'est pas possible de construire un système discret et complet de fonctions propres. Toutes les fonctions construites à partir des parties réelle et imaginaire de la fonction conique de première espèce possèdent les bonnes propriétés sur les deux bornes de l'intervalle. *Dans ces conditions toutes les valeurs de τ sont licites pour construire une solution. Tout se passe donc comme si les valeurs propres possédaient un spectre continu*. L'on peut s'inspirer de la forme des solutions préconisées par la séparation des variables par un développement intégral et non pas sous forme de série, grâce à l'existence de la transformation intégrale de Mehler-Fock.

<u>Cas de l'intervalle η € [$l_{\eta 0}$,+∞] ou [-∞,$l_{\eta 0}$]->z=iSinh(η) € [z0=iSinh($l_{\eta 0}$) , +i ∞] ou [-i ∞ ,z0=iSinh($l_{\eta 0}$)] :</u>

Cette fois-ci, les deux fonctions de coniques de Mehler de première espèce et deuxième espèce s'annulent en z=+∞. *Dans ces conditions toutes les valeurs de τ sont licites pour construire une solution. Tout se passe donc comme si les valeurs propres possédaient un spectre continu. Il suffit de choisir la fonction suivante pour respecter la condition aux limites homogène et la condition à l'infini:*

$$\Phi_\tau(\eta) = P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(iSinh(\eta))P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(iSinh(l_\eta)) - P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(iSinh(\eta))P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(Cosh(l_\eta))$$

$$\Rightarrow \Phi_\tau(l_\eta) = 0$$

Quand bien il existe également un spectre discret de fonctions propres qui respectent également les conditions aux limites. Ces valeurs propres discrètes sont solutions de l'une des deux équations transcendantale :

$$\tau_n \quad tel\ que\ \mathrm{Re}\left(P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}\left(iSinh\left(l_\eta\right)\right)\right)=\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}\left(iSinh\left(l_\eta\right)\right)+P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}\left(-iSinh\left(l_\eta\right)\right)}{2}=0$$

$$\tau_n \quad tel\ que\ \mathrm{Im}\left(P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}\left(iSinh\left(l_\eta\right)\right)\right)=\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}\left(iSinh\left(l_\eta\right)\right)-P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}\left(-iSinh\left(l_\eta\right)\right)}{2i}=0$$

Dans ce cas il n'est encore pas possible de construire un système discret et complet de fonctions propres. En s'inspirant de la forme des solutions préconisées par la séparation des variables, on développe une intégrale proche de la formulation de la transformation intégrale de Mehler-Fock.

Revenons aux cas des problèmes aux limites sur des intervalles finis

<u>Problème aux limites sur les intervalles η € [$l_{\eta 0}$,+∞] ou [-∞,$l_{\eta 0}$]->z=iSinh(η) € [z0=iSinh($l_{\eta 0}$) , +i ∞] ou [-i ∞ ,z0=iSinh($l_{\eta 0}$)] :</u>

La solution d'un problème aux limites de Dirichlet de la forme :

$$\Delta T(\eta,\theta)=0 \quad \begin{cases}(\eta,\theta)\in\left\{l_{\eta 0}\le\eta<+\infty,0\le\theta<\theta_0\right\}\\(\eta,\theta)\in\left\{-\infty<\eta\le l_{\eta 0},0\le\theta<\theta_0\right\}\end{cases} \quad Lim_{\substack{\theta\to 0\\ ou\\ \eta\to+\infty\\ ou\\ \eta\to-\infty}}\ T(\eta,\theta) \quad finie$$

$$T(\eta,\theta)\big|_{\eta=l_{\eta 0}}=0 \quad T(\eta,\theta)\big|_{\theta=\theta_0}=f(\eta)$$

est construite à partir d'une représentation intégrale de type de Mehler-Fock (voir plus loin).

<u>Problème aux limites sur l'intervalle η € [-∞,+∞]->z=iSinh(η) € [-i ∞,+i ∞] :</u>

La solution d'un problème aux limites de Dirichlet de la forme :

$$\Delta T(\eta,\theta)=0 \quad (\eta,\theta)\in\left\{-\infty<\eta<+\infty,0\le\theta<\theta_0\right\} \quad Lim_{\substack{\theta\to 0\\ ou\\ \eta\to+\infty\\ ou\\ \eta\to-\infty}}\ T(\eta,\theta) \quad finie$$

$$T(\eta,\theta)\big|_{\theta=\theta_0}=f(\eta)$$

est construite à partir d'une représentation intégrale de type de Mehler-Fock (voir plus loin).

Problème aux limites sur l'intervalle η € [0,$l_{\eta 0}$]->z=iSinh(η) € [0,i z_0=i Sinh(l_η)] :

Revenons aux cas d'un intervalle fini du problème aux limites. La solution d'un problème aux limites de Dirichlet de la forme :

$$\Delta T(\eta,\theta)=0 \quad (\eta,\theta)\in\{0\le\eta\le l_{\eta 0}, 0\le\theta<\theta_0\} \quad Lim_{\substack{\theta\to 0\\ \eta\to 0}} T(\eta,\theta) \quad finie$$

$$T(\eta,\theta)\big|_{\eta=0}=0 \quad T(\eta,\theta)\big|_{\eta=l_{\eta 0}}=0 \quad T(\eta,\theta)\big|_{\theta=\theta_0}=f(\eta)$$

est alors la suivante :

$$\Phi_{\tau_n}(\eta)=P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(iSinh(\eta))=\mathrm{Im}\left(P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(iSinh(\eta))\right) \qquad \mu_0=Cos(\theta_0)$$

$$\tau_n \quad tel\ que \quad P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(iSinh(l_{\eta 0}))=0$$

$$\left\|\Phi_{\tau_n}(\eta)\right\|^2=\int_0^{l_{\eta 0}} d\eta\ Cosh(\eta)(\Phi_{\tau_n}(\eta))^2 \quad B_n=\int_0^{l_{\eta 0}} d\eta\ Cosh(\eta)f(\eta)P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(iSinh(\eta))$$

$$T(\eta,\theta)=\sum_{n\neq 0,+\infty}\frac{B_n}{\left\|\Phi_{\tau_n}(\eta)\right\|^2}P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(iSinh(\eta))\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(Cos(\theta))}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(\mu_0)}$$

Comment calculer les normes de ces fonctions propres ? En revenant à un procédé classique de variation du paramètre, on peut tenter de trouver une expression de cette norme :

$$\varsigma=Sinh(\eta) \quad \begin{cases}\dfrac{d}{d\varsigma}\left((1+\varsigma^2)\dfrac{dy_1(\varsigma)}{d\varsigma}\right)+\left(\dfrac{1}{4}+\tau_1{}^2\right)y_1(\varsigma)=0\\ \dfrac{d}{d\varsigma}\left((1+\varsigma^2)\dfrac{dy_2(\varsigma)}{d\varsigma}\right)+\left(\dfrac{1}{4}+\tau_2{}^2\right)y_2(\varsigma)=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\left[(1+\varsigma^2)(y_2(\varsigma)y_1'(\varsigma)-y_1(\varsigma)y_2'(\varsigma))\right]_{\varsigma_1}^{\varsigma_2}+(\tau_1-\tau_2)(\tau_1+\tau_2)\int_{\varsigma_1}^{\varsigma_2}d\varsigma\ y_1(\varsigma)y_2(\varsigma)=0$$

$$Si \quad \tau_1\neq\tau_2\Rightarrow\begin{cases}\left[(1+\varsigma^2)(y_2(\varsigma)y_1'(\varsigma)-y_1(\varsigma)y_2'(\varsigma))\right]_{\varsigma_1}^{\varsigma_2}=0\\ \int_{\varsigma_1}^{\varsigma_2}d\varsigma\ y_1(\varsigma)y_2(\varsigma)=0\Rightarrow orthogonalité\Rightarrow\int_{\eta_1}^{\eta_2}d\eta\ Cosh(\eta)\,y_1(iSinh(\eta))y_2(iSinh(\eta))=0\end{cases}$$

$$Si \quad \tau=\tau_1\approx\tau_2\Rightarrow$$

$$\tau_2=\tau_1+d\tau \quad y_2(\varsigma)\approx y_1(\varsigma)+d\tau\frac{\partial y_1(\varsigma)}{d\tau} \quad y_2'(\varsigma)\approx y_1'(\varsigma)+d\tau\frac{\partial^2 y_1(\varsigma)}{d\tau\,\partial\varsigma} \quad puis \quad y_1(\varsigma)=y(\varsigma)$$

Développement au premier ordre de $d\tau$

$$\Rightarrow\left[(1+\varsigma^2)\left(\left(y_1(\varsigma)+d\tau\frac{\partial y_1(\varsigma)}{\partial\tau}\right)y_1'(\varsigma)-y_1(\varsigma)\left(y_1'(\varsigma)+d\tau\frac{\partial^2 y_1(\varsigma)}{d\tau\,\partial\varsigma}\right)\right)\right]_{\varsigma_1}^{\varsigma_2}-d\tau(2\tau_1+d\tau)\int_{\varsigma_1}^{\varsigma_2}d\varsigma\ y_1(\varsigma)y_2(\varsigma)=0$$

$$\Rightarrow d\tau\left[(1+\varsigma^2)\left(\frac{\partial y_1(\varsigma)}{\partial\tau}y_1'(\varsigma)-y_1(\varsigma)\frac{\partial^2 y_1(\varsigma)}{\partial\tau\,\partial\varsigma}\right)\right]_{\varsigma_1}^{\varsigma_2}=d\tau\,2\tau\int_{\varsigma_1}^{\varsigma_2}d\varsigma\ y_1(\varsigma)y_2(\varsigma)$$

$$\Rightarrow\int_{\varsigma_1}^{\varsigma_2}d\varsigma\ (y(\varsigma))^2=\frac{1}{2\tau}\left[(1+\varsigma^2)\left(\frac{\partial y(\varsigma)}{\partial\tau}\frac{\partial y(\varsigma)}{d\varsigma}-y(\varsigma)\frac{\partial^2 y(\varsigma)}{\partial\tau\,\partial\varsigma}\right)\right]_{\varsigma_1}^{\varsigma_2}$$

Appliqué aux fonctions propres cela donne :

$$\Phi_{\tau_n}(\eta) = P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(iSinh(\eta)) \quad \varsigma = Sinh(\eta) \Rightarrow d\varsigma = Cosh(\eta)d\eta$$

$$\left\|\Phi_{\tau_n}(\eta)\right\|^2 = \int_0^{l_{\eta 0}} d\eta\, Cosh(\eta)\left(\Phi_{\tau_n}(\eta)\right)^2 = \frac{1}{2\tau_n}\left[Cosh(\eta)\left(\frac{\partial\Phi_{\tau_n}(\eta)}{\partial\eta}\frac{\partial\Phi_{\tau_n}(\eta)}{\partial\tau} - \Phi_{\tau_n}(\eta)\frac{\partial^2\Phi_{\tau_n}(\eta)}{\partial\eta\,\partial\tau}\right)\right]_0^{l_{\eta 0}}$$

$$\begin{cases} Dirichlet \quad Si \quad \Phi_{\tau_n}(0) = \Phi_{\tau_n}(l_{\eta 0}) = 0 \Rightarrow \left\|\Phi_{\tau_n}(\eta)\right\|^2 = \dfrac{1}{2\tau_n}\left[Cosh(\eta)\dfrac{\partial\Phi_{\tau_n}(\eta)}{\partial\eta}\dfrac{\partial\Phi_{\tau_n}(\eta)}{\partial\tau}\right]_0^{l_{\eta 0}} \\ Neumann \quad Si \quad \dfrac{\partial\Phi_{\tau_n}(\eta)}{\partial\eta}(0) = \dfrac{\partial\Phi_{\tau_n}(\eta)}{\partial\eta}(l_{\eta 0}) = 0 \Rightarrow \left\|\Phi_{\tau_n}(\eta)\right\|^2 = -\dfrac{1}{2\tau_n}\left[Cosh(\eta)\Phi_{\tau_n}(\eta)\dfrac{\partial^2\Phi_{\tau_n}(\eta)}{\partial\eta\,\partial\tau}\right]_0^{l_{\eta 0}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Dirichlet \quad Si \quad \Phi_{\tau_n}(0) = \Phi_{\tau_n}(l_{\eta 0}) = 0 \\ \Rightarrow \left\|\Phi_{\tau_n}(\eta)\right\|^2 = \dfrac{1}{2\tau_n}\left\{Cosh(l_{\eta 0})\dfrac{\partial\Phi_{\tau_n}(l_{\eta 0})}{\partial\eta}\dfrac{\partial\Phi_{\tau_n}(l_{\eta 0})}{\partial\tau} - \dfrac{\partial\Phi_{\tau_n}(0)}{\partial\eta}\dfrac{\partial\Phi_{\tau_n}(0)}{\partial\tau}\right\} \\ Neumann \quad Si \quad \dfrac{\partial\Phi_{\tau_n}(\eta)}{\partial\eta}(0) = \dfrac{\partial\Phi_{\tau_n}(\eta)}{\partial\eta}(l_{\eta 0}) = 0 \\ \Rightarrow \left\|\Phi_{\tau_n}(\eta)\right\|^2 = \dfrac{1}{2\tau_n}\left[\Phi_{\tau_n}(0)\dfrac{\partial^2\Phi_{\tau_n}(0)}{\partial\eta\,\partial\tau} - Cosh(l_{\eta 0})\Phi_{\tau_n}(l_{\eta 0})\dfrac{\partial^2\Phi_{\tau_n}(l_{\eta 0})}{\partial\eta\,\partial\tau}\right] \end{cases}$$

.

Pour ce problème de Dirichlet c'est encore plus particulièrement :

$$\Phi_{\tau_n}(l_{\eta 0})=0 \Rightarrow \left\|\Phi_{\tau_n}(\eta)\right\|^2=\left\|P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(iSinh(\eta))\right\|^2=\frac{1}{2\tau_n}\left\{Cosh(l_{\eta 0})\frac{\partial\Phi_{\tau_n}(l_{\eta 0})}{\partial\eta}\frac{\partial\Phi_{\tau_n}(l_{\eta 0})}{\partial\tau}-\frac{\partial\Phi_{\tau_n}(0)}{\partial\eta}\frac{\partial\Phi_{\tau_n}(0)}{\partial\tau}\right\}$$

$$\Phi_{\tau_n}(\eta)=\mathrm{Im}\left(P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z)\right)\quad \left.\begin{matrix} z=iSinh(\eta) \\ x=Sinh(\eta)\end{matrix}\right\}\quad dx=Cosh(\eta)d\eta \Rightarrow Cosh(\eta)\frac{\partial\Phi_{\tau_n}(\eta)}{\partial\eta}=Cosh^2(\eta)\frac{dP^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(ix)}{dx}$$

$$\frac{dP_\nu(z)}{dz}=\frac{\nu}{z^2-1}\left(zP_\nu(z)-P_{\nu-1}(z)\right)\quad ici\quad z\quad purement\,imaginaire\quad et\quad \mathrm{Im}(P_\nu(z))=0$$

$$Supposons\ z=ix\quad x=Sinh(\eta)\quad P_\nu(ix)=\mathrm{Re}(P_\nu(ix))+i\,\mathrm{Im}(P_\nu(ix))\qquad \nu=-\frac{1}{2}+i\tau_n$$

$$\frac{dP_\nu(ix)}{dz}=\frac{d\,\mathrm{Re}(P_\nu(ix))}{idx}+\frac{d\,\mathrm{Im}(P_\nu(ix))}{dx}=\frac{d\,\mathrm{Im}(P_\nu(ix))}{dx}-i\frac{d\,\mathrm{Re}(P_\nu(ix))}{dx}\Rightarrow\left\{\begin{matrix}\dfrac{d\,\mathrm{Im}(P_\nu(ix))}{dx}=\mathrm{Re}\left(\dfrac{dP_\nu(ix)}{dz}\right)\\ \dfrac{d\,\mathrm{Re}(P_\nu(ix))}{dx}=-\mathrm{Im}\left(\dfrac{dP_\nu(ix)}{dz}\right)\end{matrix}\right.$$

$$\frac{d\,\mathrm{Im}(P_\nu(ix))}{dx}=\mathrm{Re}\left(\frac{dP_\nu(z)}{dz}\right)=\mathrm{Re}\left(\frac{\nu}{z^2-1}\left(zP_\nu(z)-P_{\nu-1}(z)\right)\right)=\frac{1}{z^2-1}\left(\mathrm{Re}(\nu\, zP_\nu(z))-\mathrm{Re}(\nu\, P_{\nu-1}(z))\right)$$

$$\mathrm{Re}(\nu\, zP_\nu(z))=-\mathrm{Re}\left(\left(\frac{ix}{2}+x\tau_n\right)P_\nu(z)\right)=\frac{x}{2}\mathrm{Im}(P_\nu(z))-x\tau_n\,\mathrm{Re}(P_\nu(z))=\mathrm{Im}(z)\left(\frac{\mathrm{Im}(P_\nu(z))}{2}-\tau_n\,\mathrm{Re}(P_\nu(z))\right)$$

$$\mathrm{Re}(\nu\, P_{\nu-1}(z))=\mathrm{Re}\left(\left(-\frac{1}{2}+i\tau_n\right)P_{\nu-1}(z)\right)=-\left(\frac{1}{2}\mathrm{Re}(P_{\nu-1}(z))+\tau_n\,\mathrm{Im}(P_{\nu-1}(z))\right)\qquad \frac{d\,\mathrm{Im}\left(P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(i0)\right)}{dx}=\mathrm{Re}\left(\nu\, P_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(0)\right)$$

$$\frac{d\,\mathrm{Im}\left(P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(iSinh(l_{\eta 0}))\right)}{dx}=-\frac{1}{Cosh^2(l_{\eta 0})}\left(\mathrm{Re}\left(\nu\, z_0P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_0)\right)-\mathrm{Re}\left(\nu\, P_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z)\right)\right)$$

$$\left.\begin{matrix}\mathrm{Im}(P_\nu(z_0))=0\quad z_0=iSinh(l_{\eta 0})\\ x_0=Sinh(l_{\eta 0})\\ z^2-1=-Cosh^2(\eta)\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{matrix}\mathrm{Re}\left(\nu\, z_0P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_0)\right)=-\tau_nSinh(l_{\eta 0})\mathrm{Re}\left(P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_0)\right)\\ \mathrm{Re}\left(\nu\, P_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z)\right)=-\left(\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(P_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z)\right)+\tau_n\,\mathrm{Im}\left(P_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z)\right)\right)\end{matrix}\right.$$

.

Pour la valeur en z =0, il vient :

$$\mathrm{Im}\left(P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(0)\right)=0 \qquad \mathrm{Re}\left(P_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(0)\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{\mathrm{Re}\left(\Gamma\left(\frac{5}{4}-\frac{i\tau_n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{i\tau_n}{2}\right)\right)} \qquad \mathrm{Im}\left(P_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(0)\right)=0$$

$$\Gamma\left(\frac{5}{4}-\frac{i\tau_n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{i\tau_n}{2}\right)=\left(\frac{1}{4}-\frac{i\tau_n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}-\frac{i\tau_n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{i\tau_n}{2}\right)=\left(\frac{1}{4}-\frac{i\tau_n}{2}\right)\left|\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{i\tau_n}{2}\right)\right|^2$$

$$P_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(0)=\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{5}{4}-\frac{i\tau_n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{i\tau_n}{2}\right)}=\frac{\sqrt{\pi}}{\left(\frac{1}{4}-\frac{i\tau_n}{2}\right)\left|\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{i\tau_n}{2}\right)\right|^2}=\frac{4(1+2i\tau_n)\sqrt{\pi}}{\left(1+4\tau_n{}^2\right)\left|\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{i\tau_n}{2}\right)\right|^2}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}+i\tau_n\right)P_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(0)=\frac{\sqrt{\pi}}{\left|\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{i\tau_n}{2}\right)\right|^2}\Rightarrow 4\left(\frac{1}{2}-i\tau_n\right)P_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(0)=\frac{8\sqrt{\pi}}{\left|\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{i\tau_n}{2}\right)\right|^2}$$

$$\Rightarrow \nu\, P_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(0)=\mathrm{Re}\left(\nu\, P_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(0)\right)=-\frac{2\sqrt{\pi}}{\left|\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{i\tau_n}{2}\right)\right|^2} \qquad \mathrm{Re}\left(P_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(0)\right)=\frac{4\sqrt{\pi}}{\left(1+4\tau_n{}^2\right)\left|\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{i\tau_n}{2}\right)\right|^2}$$

Ce qui permet de calculer la norme comme suit :

$$\Rightarrow \frac{d\,\mathrm{Im}(P_\nu(ix_0))}{dx}=-\frac{1}{Cosh^2(\eta)}\left(-\tau_n Sinh(l_{\eta 0})\mathrm{Re}\left(P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_0)\right)+\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(P_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z)\right)+\tau_n\,\mathrm{Im}\left(P_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z)\right)\right)$$

$$\Rightarrow\begin{cases} Cosh^2(l_{\eta 0})\dfrac{dP^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(ix_0)}{dx}=\tau_n Sinh(l_{\eta 0})\mathrm{Re}\left(P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(ix_0)\right)-\tau_n\,\mathrm{Im}\left(P_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(ix_0)\right)-\dfrac{1}{2}\mathrm{Re}\left(P_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(ix_0)\right) \\ \dfrac{dP^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(i0)}{dx}=-\dfrac{2\sqrt{\pi}}{\left|\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{i\tau_n}{2}\right)\right|^2} \end{cases}$$

.

Ce qui donne le résultat de la norme des fonctions propres :

$$\Rightarrow \left\|\Phi_{\tau_n}(\eta)\right\|^2=\frac{1}{2\tau_n}\left(\begin{array}{l}\tau_n Sinh(l_{\eta 0})\mathrm{Re}\left(P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(iSinh(l_{\eta 0}))\right)-\tau_n\,\mathrm{Im}\left(P_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(iSinh(l_{\eta 0}))\right)-\dfrac{1}{2}\mathrm{Re}\left(P_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(iSinh(l_{\eta 0}))\right)\times \\ \times\dfrac{\partial\,\mathrm{Im}\left(P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(iSinh(l_{\eta 0}))\right)}{\partial\tau}+\dfrac{2\sqrt{\pi}}{\left|\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{i\tau_n}{2}\right)\right|^2}\dfrac{\partial\,\mathrm{Im}\left(P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(i0)\right)}{\partial\tau}\end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \left\|\Phi_{\tau_n}(\eta)\right\|^2=\frac{1}{2\tau_n}\left\{\begin{array}{l}\tau_n Sinh(l_{\eta 0})P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(iSinh(l_{\eta 0}))-\tau_n P^{imag}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(iSinh(l_{\eta 0}))-\dfrac{1}{2}P^{réel}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(iSinh(l_{\eta 0}))\times \\ \times\dfrac{\partial P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(iSinh(l_{\eta 0}))}{\partial\tau}+\dfrac{2\sqrt{\pi}}{\left|\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{i\tau_n}{2}\right)\right|^2}\dfrac{\partial P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(0)}{\partial\tau}\end{array}\right\}$$

.

Les coefficients B se calculent comme suit, lorsque la fonction limite a une valeur constante T_0:

$$B_n = \int_0^{l_{\eta 0}} d\eta\ Cosh(\eta) f(\eta) P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(iSinh(\eta)) \qquad \tau_n \quad tel\ que \quad P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(iSinh(l_{\eta 0})) = 0$$

$$Comme \quad \int_{z_1}^{z_2} dz\ P_\nu(z) = \left[\frac{P_{\nu+1}(z) - P_{\nu-1}(z)}{2\nu+1}\right]_{z_1}^{z_2} = \left[\frac{P_{\nu+1}(z) - zP_\nu(z)}{\nu}\right]_{z_1}^{z_2} = \left[\frac{zP_\nu(z) - P_{\nu-1}(z)}{\nu+1}\right]_{z_1}^{z_2}$$

$$Si \quad f(\eta) = T_0 \Rightarrow B_n = T_0 \int_0^{l_{\eta 0}} d\eta\ Cosh(\eta)\, P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(iSinh(\eta)) = T_0\, \mathrm{Im}\left(\int_0^{l_{\eta 0}} d\eta\ Cosh(\eta)\, P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(iSinh(\eta))\right)$$

$$= -T_0\, \mathrm{Im}\left(i\int_0^{z_0} dz\ P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z)\right) = -T_0\, \mathrm{Re}\left(\int_0^{z_0} dz\ P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z)\right) = -T_0\, \mathrm{Re}\left(\left[\frac{zP_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z) - P_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z)}{\frac{1}{2}+i\tau_n}\right]_0^{z_0}\right)$$

$$= -\frac{T_0}{1+4\tau_n{}^2}\mathrm{Re}\left((2-4i\tau_n)\left(iSinh(l_{\eta 0})P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(iSinh(l_{\eta 0})) - P_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(iSinh(l_{\eta 0})) + P_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(i0)\right)\right)$$

$$= -\frac{T_0}{1+4\tau_n{}^2}\left(\begin{array}{l} \dfrac{8\sqrt{\pi}}{\left|\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{i\tau_n}{2}\right)\right|^2} - 2\,\mathrm{Re}\left(P_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(iSinh(l_{\eta 0}))\right) - 4\tau_n\,\mathrm{Im}\left(P_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(iSinh(l_{\eta 0}))\right) \\ -2Sinh(l_{\eta 0})\mathrm{Im}\left(P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(iSinh(l_{\eta 0}))\right) + 4\tau_n Sinh(l_{\eta 0})\mathrm{Re}\left(P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(iSinh(l_{\eta 0}))\right) \end{array}\right)$$

$$= -\frac{T_0}{1+4\tau_n{}^2}\left(\begin{array}{l} \dfrac{8\sqrt{\pi}}{\left|\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{i\tau_n}{2}\right)\right|^2} - 2\,\mathrm{Re}\left(P_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(iSinh(l_{\eta 0}))\right) - 4\tau_n\,\mathrm{Im}\left(P_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(iSinh(l_{\eta 0}))\right) + \\ +4\tau_n Sinh(l_{\eta 0})\mathrm{Re}\left(P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(iSinh(l_{\eta 0}))\right) \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow B_n = -\frac{T_0}{1+4\tau_n{}^2}\left(\begin{array}{l} \dfrac{8\sqrt{\pi}}{\left|\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{i\tau_n}{2}\right)\right|^2} - 2\,\mathrm{Re}\left(P_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(iSinh(l_{\eta 0}))\right) - 4\tau_n\,\mathrm{Im}\left(P_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(iSinh(l_{\eta 0}))\right) + \\ +4\tau_n Sinh(l_{\eta 0})\mathrm{Re}\left(P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(iSinh(l_{\eta 0}))\right) \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow B_n = -\frac{T_0}{1+4\tau_n{}^2}\left(\frac{8\sqrt{\pi}}{\left|\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{i\tau_n}{2}\right)\right|^2} - 2P^{réel}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(iSinh(l_{\eta 0})) - 4\tau_n P^{imag}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(iSinh(l_{\eta 0})) + 4\tau_n Sinh(l_{\eta 0})P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(iSinh(l_{\eta 0}))\right)$$

.

Tout cela donne formellement la solution du problème pour une fonction limite constante de valeur T_0, comme suit :

$$\Phi_{\tau_n}(\eta) = P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(iSinh(\eta)) = \mathrm{Im}\left(P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(iSinh(\eta))\right) \qquad \mu_0 = Cos(\theta_0) \qquad \tau_n \quad tel\ que \quad P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(iSinh(l_{\eta 0})) = 0$$

$$\left\|\Phi_{\tau_n}(\eta)\right\|^2 = \int_0^{l_{\eta 0}} d\eta\ Cosh(\eta)\left(\Phi_{\tau_n}(\eta)\right)^2 \quad ou\ bien$$

$$\left\|\Phi_{\tau_n}(\eta)\right\|^2 = \frac{1}{2\tau_n}\left\{\begin{array}{l}\left\{\tau_n\left[Sinh(l_{\eta 0})P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(iSinh(l_{\eta 0})) - P^{imag}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(iSinh(l_{\eta 0}))\right] - \frac{1}{2}P^{réel}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(iSinh(l_{\eta 0}))\right\}\times \\ \times\dfrac{\partial P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(iSinh(l_{\eta 0}))}{\partial\tau} + \dfrac{2\sqrt{\pi}}{\left|\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{i\tau_n}{2}\right)\right|^2}\dfrac{\partial P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(0)}{\partial\tau}\end{array}\right\}$$

$$B_n = -\frac{T_0}{1+4\tau_n{}^2}\left(\frac{8\sqrt{\pi}}{\left|\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{i\tau_n}{2}\right)\right|^2} - 2P^{réel}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(iSinh(l_{\eta 0})) - 4\tau_n P^{imag}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(iSinh(l_{\eta 0})) + 4\tau_n Sinh(l_{\eta 0})P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(iSinh(l_{\eta 0}))\right)$$

$$\Rightarrow T(\eta,\theta) = \sum_{n\neq 0,+\infty}\frac{B_n}{\left\|\Phi_{\tau_n}(\eta)\right\|^2}\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(Cos(\theta))}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(\mu_0)}P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(iSinh(\eta))$$

<u>*Pour un problème aux limites sur une section angulaire de la forme*</u>

$$\Delta T(\eta,\theta)=0 \quad (\eta,\theta)\in\{0<\eta\le l_{\eta 0},\theta_1\le\theta<\theta_2\} \quad Lim_{\eta\to 0}T(\eta,\theta) \quad finie$$

$$T(\eta,\theta)\big|_{\eta=l_{\eta 0}}=0 \quad T(\eta,\theta)\big|_{\theta=\theta_1}=f_1(\eta) \quad T(\eta,\theta)\big|_{\theta=\theta_2}=f_2(\eta)$$

Les calculs sont tout à fait similaires aux problèmes précédents, avec des fonctions angulaires différentes. La solution générale est de la forme :

$$\Phi_{\tau_n}(\eta)=P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(iSinh(\eta)) \quad \left\|\Phi_{\tau_n}(\eta)\right\|^2=\int_0^{l_{\eta 0}}d\eta\, Cosh(\eta)\left(\Phi_{\tau_n}(\eta)\right)^2 \quad \mu_1=Cos(\theta_1) \quad \mu_2=Cos(\theta_2)$$

$$\left\|\Phi_{\tau_n}(\eta)\right\|^2=\frac{1}{2\tau_n}\left\{\begin{array}{l}\left\{\tau_n\left[Sinh(l_{\eta 0})P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(iSinh(l_{\eta 0}))-P^{imag}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(iSinh(l_{\eta 0}))\right]-\frac{1}{2}P^{réel}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(iSinh(l_{\eta 0}))\right\}\times\\ \times\dfrac{\partial P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(iSinh(l_{\eta 0}))}{\partial\tau}+\dfrac{2\sqrt{\pi}}{\left|\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{i\tau_n}{2}\right)\right|^2}\dfrac{\partial P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(0)}{\partial\tau}\end{array}\right\}$$

$$B_{1n}=\int_0^{l_{\eta 0}}d\eta\, Cosh(\eta)f_1(\eta)P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(iSinh(\eta)) \qquad B_{2n}=\int_0^{l_{\eta 0}}d\eta\, Cosh(\eta)f_2(\eta)P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(iSinh(\eta))$$

$$T(\eta,\theta)=\sum_{n\neq 0,+\infty}\frac{\left(\begin{array}{l}B_{1n}\left\{\dfrac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(Cos(\theta))}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(\mu_2)}-\dfrac{Q^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(Cos(\theta))}{Q^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(\mu_2)}\right\}-\\ -B_{2n}\dfrac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(\mu_1)}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(\mu_2)}\dfrac{Q^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(\mu_1)}{Q^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(\mu_2)}\left\{\dfrac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(Cos(\theta))}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(\mu_1)}-\dfrac{Q^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(Cos(\theta))}{Q^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(\mu_1)}\right\}\end{array}\right)}{\left\|\Phi_{\tau_n}(\eta)\right\|^2\left\{\dfrac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(\mu_1)}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(\mu_2)}-\dfrac{Q^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(\mu_1)}{Q^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(\mu_2)}\right\}}P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(iSinh(\eta))$$

.

Pour le problème avec les fonctions limites constantes $T(\eta,\theta)\big|_{\theta=\theta_1}=T_1 \quad T(\eta,\theta)\big|_{\theta=\theta_2}=T_2$*, il vient les coefficients* B_n*,* C_n *et la solution du problème :*

Du problème précédent

$$B_n=-\frac{1}{1+4\tau_n{}^2}\left(\frac{8\sqrt{\pi}}{\left|\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{i\tau_n}{2}\right)\right|^2}-2P^{réel}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}\left(iSinh\left(l_{\eta 0}\right)\right)-4\tau_n P^{imag}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}\left(iSinh\left(l_{\eta 0}\right)\right)+4\tau_n Sinh\left(l_{\eta 0}\right)P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}\left(iSinh\left(l_{\eta 0}\right)\right)\right)$$

$$B_{1n}=T_1B_n \quad B_{2n}=T_2B_n \qquad \mu_1=Cos(\theta_1) \qquad \mu_2=Cos(\theta_2)$$

$$\left\|\Phi_{\tau_n}(\eta)\right\|^2=\int_0^{l_{\eta 0}}d\eta\; Cosh(\eta)\left(\Phi_{\tau_n}(\eta)\right)^2 \quad ou\,bien$$

$$\left\|\Phi_{\tau_n}(\eta)\right\|^2=\frac{1}{2\tau_n}\left\{\begin{array}{l}\left\{\tau_n\left[Sinh\left(l_{\eta 0}\right)P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}\left(iSinh\left(l_{\eta 0}\right)\right)-P^{imag}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}\left(iSinh\left(l_{\eta 0}\right)\right)\right]-\frac{1}{2}P^{réel}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}\left(iSinh\left(l_{\eta 0}\right)\right)\right\}\times\\ \times\frac{\partial P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}\left(iSinh\left(l_{\eta 0}\right)\right)}{\partial\tau}+\frac{2\sqrt{\pi}}{\left|\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{i\tau_n}{2}\right)\right|^2}\frac{\partial P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(0)}{\partial\tau}\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow T(\eta,\theta)=\sum_{n\neq 0,+\infty}B_n\frac{\left(\begin{array}{l}T_1\left\{\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(Cos(\theta))}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(\mu_2)}-\frac{Q^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(Cos(\theta))}{Q^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(\mu_2)}\right\}-\\ -T_2\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(\mu_1)}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(\mu_2)}\frac{Q^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(\mu_1)}{Q^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(\mu_2)}\left\{\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(Cos(\theta))}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(\mu_1)}-\frac{Q^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(Cos(\theta))}{Q^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(\mu_1)}\right\}\end{array}\right)}{\left\|\Phi_{\tau_n}(\eta)\right\|^2\left\{\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(\mu_1)}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(\mu_2)}-\frac{Q^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(\mu_1)}{Q^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(\mu_2)}\right\}}P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}\left(iSinh(\eta)\right)$$

Problème aux limites sur l'intervalle η € [-$l_{\eta 0}$,$l_{\eta 0}$]->z=iSinh(η) € [-i z_0=-i Sinh(l_η),i z_0=i Sinh(l_η)] :

cas d'un intervalle fini du problème aux limites. La solution d'un problème aux limites de Dirichlet de la forme :

$$\Delta T(\eta,\theta)=0 \quad (\eta,\theta)\in\left\{-l_{\eta 0}\le\eta\le l_{\eta 0}, 0\le\theta<\theta_0\right\} \quad Lim_{\substack{\theta\to 0\\ \eta\to 0}} T(\eta,\theta) \quad finie$$

$$T(\eta,\theta)\big|_{\eta=-l_{\eta 0}}=T(\eta,\theta)\big|_{\eta=l_{\eta 0}}=0 \quad T(\eta,\theta)\big|_{\theta=\theta_0}=f(\eta)$$

est alors la suivante :

$$\Phi_{\tau_n}(\eta)=P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(iSinh(\eta))=\mathrm{Re}\left(P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(iSinh(\eta))\right) \qquad \mu_0=Cos(\theta_0)$$

$$\tau_n \quad tel\ que \quad P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(iSinh(l_{\eta 0}))=0$$

$$\left\|\Phi_{\tau_n}(\eta)\right\|^2=\int_{-l_{\eta 0}}^{l_{\eta 0}} d\eta\ Cosh(\eta)\left(\Phi_{\tau_n}(\eta)\right)^2 \quad B_n=\int_{-l_{\eta 0}}^{l_{\eta 0}} d\eta\ Cosh(\eta) f(\eta) P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(iSinh(\eta))$$

$$T(\eta,\theta)=\sum_{n\neq 0,+\infty}\frac{B_n}{\left\|\Phi_{\tau_n}(\eta)\right\|^2}P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(iSinh(\eta))\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(Cos(\theta))}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(\mu_0)}$$

Le calcul de la norme en partant de l'expression générale obtenue précédemment est le suivant :

$$\Phi_{\tau_n}(\eta)=P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(iSinh(\eta)) \quad \varsigma=Sinh(\eta)\Rightarrow d\varsigma=Cosh(\eta)d\eta$$

$$Fonction\ paire\ de\ \eta\Rightarrow\Phi_{\tau_n}(\eta)=\Phi_{\tau_n}(-\eta)\Rightarrow\frac{\partial\Phi_{\tau_n}(\eta)}{\partial\eta}=-\frac{\partial\Phi_{\tau_n}(-\eta)}{\partial\eta} \quad fonction\ impaire\ de\ \eta$$

$$Dirichlet \quad Si \quad \Phi_{\tau_n}(-l_{\eta 0})=\Phi_{\tau_n}(l_{\eta 0})=0$$

$$\left\|\Phi_{\tau_n}(\eta)\right\|^2=\int_{-l_{\eta 0}}^{l_{\eta 0}} d\eta\ Cosh(\eta)\left(\Phi_{\tau_n}(\eta)\right)^2=\frac{1}{2\tau_n}\left[Cosh(\eta)\frac{\partial\Phi_{\tau_n}(\eta)}{\partial\eta}\frac{\partial\Phi_{\tau_n}(\eta)}{\partial\tau}\right]_{-l_{\eta 0}}^{l_{\eta 0}}=\frac{1}{\tau_n}Cosh(l_{\eta 0})\frac{\partial\Phi_{\tau_n}(l_{\eta 0})}{\partial\eta}\frac{\partial\Phi_{\tau_n}(l_{\eta 0})}{\partial\tau}$$

.

Pour ce problème de Dirichlet, le calcul de la norme c'est encore plus particulièrement :

$$\Phi_{\tau_n}(l_{\eta 0})=0 \Rightarrow \left\|\Phi_{\tau_n}(\eta)\right\|^2=\left\|P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(iSinh(\eta))\right\|^2=\frac{1}{\tau_n}Cosh(l_{\eta 0})\frac{\partial\Phi_{\tau_n}(l_{\eta 0})}{\partial\eta}\frac{\partial\Phi_{\tau_n}(l_{\eta 0})}{\partial\tau}$$

$$\Phi_{\tau_n}(\eta)=\mathrm{Re}\left(P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z)\right)\quad \left.\begin{matrix} z=iSinh(\eta) \\ x=Sinh(\eta)\end{matrix}\right\}\quad dx=Cosh(\eta)d\eta \Rightarrow Cosh(\eta)\frac{\partial\Phi_{\tau_n}(\eta)}{\partial\eta}=Cosh^2(\eta)\frac{dP^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(ix)}{dx}$$

$$\frac{dP_\nu(z)}{dz}=\frac{\nu}{z^2-1}\left(zP_\nu(z)-P_{\nu-1}(z)\right)\quad ici\quad z\quad purement\,imaginaire\quad et\quad \mathrm{Re}(P_\nu(z))=0$$

$$Supposons\ z=ix\quad x=Sinh(\eta)\quad P_\nu(ix)=\mathrm{Re}(P_\nu(ix))+i\,\mathrm{Im}(P_\nu(ix))\qquad \nu=-\frac{1}{2}+i\tau_n$$

$$\frac{d\,\mathrm{Re}(P_\nu(ix))}{dx}=-\mathrm{Im}\left(\frac{dP_\nu(z)}{dz}\right)=-\mathrm{Im}\left(\frac{\nu}{z^2-1}\left(zP_\nu(z)-P_{\nu-1}(z)\right)\right)=\frac{1}{z^2-1}\left(\mathrm{Im}(\nu\,P_{\nu-1}(z))-\mathrm{Im}(\nu\,zP_\nu(z))\right)$$

$$\mathrm{Im}(\nu\,P_{\nu-1}(z))=\mathrm{Im}\left(\left(-\frac{1}{2}+i\tau_n\right)P_{\nu-1}(z)\right)=-\frac{1}{2}\mathrm{Im}(P_{\nu-1}(z))+\tau_n\,\mathrm{Re}(P_{\nu-1}(z))$$

$$\mathrm{Im}(\nu\,zP_\nu(z))=\mathrm{Im}\left(ix\left(-\frac{1}{2}+i\tau_n\right)P_\nu(z)\right)=-\frac{x}{2}\mathrm{Re}(P_\nu(z))-x\tau_n\,\mathrm{Im}(P_\nu(z))=-\mathrm{Im}(z)\left(\frac{\mathrm{Re}(P_\nu(z))}{2}+\tau_n\,\mathrm{Im}(P_\nu(z))\right)$$

$$\frac{d\,\mathrm{Re}\left(P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(iSinh(l_{\eta 0}))\right)}{dx}=\frac{1}{Cosh^2(l_{\eta 0})}\left(\mathrm{Im}\left(\nu\,iSinh(l_{\eta 0})P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(iSinh(l_{\eta 0}))\right)-\mathrm{Im}\left(\nu\,P_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(iSinh(l_{\eta 0}))\right)\right)$$

$$\left.\begin{matrix}\mathrm{Re}(P_\nu(iSinh(l_{\eta 0})))=0\\ x_0=Sinh(l_{\eta 0})\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{matrix}\mathrm{Im}\left(\nu\,iSinh(l_{\eta 0})P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(iSinh(l_{\eta 0}))\right)=-\tau_n Sinh(l_{\eta 0})\mathrm{Im}\left(P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(iSinh(l_{\eta 0}))\right)\\ \mathrm{Im}\left(\nu\,P_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(iSinh(l_{\eta 0}))\right)=-\frac{1}{2}\mathrm{Im}\left(P_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(iSinh(l_{\eta 0}))\right)+\tau_n\,\mathrm{Re}\left(P_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(iSinh(l_{\eta 0}))\right)\end{matrix}\right.$$

$$\Rightarrow\frac{d\,\mathrm{Re}(P_\nu(ix_0))}{dx}=\frac{1}{Cosh^2(l_{\eta 0})}\left(\begin{matrix}-\tau_n Sinh(l_{\eta 0})\mathrm{Im}\left(P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(iSinh(l_{\eta 0}))\right)+\\ +\frac{1}{2}\mathrm{Im}\left(P_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(iSinh(l_{\eta 0}))\right)-\tau_n\,\mathrm{Re}\left(P_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(iSinh(l_{\eta 0}))\right)\end{matrix}\right)$$

$$\Rightarrow Cosh^2(l_{\eta 0})\frac{dP^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(ix_0)}{dx}=\left[\begin{matrix}\frac{1}{2}\mathrm{Im}\left(P_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(iSinh(l_{\eta 0}))\right)-\\ -\tau_n\left\{\mathrm{Re}\left(P_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(iSinh(l_{\eta 0}))\right)+Sinh(l_{\eta 0})\mathrm{Im}\left(P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(iSinh(l_{\eta 0}))\right)\right\}\end{matrix}\right]$$

$$\Rightarrow\left\|\Phi_{\tau_n}(\eta)\right\|^2=\frac{1}{\tau_n}\left\{\begin{matrix}\frac{1}{2}\mathrm{Im}\left(P_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(iSinh(l_{\eta 0}))\right)-\\ -\tau_n\left\{\mathrm{Re}\left(P_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(iSinh(l_{\eta 0}))\right)+Sinh(l_{\eta 0})\mathrm{Im}\left(P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(iSinh(l_{\eta 0}))\right)\right\}\end{matrix}\right\}\frac{\partial P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(iSinh(l_{\eta 0}))}{\partial\tau}$$

Calculons également l'expression :

$$C_n = \int_{-l_{\eta 0}}^{l_{\eta 0}} d\eta\, Cosh(\eta) P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(iSinh(\eta)) \qquad \tau_n \quad tel\ que \quad P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(iSinh(l_{\eta 0})) = 0$$

$$Comme \quad \int_{z_1}^{z_2} dz\, P_\nu(z) = \left[\frac{zP_\nu(z) - P_{\nu-1}(z)}{\nu+1}\right]_{z_1}^{z_2}$$

$$C_n = \mathrm{Re}\left(\int_{-l_{\eta 0}}^{l_{\eta 0}} d\eta\, Cosh(\eta)\, P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(iSinh(\eta))\right) = -\mathrm{Re}\left(i\int_{-z_0}^{z_0} dz\, P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z)\right) = \mathrm{Im}\left(\int_{-z_0}^{z_0} dz\, P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z)\right) =$$

$$= 2\,\mathrm{Im}\left(\frac{z_0 P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_0) - P_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_0)}{\frac{1}{2}+i\tau_n}\right)$$

$$= \frac{2}{1+4\tau_n^{\,2}}\mathrm{Im}\left(4\left(\frac{1}{2}-i\tau_n\right)\left(z_0 P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_0) - P_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_0)\right)\right)$$

$$= \frac{2}{1+4\tau_n^{\,2}}\mathrm{Im}\left((2-4i\tau_n)\left(iSinh(l_{\eta 0})P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(iSinh(l_{\eta 0})) - P_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(iSinh(l_{\eta 0}))\right)\right)$$

$$= \frac{2}{1+4\tau_n^{\,2}}\begin{pmatrix} -2\,\mathrm{Im}\left(P_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(iSinh(l_{\eta 0}))\right) + 4\tau_n\,\mathrm{Re}\left(P_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(iSinh(l_{\eta 0}))\right) \\ +2Sinh(l_{\eta 0})\mathrm{Re}\left(P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(iSinh(l_{\eta 0}))\right) + 4\tau_n Sinh(l_{\eta 0})\mathrm{Im}\left(P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(iSinh(l_{\eta 0}))\right)\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow C_n = \frac{2}{1+4\tau_n^{\,2}}\left(4\tau_n Sinh(l_{\eta 0})P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(iSinh(l_{\eta 0})) + 4\tau_n P^{réel}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(iSinh(l_{\eta 0})) - 2P^{imag}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(iSinh(l_{\eta 0}))\right).$$

Tout cela donne formellement la solution du problème pour une fonction limite constante de valeur T_0, comme suit :

$$\Phi_{\tau_n}(\eta) = P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(iSinh(\eta)) = \mathrm{Re}\left(P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(iSinh(\eta))\right) \qquad \mu_0 = Cos(\theta_0)$$

$$\tau_n \quad tel\ que \quad P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(iSinh(l_{\eta 0})) = 0$$

$$\left\|\Phi_{\tau_n}(\eta)\right\|^2 = \int_{-l_{\eta 0}}^{l_{\eta 0}} d\eta\, Cosh(\eta)(\Phi_{\tau_n}(\eta))^2 \quad ou \quad bien$$

$$\left\|\Phi_{\tau_n}(\eta)\right\|^2 = \frac{\partial P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(iSinh(l_{\eta 0}))}{\partial\tau}\left\{\frac{1}{2}\mathrm{Im}\left(P_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z)\right) - \tau_n\left\{\mathrm{Re}\left(P_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z)\right) + Sinh(l_{\eta 0})\mathrm{Im}\left(P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(iSinh(l_{\eta 0}))\right)\right\}\right\}$$

$$B_n = \frac{2T_0}{1+4\tau_n^{\,2}}\left(4\tau_n Sinh(l_{\eta 0})P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(iSinh(l_{\eta 0})) + 4\tau_n P^{réel}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(iSinh(l_{\eta 0})) - 2P^{imag}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(iSinh(l_{\eta 0}))\right)$$

$$\Rightarrow T(\eta,\theta) = \sum_{n\neq 0,+\infty} \frac{B_n}{\left\|\Phi_{\tau_n}(\eta)\right\|^2}\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(Cos(\theta))}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(\mu_0)} P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(iSinh(\eta))$$

.

<u>*Pour un problème aux limites sur une section angulaire de la forme*</u>

$$\Delta T(\eta,\theta)=0 \quad (\eta,\theta)\in\left\{-l_{\eta 0}<\eta\le l_{\eta 0},\theta_1\le\theta<\theta_2\right\} \quad Lim_{\eta\to 0}T(\eta,\theta) \quad finie$$
$$T(\eta,\theta)\big|_{\eta=l_{\eta 0}}=T(\eta,\theta)\big|_{\eta=-l_{\eta 0}}=0 \quad T(\eta,\theta)\big|_{\theta=\theta_1}=f_1(\eta) \quad T(\eta,\theta)\big|_{\theta=\theta_2}=f_2(\eta)$$

Les calculs sont tout à fait similaires aux problèmes précédents, avec des fonctions angulaires différentes. La solution générale est de la forme :

$$\Phi_{\tau_n}(\eta)=P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(iSinh(\eta)) \quad \left\|\Phi_{\tau_n}(\eta)\right\|^2=\int_{-l_{\eta 0}}^{l_{\eta 0}}d\eta\ Cosh(\eta)\left(\Phi_{\tau_n}(\eta)\right)^2 \quad \mu_1=Cos(\theta_1) \quad \mu_2=Cos(\theta_2)$$

$$\left\|\Phi_{\tau_n}(\eta)\right\|^2=\frac{1}{\tau_n}\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{2}\mathrm{Im}\left(P_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}\left(iSinh(l_{\eta 0})\right)\right)-\\ -\tau_n\left\{\mathrm{Re}\left(P_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}\left(iSinh(l_{\eta 0})\right)\right)+Sinh(l_{\eta 0})\mathrm{Im}\left(P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}\left(iSinh(l_{\eta 0})\right)\right)\right\}\end{array}\right\}\frac{\partial P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}\left(iSinh(l_{\eta 0})\right)}{\partial\tau}$$

$$B_{1n}=\int_{-l_{\eta 0}}^{l_{\eta 0}}d\eta\ Cosh(\eta)f_1(\eta)P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(iSinh(\eta)) \qquad B_{2n}=\int_{-l_{\eta 0}}^{l_{\eta 0}}d\eta\ Cosh(\eta)f_2(\eta)P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(iSinh(\eta))$$

$$T(\eta,\theta)=\sum_{n\neq 0,+\infty}\frac{\left(\begin{array}{l}B_{1n}\left\{\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(Cos(\theta))}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(\mu_2)}-\frac{Q^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(Cos(\theta))}{Q^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(\mu_2)}\right\}-\\ -B_{2n}\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(\mu_1)}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(\mu_2)}\frac{Q^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(\mu_1)}{Q^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(\mu_2)}\left\{\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(Cos(\theta))}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(\mu_1)}-\frac{Q^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(Cos(\theta))}{Q^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(\mu_1)}\right\}\end{array}\right)}{\left\|\Phi_{\tau_n}(\eta)\right\|^2\left\{\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(\mu_1)}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(\mu_2)}-\frac{Q^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(\mu_1)}{Q^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(\mu_2)}\right\}}P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(iSinh(\eta))$$

.

Pour le problème avec les fonctions limites constantes $T(\eta,\theta)\big|_{\theta=\theta_1}=T_1 \quad T(\eta,\theta)\big|_{\theta=\theta_2}=T_2$*, il vient les coefficients* B_n*,* C_n *et la solution du problème :*

Du problème précédent

$$B_n=\frac{2}{1+4\tau_n{}^2}\left(4\tau_n Sinh\left(l_{\eta 0}\right)P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}\left(iSinh\left(l_{\eta 0}\right)\right)+4\tau_n P^{réel}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}\left(iSinh\left(l_{\eta 0}\right)\right)-2P^{imag}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}\left(iSinh\left(l_{\eta 0}\right)\right)\right)$$

$$B_{1n}=T_1B_n \quad B_{2n}=T_2B_n$$

$$\left\|\Phi_{\tau_n}(\eta)\right\|^2=\int_{-l_{\eta 0}}^{l_{\eta 0}}d\eta\ Cosh(\eta)\left(\Phi_{\tau_n}(\eta)\right)^2 \quad \mu_1=Cos(\theta_1) \qquad \mu_2=Cos(\theta_2)$$

$$\left\|\Phi_{\tau_n}(\eta)\right\|^2=\frac{1}{\tau_n}\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{2}\mathrm{Im}\left(P_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}\left(iSinh\left(l_{\eta 0}\right)\right)\right)-\\ -\tau_n\left\{\mathrm{Re}\left(P_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}\left(iSinh\left(l_{\eta 0}\right)\right)\right)+Sinh\left(l_{\eta 0}\right)\mathrm{Im}\left(P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}\left(iSinh\left(l_{\eta 0}\right)\right)\right)\right\}\end{array}\right\}\frac{\partial P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}\left(iSinh\left(l_{\eta 0}\right)\right)}{\partial\tau}$$

$$\Rightarrow T(\eta,\theta)=\sum_{n\neq 0,+\infty}B_n\frac{\left(\begin{array}{l}T_1\left\{\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(Cos(\theta))}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(\mu_2)}-\frac{Q^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(Cos(\theta))}{Q^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(\mu_2)}\right\}-\\ -T_2\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(\mu_1)}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(\mu_2)}\frac{Q^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(\mu_1)}{Q^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(\mu_2)}\left\{\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(Cos(\theta))}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(\mu_1)}-\frac{Q^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(Cos(\theta))}{Q^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(\mu_1)}\right\}\end{array}\right)}{\left\|\Phi_{\tau_n}(\eta)\right\|^2\left\{\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(\mu_1)}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(\mu_2)}-\frac{Q^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(\mu_1)}{Q^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(\mu_2)}\right\}}P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}\left(iSinh(\eta)\right)$$

.

Problème aux limites sur l'intervalle η € [$l_{\eta 1}$,$l_{\eta 2}$]->z=iSinh(η) € [z1=i Sinh($l_{\eta 1}$), z2=i Sinh($l_{\eta 2}$)] :

La solution d'un problème aux limites de Dirichlet de la forme :

$$\Delta T(\eta,\theta)=0 \quad (\eta,\theta)\in\{l_{\eta 1}\le\eta\le l_{\eta 2},0\le\theta<\theta_0\} \quad Lim_{\theta\to 0}T(\eta,\theta) \quad finie$$

$$T(\eta,\theta)\big|_{\eta=l_{\eta 1}}=0 \quad T(\eta,\theta)\big|_{\eta=l_{\eta 2}}=0 \quad T(\eta,\theta)\big|_{\theta=\theta_0}=f(\eta)$$

est alors la suivante :

$$\Phi_{\tau_n}(\eta)=\frac{P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(iSinh(\eta))}{P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(iSinh(l_{\eta 1}))}-\frac{P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(iSinh(\eta))}{P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(iSinh(l_{\eta 1}))} \quad \|\Phi_{\tau_n}(\eta)\|^2=\int_{l_{\eta 1}}^{l_{\eta 2}}d\eta\, Cosh(\eta)(\Phi_{\tau_n}(\eta))^2$$

$$B_n=\int_{l_{\eta 1}}^{l_{\eta 2}}d\eta\, Cosh(\eta)f(\eta)P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(iSinh(\eta)) \quad C_n=\int_{l_{\eta 1}}^{l_{\eta 2}}d\eta\, Cosh(\eta)f(\eta)P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(iSinh(\eta))$$

$$\tau_n \quad tel\ que \quad P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(iSinh(l_{\eta 2}))P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(iSinh(l_{\eta 1}))=P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(iSinh(l_{\eta 2}))P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(iSinh(l_{\eta 1}))$$

$$T(\eta,\theta)=\sum_{n\neq 0,+\infty}\left(\frac{B_n}{P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(iSinh(l_{\eta 1}))}-\frac{C_n}{P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(iSinh(l_{\eta 1}))}\right)\frac{\Phi_{\tau_n}(\eta)}{\|\Phi_{\tau_n}(\eta)\|^2}\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(Cos(\theta))}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(\mu_0)}$$

.

En revenant à un procédé classique de variation du paramètre, on peut tenter de trouver une expression de cette norme , comme il a été établit auparavant :

$$\Phi_{\tau_n}(\eta)=\frac{P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(iSinh(\eta))}{P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(iSinh(l_{\eta 1}))}-\frac{P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(iSinh(\eta))}{P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(iSinh(l_{\eta 1}))}$$

$$z=Sinh(\eta)\Rightarrow dz=Cosh(\eta)d\eta$$

$$\|\Phi_{\tau_n}(\eta)\|^2=\int_{l_{\eta 1}}^{l_{\eta 2}}d\eta\, Cosh(\eta)\left(\Phi_{\tau_n}(\eta)\right)^2=\frac{1}{2\tau_n}\left[Cosh(\eta)\left(\frac{\partial\Phi_{\tau_n}(\eta)}{\partial\eta}\frac{\partial\Phi_{\tau_n}(\eta)}{d\tau}-\Phi_{\tau_n}(\eta)\frac{\partial^2\Phi_{\tau_n}(\eta)}{d\eta\,\partial z}\right)\right]_{l_{\eta 1}}^{l_{\eta 2}}$$

$$Comme \quad \Phi_{\tau_n}(l_{\eta 1})=\Phi_{\tau_n}(l_{\eta 2})=0$$

$$\Rightarrow\|\Phi_{\tau_n}(\eta)\|^2=\int_{l_{\eta 1}}^{l_{\eta 2}}d\eta\, Cosh(\eta)\left(\Phi_{\tau_n}(\eta)\right)^2=\frac{1}{2\tau_n}\left[Cosh(l_{\eta 2})\frac{\partial\Phi_{\tau_n}(l_{\eta 2})}{\partial\eta}\frac{\partial\Phi_{\tau_n}(l_{\eta 2})}{d\tau}-Cosh(l_{\eta 1})\frac{\partial\Phi_{\tau_n}(l_{\eta 1})}{\partial\eta}\frac{\partial\Phi_{\tau_n}(l_{\eta 1})}{d\tau}\right]$$

.

Pour ce problème de Dirichlet c'est encore plus particulièrement, le calcul suivant de la norme :

$$\Phi_{\tau_n}(\eta)=\frac{P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(iSinh(\eta))}{P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(iSinh(l_{\eta 1}))}-\frac{P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(iSinh(\eta))}{P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(iSinh(l_{\eta 1}))}\qquad \Phi_{\tau_n}(l_{\eta 1})=\Phi_{\tau_n}(l_{\eta 2})=0\qquad x=Sinh(\eta)$$

$$Cosh(\eta)\frac{\partial\Phi_{\tau_n}(\eta)}{\partial\eta}=Cosh^2(\eta)\left[\frac{\dfrac{\partial P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(iSinh(\eta))}{\partial x}}{P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(iSinh(l_{\eta 1}))}-\frac{\dfrac{\partial P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(iSinh(\eta))}{\partial x}}{P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(iSinh(l_{\eta 1}))}\right]\qquad z=iSinh(\eta)$$

$$=\frac{Cosh^2(\eta)}{P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(iSinh(l_{\eta 1}))P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(iSinh(l_{\eta 1}))}\left[P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(iSinh(l_{\eta 1}))\frac{\partial P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(iSinh(\eta))}{\partial x}-P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(iSinh(l_{\eta 1}))\frac{\partial P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(iSinh(\eta))}{\partial x}\right]$$

$$\frac{\partial P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(iSinh(\eta))}{\partial x}=\frac{1}{Cosh^2(\eta)}\left(\mathrm{Im}\left(\left(-\frac{1}{2}+i\tau_n\right)iSinh(\eta)P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(iSinh(\eta))\right)-\mathrm{Im}\left(\left(-\frac{1}{2}+i\tau_n\right)P_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(iSinh(\eta))\right)\right)$$

$$=\frac{1}{Cosh^2(\eta)}\left(\begin{array}{l}-\tau_n Sinh(\eta)P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(iSinh(\eta))-\dfrac{Sinh(\eta)}{2}P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(iSinh(\eta))+\\+\dfrac{1}{2}P^{imag}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(iSinh(\eta))-\tau_n P^{réel}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(iSinh(\eta))\end{array}\right)$$

$$\frac{\partial P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(iSinh(\eta))}{\partial x}=\frac{1}{Cosh^2(\eta)}\left(\mathrm{Re}\left(\left(-\frac{1}{2}+i\tau_n\right)P_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(iSinh(\eta))\right)-\mathrm{Re}\left(\left(-\frac{1}{2}+i\tau_n\right)iSinh(\eta)P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(iSinh(\eta))\right)\right)$$

$$=\frac{1}{Cosh^2(\eta)}\left(\begin{array}{l}-\dfrac{1}{2}P^{réel}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(iSinh(\eta))-\tau_n P^{imag}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(iSinh(\eta))+\tau_n Sinh(\eta)P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(iSinh(\eta))-\\-\dfrac{Sinh(\eta)}{2}P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(iSinh(\eta))\end{array}\right)$$

$$\Rightarrow A(\eta)=P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(iSinh(l_{\eta 1}))\frac{\partial P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(iSinh(\eta))}{\partial\eta}-P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(iSinh(l_{\eta 1}))\frac{\partial P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(iSinh(\eta))}{\partial\eta}=$$

$$A(\eta)=\frac{1}{Cosh^2(\eta)}\left\{\begin{array}{l}P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(iSinh(l_{\eta 1}))\left(\begin{array}{l}+\dfrac{1}{2}P^{imag}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(iSinh(\eta))-\tau_n P^{réel}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(iSinh(\eta))-\tau_n Sinh(\eta)P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(iSinh(\eta))-\\-\dfrac{Sinh(\eta)}{2}P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(iSinh(\eta))\end{array}\right)-\\-P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(iSinh(l_{\eta 1}))\left(\begin{array}{l}-\dfrac{1}{2}P^{réel}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(iSinh(\eta))-\tau_n P^{imag}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(iSinh(\eta))+\tau_n Sinh(\eta)P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(iSinh(\eta))-\\-\dfrac{Sinh(\eta)}{2}P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(iSinh(\eta))\end{array}\right)\end{array}\right\}$$

.

Il vient pour le coefficient A(η):

$$Cosh^2(\eta)A(\eta)=\left\{\begin{array}{l} P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}\left(iSinh(l_{\eta 1})\right)\left(\frac{1}{2}P^{imag}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}\left(iSinh(\eta)\right)-\tau_n P^{réel}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}\left(iSinh(\eta)\right)-\tau_n Sinh(\eta)P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}\left(iSinh(\eta)\right)\right)- \\ -P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}\left(iSinh(l_{\eta 1})\right)\left(-\frac{1}{2}P^{réel}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}\left(iSinh(\eta)\right)-\tau_n P^{imag}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}\left(iSinh(\eta)\right)+\tau_n Sinh(\eta)P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}\left(iSinh(\eta)\right)\right) \end{array}\right\}$$

$$Cosh^2(\eta)A(\eta)=\left\{\begin{array}{l} -\tau_n Sinh(\eta)\left(P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}\left(iSinh(l_{\eta 1})\right)P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}\left(iSinh(\eta)\right)+P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}\left(iSinh(l_{\eta 1})\right)P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}\left(iSinh(\eta)\right)\right)+ \\ +\frac{1}{2}P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}\left(iSinh(l_{\eta 1})\right)P^{imag}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}\left(iSinh(\eta)\right)+\frac{1}{2}P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}\left(iSinh(l_{\eta 1})\right)P^{réel}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}\left(iSinh(\eta)\right)+ \\ +\tau_n\left(P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}\left(iSinh(l_{\eta 1})\right)P^{imag}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}\left(iSinh(\eta)\right)-P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}\left(iSinh(l_{\eta 1})\right)P^{réel}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}\left(iSinh(\eta)\right)\right) \end{array}\right\}$$

Soit l'expression de la norme :

$$\left\|\Phi_{\tau_n}(\eta)\right\|^2=\frac{1}{2\tau_n P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}\left(iSinh(l_{\eta 1})\right)P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}\left(iSinh(l_{\eta 1})\right)}\left[Cosh^2(l_{\eta 2})A(l_{\eta 2})\frac{\partial\Phi_{\tau_n}(l_{\eta 2})}{d\tau}-Cosh^2(l_{\eta 1})A(l_{\eta 1})\frac{\partial\Phi_{\tau_n}(l_{\eta 1})}{d\tau}\right]$$

$$\left\|\Phi_{\tau_n}(\eta)\right\|^2=\left[\begin{array}{l} \frac{1}{2\tau_n P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}\left(iSinh(l_{\eta 1})\right)P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}\left(iSinh(l_{\eta 1})\right)}\times \\ \times\left\{\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} -\tau_n Sinh(l_{\eta 2})\left(\begin{array}{l} P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}\left(iSinh(l_{\eta 1})\right)P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}\left(iSinh(l_{\eta 2})\right)+ \\ +P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}\left(iSinh(l_{\eta 1})\right)P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}\left(iSinh(l_{\eta 2})\right)\end{array}\right)+ \\ +\frac{1}{2}P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}\left(iSinh(l_{\eta 1})\right)P^{imag}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}\left(iSinh(l_{\eta 2})\right)+\frac{1}{2}P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}\left(iSinh(l_{\eta 1})\right)P^{réel}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}\left(iSinh(l_{\eta 2})\right)+ \\ +\tau_n\left(P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}\left(iSinh(l_{\eta 1})\right)P^{imag}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}\left(iSinh(l_{\eta 2})\right)-P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}\left(iSinh(l_{\eta 1})\right)P^{réel}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}\left(iSinh(l_{\eta 2})\right)\right) \end{array}\right\}\times\frac{\partial\Phi_{\tau_n}(l_{\eta 2})}{d\tau}- \\ -\left\{\begin{array}{l} -\tau_n Sinh(l_{\eta 1})\left(\begin{array}{l} P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}\left(iSinh(l_{\eta 1})\right)P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}\left(iSinh(l_{\eta 1})\right)+ \\ +P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}\left(iSinh(l_{\eta 1})\right)P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}\left(iSinh(l_{\eta 1})\right)\end{array}\right)+ \\ +\frac{1}{2}P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}\left(iSinh(l_{\eta 1})\right)P^{imag}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}\left(iSinh(l_{\eta 1})\right)+\frac{1}{2}P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}\left(iSinh(l_{\eta 1})\right)P^{réel}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}\left(iSinh(l_{\eta 1})\right)+ \\ +\tau_n\left(P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}\left(iSinh(l_{\eta 1})\right)P^{imag}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}\left(iSinh(l_{\eta 1})\right)-P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}\left(iSinh(l_{\eta 1})\right)P^{réel}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}\left(iSinh(l_{\eta 1})\right)\right) \end{array}\right\}\times\frac{\partial\Phi_{\tau_n}(l_{\eta 1})}{d\tau} \end{array}\right\} \end{array}\right]$$

ou bien encore :

$$\frac{Cosh^2(\eta)A(\eta)}{P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}\left(iSinh(l_{\eta 1})\right)P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}\left(iSinh(l_{\eta 1})\right)}=\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\left(\frac{1}{2}P^{imag}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}\left(iSinh(\eta)\right)-\tau_n P^{réel}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}\left(iSinh(\eta)\right)-\tau_n Sinh(\eta)P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}\left(iSinh(\eta)\right)\right)}{P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}\left(iSinh(l_{\eta 1})\right)}- \\ -\dfrac{\left(-\frac{1}{2}P^{réel}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}\left(iSinh(\eta)\right)-\tau_n P^{imag}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}\left(iSinh(\eta)\right)+\tau_n Sinh(\eta)P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}\left(iSinh(\eta)\right)\right)}{P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}\left(iSinh(l_{\eta 1})\right)}\end{array}\right\}$$

Soit une expression équivalente de la norme :

$$\left\|\Phi_{\tau_n}(\eta)\right\|^2=\frac{\left[Cosh^2(l_{\eta 2})A(l_{\eta 2})\dfrac{\partial\Phi_{\tau_n}(l_{\eta 2})}{d\tau}-Cosh^2(l_{\eta 1})A(l_{\eta 1})\dfrac{\partial\Phi_{\tau_n}(l_{\eta 1})}{d\tau}\right]}{2\tau_n P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}\left(iSinh(l_{\eta 1})\right)P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}\left(iSinh(l_{\eta 1})\right)}$$

$$z_1=iSinh(l_{\eta 1})\quad z_2=iSinh(l_{\eta 2})\quad x_1=Sinh(l_{\eta 1})\quad x_2=Sinh(l_{\eta 2})$$

$$\left\|\Phi_{\tau_n}(\eta)\right\|^2=\frac{1}{2\tau_n}\left[\left\{\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\left(\frac{1}{2}P^{imag}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_2)-\tau_n P^{réel}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_2)-\tau_n x_2 P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_2)\right)}{P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)}- \\ -\dfrac{\left(-\frac{1}{2}P^{réel}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_2)-\tau_n P^{imag}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_2)+\tau_n x_2 P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_2)\right)}{P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)}\end{array}\right\}\left(\dfrac{\dfrac{\partial P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_2)}{d\tau}}{P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)}-\dfrac{\dfrac{\partial P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_2)}{d\tau}}{P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)}\right)- \\ -\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\left(\frac{1}{2}P^{imag}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_1)-\tau_n P^{réel}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_1)-\tau_n x_1 P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)\right)}{P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)}- \\ -\dfrac{\left(-\frac{1}{2}P^{réel}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_1)-\tau_n P^{imag}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_1)+\tau_n x_1 P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)\right)}{P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)}\end{array}\right\}\left(\dfrac{\dfrac{\partial P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)}{d\tau}}{P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)}-\dfrac{\dfrac{\partial P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)}{d\tau}}{P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)}\right)\end{array}\right\}\right]$$

.

Pour une fonction limite constante T_0 les coefficients du développement se calculent comme suit :

$$B_n = \int_{l_{\eta 1}}^{l_{\eta 2}} d\eta\ Cosh(\eta) P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(iSinh(\eta)) \qquad C_n = \int_{l_{\eta 1}}^{l_{\eta 2}} d\eta\ Cosh(\eta) P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(iSinh(\eta))$$

$$B_n = \mathrm{Re}\left(\int_{l_{\eta 1}}^{l_{\eta 2}} d\eta\ Cosh(\eta)\, P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(iSinh(\eta))\right) = -\mathrm{Re}\left(i\int_{z_1}^{z_2} dz\ P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z)\right) = \mathrm{Im}\left(\int_{z_1}^{z_2} dz\ P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z)\right)$$

$$C_n = \mathrm{Im}\left(\int_{l_{\eta 1}}^{l_{\eta 2}} d\eta\ Cosh(\eta)\, P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(iSinh(\eta))\right) = -\mathrm{Im}\left(i\int_{z_1}^{z_2} dz\ P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z)\right) = -\mathrm{Re}\left(\int_{z_1}^{z_2} dz\ P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z)\right)$$

$$B_n = \mathrm{Im}\left(\frac{z_2 P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_2) - P_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_2) - z_1 P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1) + P_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_1)}{\frac{1}{2}+i\tau_n}\right)$$

$$B_n = \frac{1}{\frac{1}{4}+\tau_n^{\ 2}}\mathrm{Im}\left(\left(\frac{1}{2}-i\tau_n\right)\left(P_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_1) - P_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_2) + z_2 P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_2) - z_1 P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)\right)\right)$$

$$B_n = \frac{1}{\frac{1}{4}+\tau_n^{\ 2}}\mathrm{Im}\left(\begin{array}{l}\frac{1}{2}\left(P_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_1) - P_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_2) + ix_2 P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_2) - ix_1 P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)\right) - \\ -i\tau_n\left(P_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_1) - P_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_2) + ix_2 P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_2) - ix_1 P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)\right)\end{array}\right)$$

$$B_n = \frac{1}{1+4\tau_n^{\ 2}}\left(\begin{array}{l}2P^{imag}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_1) - 2P^{imag}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_2) + 2x_2 P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_2) - 2x_1 P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1) + \\ +4\tau_n\left(P^{réel}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_2) - P^{réel}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_1) + x_2 P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_2) - x_1 P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)\right)\end{array}\right)$$

$$C_n = -\mathrm{Re}\left(\frac{z_2 P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_2) - P_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_2) - z_1 P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1) + P_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_1)}{\frac{1}{2}+i\tau_n}\right)$$

$$C_n = -\frac{1}{\frac{1}{4}+\tau_n^{\ 2}}\mathrm{Re}\left(\begin{array}{l}\frac{1}{2}\left(P_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_1) - P_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_2) + ix_2 P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_2) - ix_1 P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)\right) - \\ -i\tau_n\left(P_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_1) - P_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_2) + ix_2 P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_2) - ix_1 P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)\right)\end{array}\right)$$

$$C_n = \frac{1}{1+4\tau_n^{\ 2}}\left(\begin{array}{l}+2P^{réel}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_2) - 2P^{réel}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_1) + 2x_2 P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_2) - 2x_1 P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1) + \\ +4\tau_n\left(P^{imag}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_2) - P^{imag}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_1) + x_1 P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1) - x_2 P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_2)\right)\end{array}\right)$$

Il vient finalement :

$$B_n = \frac{1}{1+4\tau_n^{\,2}}\left(\begin{array}{l} 2P^{imag}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_1) - 2P^{imag}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_2) + 2x_2 P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_2) - 2x_1 P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1) + \\ +4\tau_n\left(P^{réel}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_2) - P^{réel}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_1) + x_2 P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_2) - x_1 P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)\right) \end{array}\right)$$

$$C_n = \frac{1}{1+4\tau_n^{\,2}}\left(\begin{array}{l} 2P^{réel}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_2) - 2P^{réel}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_1) + 2x_2 P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_2) - 2x_1 P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1) + \\ +4\tau_n\left(P^{imag}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_2) - P^{imag}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_1) + x_1 P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1) - x_2 P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_2)\right) \end{array}\right)$$

$$\frac{B_n}{P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)} - \frac{C_n}{P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)} = \frac{P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)B_n - P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)C_n}{P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)}$$

$$A_n = P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)B_n - P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)C_n$$

$$A_n = \frac{1}{1+4\tau_n^{\,2}}\left(\begin{array}{l} 2P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)P^{réel}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_1) + 2P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)P^{imag}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_1) - \\ -2P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)P^{réel}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_2) - 2P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)P^{imag}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_2) + \\ +4\tau_n\left(\begin{array}{l} P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)P^{réel}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_2) - P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)P^{imag}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_2) + \\ +P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)P^{imag}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_1) - P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)P^{réel}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_1) + \\ +x_2\left(P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_2) + P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_2)\right) - \\ -x_1\left(P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1) + P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)\right) \end{array}\right) \end{array}\right).$$

Ce qui donne formellement la solution du problème aux limites pour une fonction constante :

$$\Delta T(\eta,\theta)=0 \quad (\eta,\theta)\in\{0<l_{\eta 1}\le\eta\le l_{\eta 2},0\le\theta<\theta_0\} \quad Lim_{\theta\to 0}T(\eta,\theta) \quad finie$$

$$T(\eta,\theta)\big|_{\eta=l_{\eta 1}}=0 \quad T(\eta,\theta)\big|_{\eta=l_{\eta 2}}=0 \quad T(\eta,\theta)\big|_{\theta=\theta_0}=T_0 \quad z_1=iSinh(l_{\eta 1}) \quad z_2=iSinh(l_{\eta 2}) \quad \mu_0=Cos(\theta_0)$$

$$\Phi_{\tau_n}(\eta)=\frac{P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(iSinh(\eta))}{P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)}-\frac{P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(iSinh(\eta))}{P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)} \qquad \left\|\Phi_{\tau_n}(\eta)\right\|^2=\int_{l_{\eta 1}}^{l_{\eta 2}}d\eta\, Cosh(\eta)\left(\Phi_{\tau_n}(\eta)\right)^2$$

$$\tau_n \quad tel\ que \quad P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_2)P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)=P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_2)$$

$$\frac{\partial\Phi_{\tau_n}(l_{\eta 2})}{d\tau}=\frac{\dfrac{\partial P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_2)}{d\tau}}{P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)}-\frac{\dfrac{\partial P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_2)}{d\tau}}{P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)} \qquad \frac{\partial\Phi_{\tau_n}(l_{\eta 1})}{d\tau}=\frac{\dfrac{\partial P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)}{d\tau}}{P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)}-\frac{\dfrac{\partial P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)}{d\tau}}{P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)}$$

$$\left\|\Phi_{\tau_n}(\eta)\right\|^2=\frac{1}{2\tau_n P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)}\left\{\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}-\tau_n Sinh(l_{\eta 2})\left(P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_2)+P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_2)\right)+\\ +\frac{1}{2}P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)P^{imag}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_2)+\frac{1}{2}P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)P^{réel}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_2)+\\ +\tau_n\left(P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)P^{imag}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_2)-P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)P^{réel}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_2)\right)\end{array}\right\}\times\frac{\partial\Phi_{\tau_n}(l_{\eta 2})}{d\tau}-\\ -\left\{\begin{array}{l}-\tau_n Sinh(l_{\eta 1})\left(P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)+P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)\right)+\\ +\frac{1}{2}P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)P^{imag}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_1)+\frac{1}{2}P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)P^{réel}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_1)+\\ +\tau_n\left(P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)P^{imag}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_1)-P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)P^{réel}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_1)\right)\end{array}\right\}\times\frac{\partial\Phi_{\tau_n}(l_{\eta 1})}{d\tau}\end{array}\right\}$$

$$A_n=\left(\begin{array}{l}2P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)P^{réel}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_1)+2P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)P^{imag}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_1)-2P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)P^{réel}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_2)-2P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)P^{imag}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_2)+\\ +4\tau_n\left(\begin{array}{l}P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)P^{réel}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_2)-P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)P^{imag}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_2)+P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)P^{imag}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_1)-P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)P^{réel}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_1)+\\ +x_2\left(P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_2)+P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_2)\right)-x_1\left(P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)+P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)\right)\end{array}\right)\end{array}\right)$$

$$T(\eta,\theta)=T_0\sum_{n\neq 0,+\infty}\frac{A_n}{\left(1+4\tau_n{}^2\right)P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)}\frac{\Phi_{\tau_n}(\eta)}{\left\|\Phi_{\tau_n}(\eta)\right\|^2}\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(Cos(\theta))}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(\mu_0)}$$

.

<u>*Pour un problème aux limites sur une section angulaire de la forme*</u>

$$\Delta T(\eta,\theta)=0 \quad (\eta,\theta)\in\{0<l_{\eta 1}\le\eta\le l_{\eta 2},\theta_1\le\theta<\theta_2\} \quad Lim_{\eta\to 0}T(\eta,\theta) \quad finie$$

$$T(\eta,\theta)\big|_{\eta=l_{\eta 1}}=T(\eta,\theta)\big|_{\eta=l_{\eta 2}}=0 \quad T(\eta,\theta)\big|_{\theta=\theta_1}=f_1(\eta) \quad T(\eta,\theta)\big|_{\theta=\theta_2}=f_2(\eta)$$

Les calculs sont tout à fait similaires aux problèmes précédents, avec des fonctions angulaires différentes. La solution générale est de la forme :

$$z_1=iSinh(l_{\eta 1}) \quad z_2=iSinh(l_{\eta 2}) \quad x_1=Sinh(l_{\eta 1}) \quad x_2=Sinh(l_{\eta 2}) \qquad \mu_1=Cos(\theta_1) \quad \mu_2=Cos(\theta_2)$$

$$\Phi_{\tau_n}(\eta)=\frac{P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(iSinh(\eta))}{P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)}-\frac{P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(iSinh(\eta))}{P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)} \qquad \left\|\Phi_{\tau_n}(\eta)\right\|^2=\int_{l_{\eta 1}}^{l_{\eta 2}}d\eta\, Cosh(\eta)\left(\Phi_{\tau_n}(\eta)\right)^2$$

$$\left\|\Phi_{\tau_n}(\eta)\right\|^2=\frac{1}{2\tau_n}\left[\left\{\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\left(\frac{1}{2}P^{imag}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_2)-\tau_n P^{réel}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_2)-\tau_n x_2 P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_2)\right)}{P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)}-\\ -\dfrac{\left(-\frac{1}{2}P^{réel}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_2)-\tau_n P^{imag}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_2)+\tau_n x_2 P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_2)\right)}{P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)}\end{array}\right\}\left(\dfrac{\dfrac{\partial P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_2)}{d\tau}}{P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)}-\dfrac{\dfrac{\partial P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_2)}{d\tau}}{P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)}\right)-\\ -\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\left(\frac{1}{2}P^{imag}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_1)-\tau_n P^{réel}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_1)-\tau_n x_1 P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)\right)}{P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)}-\\ -\dfrac{\left(-\frac{1}{2}P^{réel}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_1)-\tau_n P^{imag}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_1)+\tau_n x_1 P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)\right)}{P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)}\end{array}\right\}\left(\dfrac{\dfrac{\partial P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)}{d\tau}}{P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)}-\dfrac{\dfrac{\partial P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)}{d\tau}}{P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)}\right)\end{array}\right\}\right]$$

$$B_{1n}=\int_{l_{\eta 1}}^{l_{\eta 2}}d\eta\, Cosh(\eta)f_1(\eta)\Phi_{\tau_n}(\eta) \qquad B_{2n}=\int_{l_{\eta 1}}^{l_{\eta 2}}d\eta\, Cosh(\eta)f_2(\eta)\Phi_{\tau_n}(\eta)$$

$$T(\eta,\theta)=\sum_{n\ne 0,+\infty}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\left(\begin{array}{l}B_{1n}\left\{\dfrac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(Cos(\theta))}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(\mu_2)}-\dfrac{Q^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(Cos(\theta))}{Q^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(\mu_2)}\right\}-\\ -B_{2n}\dfrac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(\mu_1)}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(\mu_2)}\dfrac{Q^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(\mu_1)}{Q^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(\mu_2)}\left\{\dfrac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(Cos(\theta))}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(\mu_1)}-\dfrac{Q^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(Cos(\theta))}{Q^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(\mu_1)}\right\}\end{array}\right)}{\left\|\Phi_{\tau_n}(\eta)\right\|^2\left\{\dfrac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(\mu_1)}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(\mu_2)}-\dfrac{Q^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(\mu_1)}{Q^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(\mu_2)}\right\}}\times\\ \times\left(\dfrac{P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(iSinh(\eta))}{P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)}-\dfrac{P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(iSinh(\eta))}{P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)}\right)\end{array}\right\}$$

Pour des fonctions limites constantes $f_1(\eta)=T_1 \qquad f_2(\eta)=T_2$, *il vient :*

$$z_1 = iSinh(l_{\eta 1}) \quad z_2 = iSinh(l_{\eta 2}) \quad x_1 = Sinh(l_{\eta 1}) \quad x_2 = Sinh(l_{\eta 2}) \qquad \mu_1 = Cos(\theta_1) \quad \mu_2 = Cos(\theta_2)$$

$$\Phi_{\tau_n}(\eta) = \frac{P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(iSinh(\eta))}{P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)} - \frac{P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(iSinh(\eta))}{P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)} \qquad \left\|\Phi_{\tau_n}(\eta)\right\|^2 = \int_{l_{\eta 1}}^{l_{\eta 2}} d\eta\, Cosh(\eta)\left(\Phi_{\tau_n}(\eta)\right)^2$$

$$\left\|\Phi_{\tau_n}(\eta)\right\|^2 = \frac{1}{2\tau_n}\left[\left\{\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\left(\frac{1}{2}P^{imag}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_2) - \tau_n P^{réel}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_2) - \tau_n x_2 P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_2)\right)}{P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)} - \\ -\dfrac{\left(-\frac{1}{2}P^{réel}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_2) - \tau_n P^{imag}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_2) + \tau_n x_2 P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_2)\right)}{P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)} \end{array}\right\} \left(\dfrac{\dfrac{\partial P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_2)}{d\tau}}{P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)} - \dfrac{\dfrac{\partial P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_2)}{d\tau}}{P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)}\right) - \\ -\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\left(\frac{1}{2}P^{imag}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_1) - \tau_n P^{réel}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_1) - \tau_n x_1 P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)\right)}{P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)} - \\ -\dfrac{\left(-\frac{1}{2}P^{réel}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_1) - \tau_n P^{imag}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_1) + \tau_n x_1 P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)\right)}{P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)} \end{array}\right\} \left(\dfrac{\dfrac{\partial P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)}{d\tau}}{P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)} - \dfrac{\dfrac{\partial P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)}{d\tau}}{P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)}\right) \end{array}\right\}\right]$$

$$B_{1n} = T_1 \frac{A_n}{\left(1+4\tau_n^{\,2}\right)P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)} \qquad B_{2n} = T_2 \frac{A_n}{\left(1+4\tau_n^{\,2}\right)P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)}$$

$$A_n = \left(\begin{array}{l} 2P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)P^{réel}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_1) + 2P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)P^{imag}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_1) - 2P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)P^{réel}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_2) - 2P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)P^{imag}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_2) + \\ +4\tau_n\left(\begin{array}{l} P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)P^{réel}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_2) - P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)P^{imag}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_2) + P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)P^{imag}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_1) - P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)P^{réel}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_1) + \\ +x_2\left(P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_2) + P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_2)\right) - x_1\left(P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1) + P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)\right) \end{array}\right) \end{array}\right)$$

$$T(\eta,\theta) = \sum_{n\neq 0,+\infty} \frac{A_n}{\left(1+4\tau_n^{\,2}\right)P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)} \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\left(T_1\left\{\dfrac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(Cos(\theta))}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(\mu_2)} - \dfrac{Q^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(Cos(\theta))}{Q^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(\mu_2)}\right\} - T_2\dfrac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(\mu_1)}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(\mu_2)}\dfrac{Q^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(\mu_1)}{Q^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(\mu_2)}\left\{\dfrac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(Cos(\theta))}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(\mu_1)} - \dfrac{Q^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(Cos(\theta))}{Q^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(\mu_1)}\right\}\right)}{\left\|\Phi_{\tau_n}(\eta)\right\|^2\left\{\dfrac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(\mu_1)}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(\mu_2)} - \dfrac{Q^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(\mu_1)}{Q^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(\mu_2)}\right\}} \times \\ \times\left(\dfrac{P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(iSinh(\eta))}{P^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)} - \dfrac{P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(iSinh(\eta))}{P^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)}\right) \end{array}\right\}$$

Quelques propriétés des fonctions coniques et fonctions coniques associées de Mehler pour un argument purement imaginaire

Il est bon de rappeler ou d'exposer quelques propriétés des fonctions coniques de Mehler et les fonctions associées pour un argument purement imaginaire. De la propriété miroir des fonctions de Legendre associées, on en déduit des propriétés pour les fonctions coniques, qui cette fois-çi sont des fonctions qui sont à valeur imaginaire :

$$\left.\begin{array}{l}\overline{P_{\bar{\nu}}^{\bar{\mu}}(\bar{z})}=P_{\nu}^{\mu}(z)\\ P_{\nu}^{\mu}(z)=P_{-\nu-1}^{\mu}(z)\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{l}\nu=-\dfrac{1}{2}+i\tau\\ \mu\ réel\quad z=ix\quad x\ réel\end{array}\right\}\quad \overline{P_{-\frac{1}{2}-i\tau}^{\mu}(-ix)}=P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{\mu}(ix)=\overline{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{\mu}(-ix)}=P_{-\frac{1}{2}-i\tau}^{\mu}(ix)$$

$$\Rightarrow\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{\mu}(ix)+P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{\mu}(-ix)}{2}=\mathrm{Re}\left(P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{\mu}(ix)\right)\quad\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{\mu}(ix)-P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{\mu}(-ix)}{2i}=\mathrm{Im}\left(P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{\mu}(ix)\right)$$

Avec les fonctions de deuxième espèce, le résultat diffère :

$$\left.\begin{array}{l}\overline{Q_{\bar{\nu}}^{\bar{\mu}}(\bar{z})}=Q_{\nu}^{\mu}(z)\quad Q_{-\nu-1}^{\mu}(z)=\dfrac{\pi e^{i\pi\mu}Cos(\nu\pi)P_{\nu}^{\mu}(z)-Sin(\pi(\mu+\nu))Q_{\nu}^{\mu}(z)}{Sin(\pi(\mu-\nu))}\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{l}\nu=-\dfrac{1}{2}+i\tau\\ \mu\ réel\quad z=ix\quad x\quad réel\end{array}\right\}$$

$$\overline{Q_{-\frac{1}{2}-i\tau}^{\mu}(-ix)}=Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{\mu}(ix)\quad\overline{Q_{-\frac{1}{2}-i\tau}^{\mu}(ix)}=Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{\mu}(-ix)\quad Sin(i\tau\pi)=iSinh(\tau\pi)\quad Cos(i\tau\pi)=Cosh(\tau\pi)$$

$$Q_{-\frac{1}{2}-i\tau}^{\mu}(-ix)=\frac{\pi e^{i\pi\mu}Cos\left(\left(-\frac{1}{2}+i\tau\right)\pi\right)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{\mu}(-ix)-Sin\left(\pi\left(\mu-\frac{1}{2}+i\tau\right)\right)Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{\mu}(-ix)}{Sin\left(\pi\left(\mu+\frac{1}{2}-i\tau\right)\right)}$$

$$Q_{-\frac{1}{2}-i\tau}^{\mu}(-ix)=\frac{\pi e^{i\pi\mu}Sinh(\tau\pi)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{\mu}(-ix)+Cos(\pi(\mu+i\tau))Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{\mu}(-ix)}{Cos(\pi(\mu-i\tau))}$$

$$De\ même\ Q_{-\frac{1}{2}-i\tau}^{\mu}(ix)=\frac{\pi e^{i\pi\mu}Sinh(\tau\pi)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{\mu}(ix)+Cos(\pi(\mu+i\tau))Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{\mu}(ix)}{Cos(\pi(\mu-i\tau))}$$

$$\Rightarrow\frac{Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{\mu}(ix)+Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{\mu}(-ix)}{2}=\frac{\overline{Q_{-\frac{1}{2}-i\tau}^{\mu}(ix)}+\overline{Q_{-\frac{1}{2}-i\tau}^{\mu}(-ix)}}{2}=$$

$$=\frac{\pi e^{-i\pi\mu}Sinh(\tau\pi)\left(\overline{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{\mu}(ix)}+\overline{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{\mu}(-ix)}\right)+Cos(\pi(\mu-i\tau))\left(\overline{Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{\mu}(ix)}+\overline{Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{\mu}(-ix)}\right)}{2Cos(\pi(\mu+i\tau))}$$

$$\Rightarrow\frac{Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{\mu}(ix)+Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{\mu}(-ix)}{2}=\frac{\pi e^{-i\pi\mu}Sinh(\tau\pi)}{Cos(\pi(\mu+i\tau))}\overline{\left(\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{\mu}(ix)+P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{\mu}(-ix)}{2}\right)}+$$

$$+\frac{Cos(\pi(\mu-i\tau))}{Cos(\pi(\mu+i\tau))}\overline{\left(\frac{Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{\mu}(ix)+Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{\mu}(-ix)}{2}\right)}$$

$$\frac{Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{\mu}(ix)-Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{\mu}(-ix)}{2i}=\frac{\pi e^{-i\pi\mu}Sinh(\tau\pi)}{Cos(\pi(\mu+i\tau))}\overline{\left(\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{\mu}(ix)-P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{\mu}(-ix)}{2i}\right)}+\frac{Cos(\pi(\mu-i\tau))}{Cos(\pi(\mu+i\tau))}\overline{\left(\frac{Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{\mu}(ix)-Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{\mu}(-ix)}{2i}\right)}$$

Les deux fonctions de première espèce construites par combinaisons linéaires paires et impaires sont alors toutes deux à valeur réelle et de plus sont paires et impaires par construction.

Une formule tirée de « NIST Handbook of Mathematical functions » formules 14.23.4 et 14.23.5 établi un lien entre les fonctions de Legendre associée sur [-1,1] (de type 1 sous Mathematica) et leur valeur à la coupure, formules qui peuvent s'appliquer justement pour le calcul des limites des fonctions d'argument purement imaginaire en z=0, comme suit :

$$\left.\begin{aligned} &P_\nu^\mu(x)=e^{\pm\frac{i\mu\pi}{2}}P_\nu^\mu(x\pm i0)\\ &Q_\nu^\mu(x)=\frac{1}{2}\Gamma(\nu+\mu+1)\left(e^{-\frac{i\mu\pi}{2}}Q_\nu^\mu(x+i0)+e^{\frac{i\mu\pi}{2}}Q_\nu^\mu(x-i0)\right)\end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} P^\mu_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)=e^{\pm\frac{i\mu\pi}{2}}P^\mu_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x\pm i0)\Rightarrow e^{+\frac{i\mu\pi}{2}}P^\mu_{-\frac{1}{2}+i\tau}(i0)=e^{-\frac{i\mu\pi}{2}}P^\mu_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-i0)\Rightarrow P^\mu_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-i0)=e^{i\mu\pi}P^\mu_{-\frac{1}{2}+i\tau}(i0)\\ Q^\mu_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\tau+\mu\right)\left(e^{-\frac{i\mu\pi}{2}}Q^\mu_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x+i0)+e^{\frac{i\mu\pi}{2}}Q^\mu_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x-i0)\right)\end{cases}$$

$$\Rightarrow P^\mu_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)=\frac{1}{2}\left(e^{+\frac{i\mu\pi}{2}}P^\mu_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x+i0)+e^{-\frac{i\mu\pi}{2}}P^\mu_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x-i0)\right)$$

$$\Rightarrow P^\mu_{-\frac{1}{2}+i\tau}(0)=\frac{1}{2}\left(e^{+\frac{i\mu\pi}{2}}P^\mu_{-\frac{1}{2}+i\tau}(i0)+e^{-\frac{i\mu\pi}{2}}P^\mu_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-i0)\right)=e^{+\frac{i\mu\pi}{2}}P^\mu_{-\frac{1}{2}+i\tau}(i0)\Rightarrow\begin{cases}P^\mu_{-\frac{1}{2}+i\tau}(i0)=e^{-\frac{i\mu\pi}{2}}P^\mu_{-\frac{1}{2}+i\tau}(0)\\ P^\mu_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-i0)=e^{\frac{i\mu\pi}{2}}P^\mu_{-\frac{1}{2}+i\tau}(0)\end{cases}.$$

$$\Rightarrow P^1_{-\frac{1}{2}+i\tau}(i0)=-iP^1_{-\frac{1}{2}+i\tau}(0)\quad P^0_{-\frac{1}{2}+i\tau}(i0)=P^0_{-\frac{1}{2}+i\tau}(0)$$

$$Plus\ exactement\quad \lim_{x\to0^+}P^\mu_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix)=e^{-\frac{i\mu\pi}{2}}P^\mu_{-\frac{1}{2}+i\tau}(0)\quad \lim_{x\to0^+}P^\mu_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ix)=e^{\frac{i\mu\pi}{2}}P^\mu_{-\frac{1}{2}+i\tau}(0)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}P^\mu_{-\frac{1}{2}+i\tau}(+i0)-P^\mu_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-i0)=-\left(e^{\frac{i\mu\pi}{2}}-e^{-\frac{i\mu\pi}{2}}\right)P^\mu_{-\frac{1}{2}+i\tau}(0)=-2iSin\left(\frac{\mu\pi}{2}\right)P^\mu_{-\frac{1}{2}+i\tau}(0)\\ P^\mu_{-\frac{1}{2}+i\tau}(+i0)+P^\mu_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-i0)=P^\mu_{-\frac{1}{2}+i\tau}(0)=2Cos\left(\frac{\mu\pi}{2}\right)P^\mu_{-\frac{1}{2}+i\tau}(0)\end{cases}$$

$$Et\ P^0_{-\frac{1}{2}+i\tau}(0)=\sqrt{\pi}\left(\Gamma\left(\frac{3}{4}-i\tau\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}+i\tau\right)\right)^{-1}\quad et\quad P^1_{-\frac{1}{2}+i\tau}(0)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(\frac{1}{4}+\tau^2\right)\left(\Gamma\left(\frac{5}{4}-i\tau\right)\Gamma\left(\frac{5}{4}+i\tau\right)\right)^{-1}$$

$$et\quad P^\mu_{-\frac{1}{2}+i\tau}(0)=\frac{{}_2F_1\left(\frac{1}{2}-i\tau,\frac{1}{2}+i\tau;1-\mu;\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(1-\mu)}$$

Mais attention ces fonctions de Legendre d'argument purement imaginaire sont celles qui sont définies par rapport à la coupure [-∞,+1] (de type 3 sous Mathematica. Pour les fonctions de type 2, définie par une coupure [-∞,-1] et [1,∞], soit celles comportant l'axe complet des imaginaires, alors il n'y a pas de saut en i0 :

$$P^\mu_{-\frac{1}{2}+i\tau}(i0)=P^\mu_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-i0)=P^\mu_{-\frac{1}{2}+i\tau}(0).$$

Résumons ces propriétés de discontinuité sur l'axe des imaginaires par les formules suivantes :

$$\textit{Fonction de Legendre de type } 2 \quad \textit{coupure } [-\infty,-1]\cup[+1,+\infty]$$
$$P_\nu^\mu(x)=P_\nu^\mu(x\pm i0)$$
$$\textit{Fonction de Legendre de type } 3 \quad \textit{coupure } [-\infty,+1]$$

$$P_\nu^\mu(x)=e^{\pm\frac{i\mu\pi}{2}}P_\nu^\mu(x\pm i0)\Rightarrow P_\nu^\mu(\pm i0)=e^{\mp\frac{i\mu\pi}{2}}P_\nu^\mu(0)\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{P_\nu^\mu(i0)+P_\nu^\mu(-i0)}{2}=Cos\left(\dfrac{\mu\pi}{2}\right)P_\nu^\mu(0)\\ \dfrac{P_\nu^\mu(i0)-P_\nu^\mu(-i0)}{2i}=-Sin\left(\dfrac{\mu\pi}{2}\right)P_\nu^\mu(0)\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{P^\mu_{-\frac{1}{2}+i\tau}(i0)+P^\mu_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-i0)}{2}=Cos\left(\dfrac{\mu\pi}{2}\right)P^\mu_{-\frac{1}{2}+i\tau}(0)\\ \dfrac{P^\mu_{-\frac{1}{2}+i\tau}(i0)-P^\mu_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-i0)}{2i}=-Sin\left(\dfrac{\mu\pi}{2}\right)P^\mu_{-\frac{1}{2}+i\tau}(0)\end{cases}$$

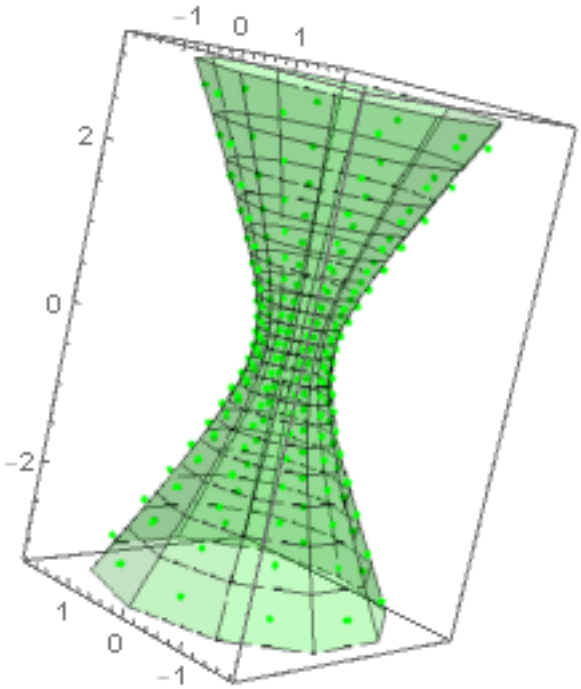
$$\mu=0\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{P^0_{-\frac{1}{2}+i\tau}(i0)+P^0_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-i0)}{2}=P^0_{-\frac{1}{2}+i\tau}(0)\\ \dfrac{P^0_{-\frac{1}{2}+i\tau}(i0)-P^0_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-i0)}{2i}=0\end{cases}\qquad \mu=1\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{P^1_{-\frac{1}{2}+i\tau}(i0)+P^1_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-i0)}{2}=0\\ \dfrac{P^1_{-\frac{1}{2}+i\tau}(i0)-P^1_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-i0)}{2i}=-P^1_{-\frac{1}{2}+i\tau}(0)\end{cases}.$$

Les fonctions coniques de Mehler d'argument purement imaginaire sont solutions de l'équation différentielle :

$$(1-z^2)\frac{d^2y(z)}{dz^2}-2z\frac{dy(z)}{dz}-\left[\frac{1}{4}+\tau^2+\frac{\mu^2}{1-z^2}\right]y(z)=0\Leftarrow z=i\varsigma$$
$$\Rightarrow-(1+\varsigma^2)\frac{d^2y(\varsigma)}{d\varsigma^2}-2\varsigma\frac{dy(\varsigma)}{d\varsigma}-\left[\frac{1}{4}+\tau^2+\frac{\mu^2}{1+\varsigma^2}\right]y(z)=0$$
$$\Rightarrow(1+\varsigma^2)\frac{d^2y(\varsigma)}{d\varsigma^2}+2\varsigma\frac{dy(\varsigma)}{d\varsigma}+\left[\frac{1}{4}+\tau^2+\frac{\mu^2}{1+\varsigma^2}\right]y(\varsigma)=0$$
.

Représentation intégrale des solutions d'un problème aux limites inhomogène angulaire sur l'hyperboloïde de révolution à une nappe

Tout comme dans le système de coordonnées sphéroïdales allongées, il n'est pas possible de développer en série de fonctions propres la solution d'un problème inhomogène en dimension angulaire sur tout l'intervalle de valeur radiale [-∞,+∞], soit sur un hyperboloïde à une nappe complet.



En revanche, une construction sous forme de représentation intégrale de la solution est rendue possible grâce à une transformation intégrale modifiée de Mehler-Fock appliqué cette fois à des fonctions définies entre [-∞,+∞] :

Transformation intégrale modifiée de Mehler-Fock

Toute fonction f(x), x€[-∞,+∞] peut se représenter sous la forme d'une double intégrale sur tout point sans discontinuité de valeurs :

$$f(\eta)=\int_0^{+\infty} d\tau\,\frac{\tau\,Tanh(\pi\tau)}{Cosh(\pi\tau)}\left\{\begin{array}{l}\left(\begin{array}{l}\dfrac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(iSinh(\eta))+P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-iSinh(\eta))}{2}\times\\ \times\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} d\varsigma\,Cosh(\varsigma)\,f(\varsigma)\,\dfrac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(iSinh(\varsigma))+P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-iSinh(\varsigma))}{2}\end{array}\right)+\\ +\left(\begin{array}{l}\dfrac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(iSinh(\eta))-P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-iSinh(\eta))}{2i}\times\\ \times\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} d\varsigma\,Cosh(\varsigma)\,f(\varsigma)\,\dfrac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(iSinh(\varsigma))-P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-iSinh(\varsigma))}{2i}\end{array}\right)\end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow f(x)=\int_0^{+\infty} d\tau\,\frac{\tau\,Tanh(\pi\tau)}{Cosh(\pi\tau)}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix)+P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ix)}{2}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} dy\,f(y)\,\dfrac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(iy)+P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-iy)}{2}+\\ \dfrac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix)-P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ix)}{2i}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} dy\,f(y)\,\dfrac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(iy)-P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-iy)}{2i}\end{array}\right\}\Leftarrow\begin{cases}x=Sinh(\eta)\\ y=Sinh(\varsigma)\end{cases}$$

Sous les conditions suivantes des fonctions f(η) :

- la fonction f(x) doit être continue par morceau, et bornée dans chaque sous-intervalle [x1,x2] de l'intervalle [-∞,+∞]
- les intégrales suivantes doivent être définies :

$$\int_{-\infty}^{-a} dx\,|f(x)|\,|x|^{-\frac{1}{2}}\,Log(1+|x|)\quad et\quad \int_{a}^{+\infty} dx\,|f(x)|\,(x)^{-\frac{1}{2}}\,Log(1+x)\cdot$$

quelque soit la valeur a > 0 pris dans l'intervalle d'intégration.

Si la fonction f possède une discontinuité à la valeur η, on écrit :

$$\frac{f(\eta+0)+f(\eta-0)}{2}=\int_0^{+\infty}d\tau\,\frac{\tau\,Tanh(\pi\tau)}{Cosh(\pi\tau)}\left\{\begin{array}{l}\left(\begin{array}{l}\dfrac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(iSinh(\eta))+P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-iSinh(\eta))}{2}\times\\ \times\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}d\varsigma\,Cosh(\varsigma)f(\varsigma)\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(iSinh(\varsigma))+P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-iSinh(\varsigma))}{2}\end{array}\right)+\\ +\left(\begin{array}{l}\dfrac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(iSinh(\eta))-P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-iSinh(\eta))}{2i}\times\\ \times\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}d\varsigma\,Cosh(\varsigma)f(\varsigma)\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(iSinh(\varsigma))-P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-iSinh(\varsigma))}{2i}\end{array}\right)\end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\int_0^{+\infty}d\tau\,\frac{\tau\,Tanh(\pi\tau)}{Cosh(\pi\tau)}\left\{\begin{array}{l}\left(\begin{array}{l}\dfrac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix)+P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ix)}{2}\times\\ \times\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}dy\,f(y)\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(iy)+P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-iy)}{2}\end{array}\right)+\\ +\left(\begin{array}{l}\dfrac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix)-P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ix)}{2i}\times\\ \times\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}dy\,f(y)\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(iy)-P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-iy)}{2i}\end{array}\right)\end{array}\right\}\Leftarrow\begin{cases}x=Sinh(\eta)\\ y=Sinh(\varsigma)\end{cases}$$

Deux cas particuliers simplifient les formules lorsque la fonction est paire (et qu'elle n'a pas de point discontinuité) :

$$f(x)=2\int_0^{+\infty}d\tau\,\frac{\tau\,Tanh(\pi\tau)}{Cosh(\pi\tau)}\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix)+P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ix)}{2}\int_0^{+\infty}dy\,f(y)\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(iy)+P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-iy)}{2}$$

Lorsque la fonction est impaire, il vient (et qu'elle n'a pas de point discontinuité) :

$$f(x)=2\int_0^{+\infty}d\tau\,\frac{\tau\,Tanh(\pi\tau)}{Cosh(\pi\tau)}\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix)-P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ix)}{2i}\int_0^{+\infty}dy\,f(y)\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(iy)-P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-iy)}{2i}$$

En cas de point de discontinuité, il vient :

$$f(x)=f(-x)$$

$$\Rightarrow \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=2\int_0^{+\infty} d\tau\,\frac{\tau\,Tanh(\pi\tau)}{Cosh(\pi\tau)}\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix)+P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ix)}{2}\int_0^{+\infty} dy\,f(y)\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(iy)+P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-iy)}{2}.$$

$$f(x)=-f(-x)$$

$$\Rightarrow \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=2\int_0^{+\infty} d\tau\,\frac{\tau\,Tanh(\pi\tau)}{Cosh(\pi\tau)}\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix)-P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ix)}{2i}\int_0^{+\infty} dy\,f(y)\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(iy)-P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-iy)}{2i}$$

Donnons quelques exemples provenant de l'article de N.N.Lebedev et Skalkaya : « Integral expansion of an arbitrary function in terms of spherical functions », PMM Vol 30, n°2, 1968.

<u>Exemples de développement intégral d'une fonction limite par des fonctions coniques de Mehler d'argument imaginaire</u>

<u>Exemple : développement intégral d'une fonction limite paire constante à support bornée :</u>

$$f(x)=\begin{cases}1 & |x|<a\\ 0 & |x|>a\end{cases}$$

$$f(x)=\int_0^{+\infty} d\tau\,\frac{\tau\,Tanh(\pi\tau)}{Cosh(\pi\tau)}\left(\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix)+P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ix)}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} dy\,f(y)\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(iy)+P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-iy)}{2}\right).$$

$$=2\int_0^{+\infty} d\tau\,\frac{\tau\,Tanh(\pi\tau)}{Cosh(\pi\tau)}\left(\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix)+P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ix)}{2}\int_0^{+\infty} dy\,f(y)\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(iy)+P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-iy)}{2}\right)$$

D'après la propriété miroir des fonctions de Legendre associés, les combinaisons paires et impaires suivantes sont à valeur réelle :

$$\frac{P^{\mu}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix)+P^{\mu}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ix)}{2}=\mathrm{Re}\left(P^{\mu}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix)\right)\quad \frac{P^{\mu}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix)-P^{\mu}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ix)}{2i}=\mathrm{Im}\left(P^{\mu}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix)\right).$$

L'intégrale : $\int_0^{+\infty} dy \frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(iy)+P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-iy)}{2}$ est obtenue à partir d'une formule connue d'intégrale indéfinie sur les fonctions associées de Legendre (voir ≪ A.P.Prudnikov, Yu.A.Brychkov, O.I.Marichev, Integrals and Series - Volume 3 - More Special Functions≫,) en page 34 de la version russe, section 1.12.1, équations n°9) :

$$\int dx \left(1-x^2\right)^{\frac{\mu}{2}} P_\nu^\mu(x) = \frac{\left(1-x^2\right)^{\frac{\mu+1}{2}} P_\nu^{\mu+1}(x)}{(\nu-\mu)(\nu+\mu+1)} \to \left(1-x^2\right)^{\frac{\mu}{2}} P_\nu^\mu(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\left(1-x^2\right)^{\frac{\mu+1}{2}} P_\nu^{\mu+1}(x)}{(\nu-\mu)(\nu+\mu+1)}\right)$$

$$\begin{cases} x = iy \\ \nu = -\frac{1}{2}+i\tau \quad \mu = 0 \end{cases} \Rightarrow P^0_{-\frac{1}{2}+i\tau}(iy) = \frac{1}{i}\frac{d}{dy}\left(\frac{\sqrt{1+y^2}\,P^1_{-\frac{1}{2}+i\tau}(iy)}{\left(-\frac{1}{2}+i\tau\right)\left(\frac{1}{2}+i\tau\right)}\right)$$

$$\Rightarrow P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(iy) = -\frac{1}{\left(\frac{1}{4}+\tau^2\right)}\frac{d}{dy}\left(\sqrt{y^2+1}\,\frac{P^1_{-\frac{1}{2}+i\tau}(iy)}{i}\right) \quad P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-iy) = +\frac{1}{\left(\frac{1}{4}+\tau^2\right)}\frac{d}{dy}\left(\sqrt{y^2+1}\,\frac{P^1_{-\frac{1}{2}+i\tau}(iy)}{i}\right)$$

$$\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(iy)+P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-iy)}{2} = -\frac{1}{\left(\frac{1}{4}+\tau^2\right)}\frac{d}{dy}\left(\sqrt{y^2+1}\,\frac{P^1_{-\frac{1}{2}+i\tau}(iy)-P^1_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-iy)}{2i}\right)$$

$$\Leftrightarrow \int_0^y dx \frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix)+P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ix)}{2} = -\frac{\sqrt{y^2+1}}{\left(\frac{1}{4}+\tau^2\right)}\frac{P^1_{-\frac{1}{2}+i\tau}(iy)-P^1_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-iy)}{2i}$$

Pour être honnête, même si cela m'a occasionné quelque confusion, dans l'article de 1967 de N.N.Lebedev et I.P.Skalskaya « Integral expansion of an arbitrary function in terms of spherical functions », la formule donnée est la suivante :

$$\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(iy)+P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-iy)}{2} = -\frac{1}{\left(\frac{1}{4}+\tau^2\right)}\frac{d}{dy}\left(\sqrt{y^2+1}\,\frac{P^1_{-\frac{1}{2}+i\tau}(iy)+P^1_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-iy)}{2}\right).$$

Mais il me semble que cette formule ne peut-être juste en raison d'un fait simple, à savoir que la dérivée d'une fonction paire est une fonction impaire, ce qui n'est manifestement pas le cas ici. Partant de l'expression de la discontinuité à la coupure et en l'injectant dans la double intégrale :

$$f(x) = -2\int_0^{+\infty} d\tau \frac{\tau\, Tanh(\pi\tau)}{Cosh(\pi\tau)} \frac{1}{\frac{1}{4}+\tau^2} \frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix) + P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ix)}{2} \int_0^a dy \frac{d}{dy}\left(\sqrt{y^2+1} \frac{P^1_{-\frac{1}{2}+i\tau}(iy) - P^1_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-iy)}{2i} \right)$$

$$= -2\int_0^{+\infty} d\tau \frac{\tau\, Tanh(\pi\tau)}{Cosh(\pi\tau)} \frac{1}{\frac{1}{4}+\tau^2} \frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix) + P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ix)}{2} \left[\sqrt{y^2+1} \frac{P^1_{-\frac{1}{2}+i\tau}(iy) - P^1_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-iy)}{2i} \right]_0^a$$

$$Or \quad \lim_{x\to 0^+} P^1_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix) = \lim_{x\to 0^+} P^1_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ix) \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{P^1_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix) - P^1_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ix)}{2i} = 0$$

$$\Rightarrow f(x) = -8\sqrt{a^2+1}\int_0^{+\infty} d\tau \frac{\tau\, Tanh(\pi\tau)}{Cosh(\pi\tau)} \left[\frac{1}{1+4\tau^2} \frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix) + P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ix)}{2} \times \frac{P^1_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ia) - P^1_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ia)}{2i} \right]$$

$$f(x) = -8\sqrt{a^2+1}\int_0^{+\infty} d\tau \frac{\tau\, Tanh(\pi\tau)}{(1+4\tau^2)Cosh(\pi\tau)} \left[\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix) + P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ix)}{2} \frac{P^1_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ia) - P^1_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ia)}{2i} \right]$$

La formule donnée dans l'article de Lebedev et Skalskaya est la suivante :

$$f(x) = -8\sqrt{a^2+1}\int_0^{+\infty} d\tau \frac{\tau\, Tanh(\pi\tau)}{(1+4\tau^2)Cosh(\pi\tau)} \frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix) + P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ix)}{2} \frac{P^1_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ia) + P^1_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ia)}{2}$$

On peut calculer le développement à l'aide d'une autre intégrale indéfinie, à savoir :

$$\int dzP_\nu(z)=\frac{P_{\nu+1}(z)-P_{\nu-1}(z)}{2\nu+1}\Rightarrow\int dzP_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\alpha z)=\frac{1}{\alpha}\frac{P_{\frac{1}{2}+i\tau}(\alpha z)-P_{-\frac{3}{2}+i\tau}(\alpha z)}{2i\tau}\Leftarrow P_{-\frac{3}{2}+i\tau}(\alpha z)=P_{\frac{1}{2}-i\tau}(\alpha z)$$

$$f(x)=\begin{cases}1 & |x|<a\\ 0 & |x|>a\end{cases}\Rightarrow f(x)=2\int_0^{+\infty}d\tau\,\frac{\tau\,Tanh(\pi\tau)}{Cosh(\pi\tau)}\left(\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix)+P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ix)}{2}\int_0^a dy\,\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(iy)+P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-iy)}{2}\right)$$

$$\int_0^a dy\,\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(iy)+P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-iy)}{2}=-\frac{1}{4\tau}\left[\begin{array}{l}P_{\frac{1}{2}+i\tau}(ia)-P_{\frac{1}{2}-i\tau}(ia)-P_{\frac{1}{2}+i\tau}(-ia)+P_{\frac{1}{2}-i\tau}(-ia)-\\ -\left(P_{\frac{1}{2}+i\tau}(i0)-P_{\frac{1}{2}-i\tau}(i0)-P_{\frac{1}{2}+i\tau}(-i0)+P_{\frac{1}{2}-i\tau}(-i0)\right)\end{array}\right]$$

Pas de discontinuités sur la coupure pour les fonctions d'ordre 0

$$\Rightarrow P_{\frac{1}{2}+i\tau}(i0)-P_{\frac{1}{2}+i\tau}(-i0)+P_{\frac{1}{2}-i\tau}(-i0)-P_{\frac{1}{2}-i\tau}(i0)=0$$

$$\Rightarrow\int_0^a dy\,\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(iy)+P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-iy)}{2}=-\frac{1}{4\tau}\left[P_{\frac{1}{2}+i\tau}(ia)-P_{\frac{1}{2}-i\tau}(ia)-P_{\frac{1}{2}+i\tau}(-ia)+P_{\frac{1}{2}-i\tau}(-ia)\right]$$

$$f(x)=-\int_0^{+\infty}d\tau\,\frac{Tanh(\pi\tau)}{Cosh(\pi\tau)}\left(\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix)+P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ix)}{2}\right)\left[\frac{P_{\frac{1}{2}+i\tau}(ia)-P_{\frac{1}{2}+i\tau}(-ia)}{2}-\frac{P_{\frac{1}{2}-i\tau}(ia)-P_{\frac{1}{2}-i\tau}(-ia)}{2}\right]$$

Cette dernière expression est bien réelle :

$$\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix)+P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ix)}{2}\to réel\quad\vdots A=\frac{P_{\frac{1}{2}+i\tau}(ia)-P_{\frac{1}{2}+i\tau}(-ia)}{2}-\frac{P_{\frac{1}{2}-i\tau}(ia)-P_{\frac{1}{2}-i\tau}(-ia)}{2}$$

$$Propriété\ miroir\to P_{\frac{1}{2}+i\tau}(ia)=\overline{P_{\frac{1}{2}-i\tau}(-ia)}\quad et\quad P_{\frac{1}{2}-i\tau}(ia)=\overline{P_{\frac{1}{2}+i\tau}(-ia)}$$

$$\Rightarrow A=\frac{\overline{P_{\frac{1}{2}-i\tau}(-ia)}-P_{\frac{1}{2}+i\tau}(-ia)}{2}-\frac{\overline{P_{\frac{1}{2}+i\tau}(-ia)}-P_{\frac{1}{2}-i\tau}(-ia)}{2}$$

$$Posons\ z_1=P_{\frac{1}{2}+i\tau}(-ia)\quad z_2=P_{\frac{1}{2}-i\tau}(-ia)$$

$$\Rightarrow A=\frac{\overline{z_2}-z_1}{2}-\frac{\overline{z_1}-z_2}{2}=\frac{z_2+\overline{z_2}}{2}-\frac{z_1+\overline{z_1}}{2}=\mathrm{Re}(z_2-z_1)\to réel$$

.

Et de plus elle est identique à l'expression précédente, en raison des relations de récurrence existante sur les fonctions associées de Legendre . En effet :

$$\begin{cases}\sqrt{1-z^2}\,P_\nu^{\mu+1}(z)=(\nu-\mu)zP_\nu^\mu(z)-(\nu+\mu)P_{\nu-1}^\mu(z)\\(\nu-\mu+1)P_{\nu+1}^\mu(z)-(2\nu+1)zP_\nu^\mu(z)+(\nu+\mu)P_{\nu-1}^\mu(z)\end{cases}$$

$$\Rightarrow zP_\nu^\mu(z)=\frac{(\nu-\mu+1)P_{\nu+1}^\mu(z)+(\nu+\mu)P_{\nu-1}^\mu(z)}{(2\nu+1)}$$

$$\Rightarrow \sqrt{1-z^2}\,P_\nu^{\mu+1}(z)=\frac{(\nu-\mu)(\nu-\mu+1)P_{\nu+1}^\mu(z)-(\nu+\mu)(\nu+\mu+1)P_{\nu-1}^\mu(z)}{(2\nu+1)}$$

$$Pour\quad \mu=0\Rightarrow \sqrt{1-z^2}\,P_\nu^1(z)=\frac{\nu(\nu+1)\left(P_{\nu+1}^0(z)-P_{\nu-1}^0(z)\right)}{(2\nu+1)}$$

Appliquons cette formule pour les fonctions coniques de Mehler :

$$\nu=-\frac{1}{2}+i\tau\quad 2\nu+1=2i\tau\quad \nu(\nu+1)=-\left(\frac{1}{4}+\tau^2\right)\quad P^0_{-\frac{3}{2}+i\tau}(ix)=P^0_{\frac{1}{2}-i\tau}(ix)$$

$$\Rightarrow \sqrt{1+x^2}\,P^1_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix)=-\left(\frac{1}{4}+\tau^2\right)\frac{\left(P^0_{\frac{1}{2}+i\tau}(ix)-P^0_{\frac{1}{2}-i\tau}(ix)\right)}{2i\tau}\Rightarrow\begin{cases}P^0_{\frac{1}{2}+i\tau}(ix)-P^0_{\frac{1}{2}-i\tau}(ix)=-2i\tau\dfrac{\sqrt{1+x^2}\,P^1_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix)}{\left(\frac{1}{4}+\tau^2\right)}\\[2ex]P^0_{\frac{1}{2}+i\tau}(-ix)-P^0_{\frac{1}{2}-i\tau}(-ix)=-2i\tau\dfrac{\sqrt{1+x^2}\,P^1_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ix)}{\left(\frac{1}{4}+\tau^2\right)}\end{cases}$$

$$\frac{P_{\frac{1}{2}+i\tau}(ia)-P_{\frac{1}{2}+i\tau}(-ia)}{2}-\frac{P_{\frac{1}{2}-i\tau}(ia)-P_{\frac{1}{2}-i\tau}(-ia)}{2}=\frac{P_{\frac{1}{2}+i\tau}(ia)-P_{\frac{1}{2}-i\tau}(ia)}{2}-\frac{P_{\frac{1}{2}+i\tau}(-ia)-P_{\frac{1}{2}-i\tau}(-ia)}{2}$$

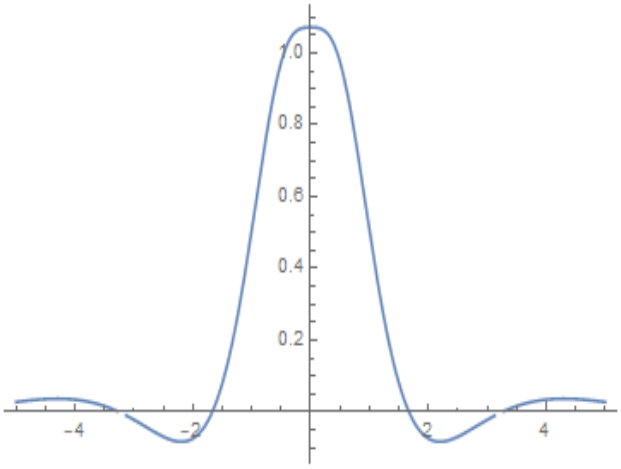
$$=\frac{2\tau\sqrt{1+a^2}}{\left(\frac{1}{4}+\tau^2\right)}\left(\frac{P^1_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ia)-P^1_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ia)}{2i}\right)$$

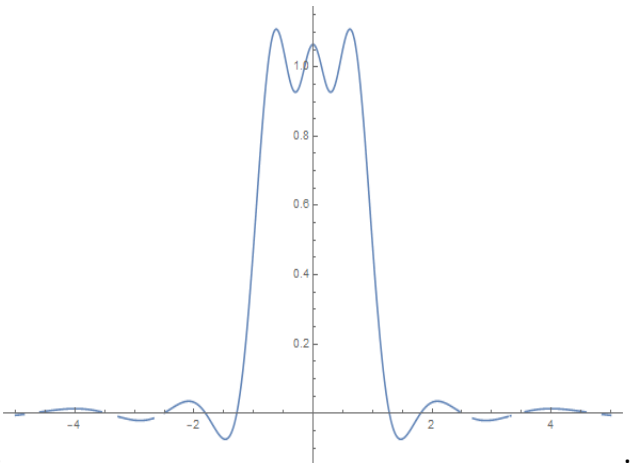
$$\Rightarrow f(x)=-8\sqrt{1+a^2}\int_0^{+\infty}d\tau\,\frac{\tau}{(1+4\tau^2)}\frac{Tanh(\pi\tau)}{Cosh(\pi\tau)}\left(\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix)+P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ix)}{2}\right)\left(\frac{P^1_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ia)-P^1_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ia)}{2i}\right)$$

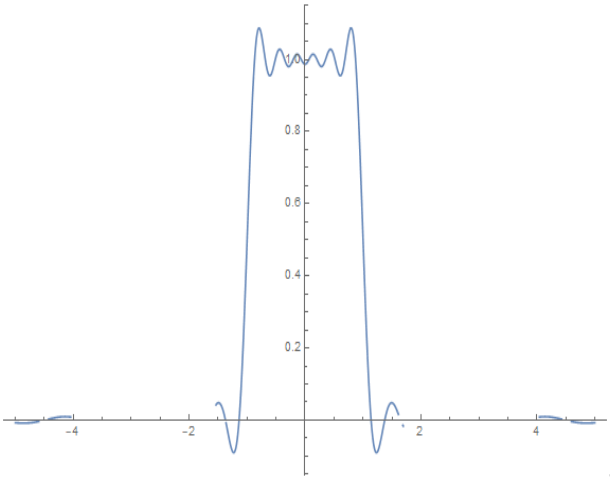
$$\Rightarrow\int_0^a dy\,\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(iy)+P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-iy)}{2}=-\frac{\sqrt{1+a^2}}{\left(\frac{1}{4}+\tau^2\right)}\left(\frac{P^1_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ia)-P^1_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ia)}{2i}\right)$$

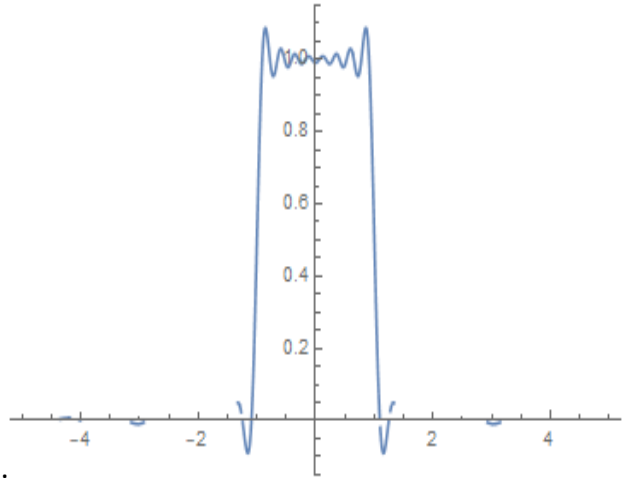
Et nous avons obtenu la même formule.

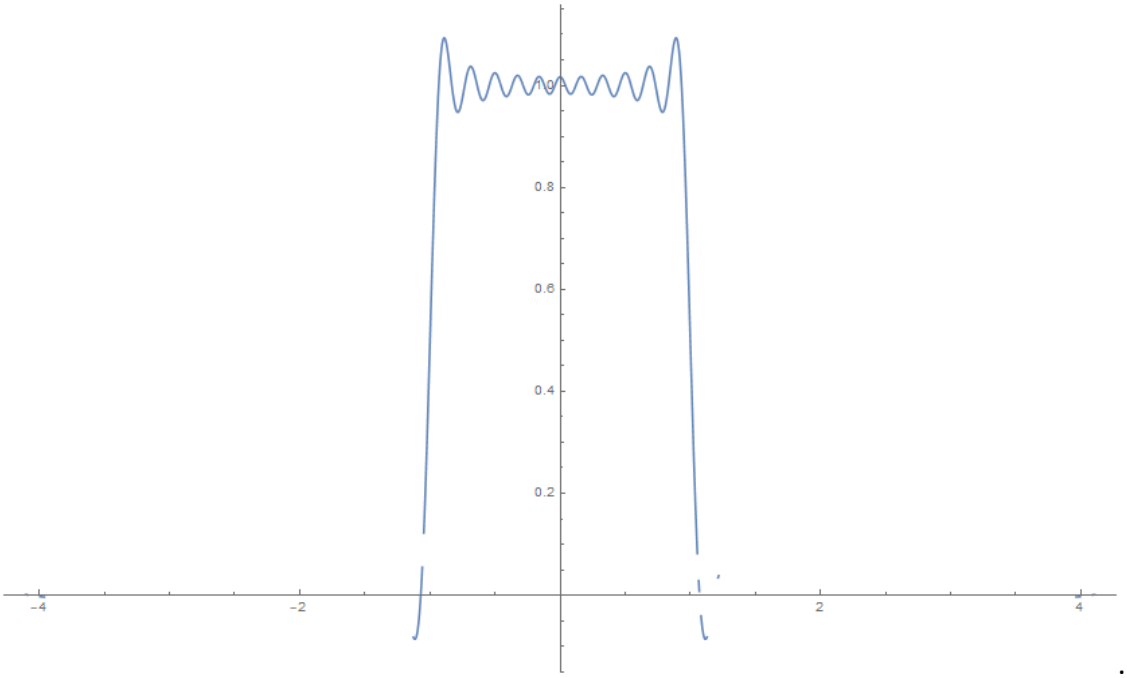
Cette dernière solution donne le profil suivant, lorsque l'on augmente successivement les bornes d'intégration entre [0,5], [0,10], [0,20], [0,30] et [0,40]











On note que lorsque a tend vers 0, dans toutes les solutions données, l'intégrande s'annule.

Exemple : développement intégral d'une fonction limite impaire, constante à support bornée :

$$f(x)=\begin{cases}1 & x\in[0,a]\\ -1 & x\in[-a,0]\\ 0 & |x|>a\end{cases}\Rightarrow f(x)=2\int_0^{+\infty}d\tau\,\frac{\tau\,Tanh(\pi\tau)}{Cosh(\pi\tau)}\left(\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix)-P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ix)}{2i}\int_0^{+\infty}dy\,f(y)\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(iy)-P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-iy)}{2i}\right)$$

D'après la propriété miroir des fonctions de Legendre associés, les combinaisons impaires sont à valeur réelle : $\dfrac{P^{\mu}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix)-P^{\mu}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ix)}{2i}=\mathrm{Im}\left(P^{\mu}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix)\right)$.

On peut calculer le développement à l'aide de l'intégrale indéfinie déjà utilisée

$$\int dzP_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\alpha z)=\frac{1}{\alpha}\frac{P_{\frac{1}{2}+i\tau}(\alpha z)-P_{\frac{1}{2}-i\tau}(\alpha z)}{2i\tau}$$

$$\Rightarrow\int dzP_{-\frac{1}{2}+i\tau}(iz)=-\frac{P_{\frac{1}{2}+i\tau}(iz)-P_{\frac{1}{2}-i\tau}(iz)}{2\tau}\qquad\int dzP_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-iz)=\frac{P_{\frac{1}{2}+i\tau}(-iz)-P_{\frac{1}{2}-i\tau}(-iz)}{2\tau}$$

$$f(x)=\begin{cases}1 & x<a\\ -1 & x>-a\\ 0 & |x|>a\end{cases}\Rightarrow f(x)=2\int_0^{+\infty}d\tau\,\frac{\tau\,Tanh(\pi\tau)}{Cosh(\pi\tau)}\left(\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix)-P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ix)}{2i}\int_0^{a}dy\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(iy)-P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-iy)}{2i}\right)$$

$$\int_0^a dy\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(iy)-P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-iy)}{2i}=-\frac{1}{4i\tau}\left[\begin{array}{l}P_{\frac{1}{2}+i\tau}(ia)-P_{\frac{1}{2}-i\tau}(ia)+P_{\frac{1}{2}+i\tau}(-ia)-P_{\frac{1}{2}-i\tau}(-ia)-\\ -\left(P_{\frac{1}{2}+i\tau}(i0)+P_{\frac{1}{2}+i\tau}(-i0)-P_{\frac{1}{2}-i\tau}(i0)-P_{\frac{1}{2}-i\tau}(-i0)\right)\end{array}\right]$$

$$P_{\frac{1}{2}+i\tau}(\pm i0)=P_{\frac{1}{2}+i\tau}(0)=\frac{\sqrt{\pi}}{\left(\frac{1}{4}+\frac{i\tau}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}-\frac{i\tau}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{i\tau}{2}\right)}\qquad P_{\frac{1}{2}-i\tau}(\pm i0)=P_{\frac{1}{2}-i\tau}(0)=\frac{\sqrt{\pi}}{\left(\frac{1}{4}-\frac{i\tau}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{i\tau}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}-\frac{i\tau}{2}\right)}$$

$$\Rightarrow-\frac{2\left(P_{\frac{1}{2}+i\tau}(i0)-P_{\frac{1}{2}-i\tau}(i0)\right)}{4i\tau}=\frac{8\sqrt{\pi}}{\left(1+4\tau^2\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}-\frac{i\tau}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{i\tau}{2}\right)}$$

$$\Rightarrow\int_0^a dy\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(iy)-P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-iy)}{2i}=-\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{4i\tau}\left[P_{\frac{1}{2}+i\tau}(ia)+P_{\frac{1}{2}+i\tau}(-ia)-P_{\frac{1}{2}-i\tau}(ia)-P_{\frac{1}{2}-i\tau}(-ia)\right]+\\ +\frac{8\sqrt{\pi}}{\left(1+4\tau^2\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}-\frac{i\tau}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{i\tau}{2}\right)}\end{array}\right\}$$

$$f(x)=-\int_0^{+\infty}d\tau\,\frac{Tanh(\pi\tau)}{Cosh(\pi\tau)}\left(\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix)-P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ix)}{2i}\right)\left\{\begin{array}{l}\frac{P_{\frac{1}{2}+i\tau}(ia)+P_{\frac{1}{2}+i\tau}(-ia)}{2i}-\frac{P_{\frac{1}{2}-i\tau}(ia)+P_{\frac{1}{2}-i\tau}(-ia)}{2i}+\\ +\frac{16\tau\sqrt{\pi}}{\left(1+4\tau^2\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}-\frac{i\tau}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{i\tau}{2}\right)}\end{array}\right\}$$

.

Cette dernière expression est bien réelle puisque :

$$\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix)-P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ix)}{2i}\to réel \quad A=\frac{P_{\frac{1}{2}+i\tau}(ia)+P_{\frac{1}{2}+i\tau}(-ia)}{2i}-\frac{P_{\frac{1}{2}-i\tau}(ia)+P_{\frac{1}{2}-i\tau}(-ia)}{2i}$$

$$Propriété\ miroir \to P_{\frac{1}{2}+i\tau}(ia)=\overline{P_{\frac{1}{2}-i\tau}(-ia)} \quad et \quad P_{\frac{1}{2}-i\tau}(ia)=\overline{P_{\frac{1}{2}+i\tau}(-ia)}$$

$$\Rightarrow A=\frac{\overline{P_{\frac{1}{2}-i\tau}(-ia)}+P_{\frac{1}{2}+i\tau}(-ia)}{2i}-\frac{\overline{P_{\frac{1}{2}+i\tau}(-ia)}+P_{\frac{1}{2}-i\tau}(-ia)}{2i}$$

$$Posons\ z_1=P_{\frac{1}{2}+i\tau}(-ia) \quad z_2=P_{\frac{1}{2}-i\tau}(-ia)$$

$$\Rightarrow A=\frac{\overline{z_2}+z_1}{2i}-\frac{\overline{z_1}+z_2}{2i}=\frac{\overline{z_2}-z_2}{2i}+\frac{z_1-\overline{z_1}}{2i}=\mathrm{Im}(z_1-z_2)\to réel$$

On peut simplifier encore cette expression en utilisant la fonction conique de Mehler d'ordre 1 :

$$\frac{P_{\frac{1}{2}+i\tau}(ia)+P_{\frac{1}{2}+i\tau}(-ia)}{2i}-\frac{P_{\frac{1}{2}-i\tau}(ia)+P_{\frac{1}{2}-i\tau}(-ia)}{2i}=\frac{P_{\frac{1}{2}+i\tau}(ia)-P_{\frac{1}{2}-i\tau}(ia)}{2i}+\frac{P_{\frac{1}{2}+i\tau}(-ia)-P_{\frac{1}{2}-i\tau}(-ia)}{2i}$$

$$=-\frac{\tau\sqrt{1+a^2}}{\left(\frac{1}{4}+\tau^2\right)}\left(P^1_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ia)+P^1_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ia)\right)$$

$$f(x)=-\int_0^{+\infty}d\tau\,\frac{Tanh(\pi\tau)}{Cosh(\pi\tau)}\left(\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix)-P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ix)}{2i}\right)\left\{\begin{array}{l}\dfrac{16\tau\sqrt{\pi}}{(1+4\tau^2)\Gamma\left(\frac{1}{4}-\frac{i\tau}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{i\tau}{2}\right)}-\\ -\dfrac{2\tau\sqrt{1+a^2}}{\left(\frac{1}{4}+\tau^2\right)}\dfrac{P^1_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ia)+P^1_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ia)}{2}\end{array}\right\}$$

$$f(x)=\int_0^{+\infty}d\tau\,\frac{8\tau}{1+4\tau^2}\frac{Tanh(\pi\tau)}{Cosh(\pi\tau)}\left(\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix)-P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ix)}{2i}\right)\left\{\sqrt{1+a^2}\,\frac{P^1_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ia)+P^1_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ia)}{2}-\frac{2\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{1}{4}-\frac{i\tau}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{i\tau}{2}\right)}\right\}$$

$$\int_0^a dy\,\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(iy)-P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-iy)}{2i}=\frac{1}{\left(\frac{1}{4}+\tau^2\right)}\left[\sqrt{1+a^2}\,\frac{P^1_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ia)+P^1_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ia)}{2}-\frac{2\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{1}{4}-\frac{i\tau}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{i\tau}{2}\right)}\right]$$

.

Exemple : développement intégral d'une fonction limite paire bornée sur tout l'intervalle

Ici on donne sans démonstration l'intégrale définie qui conduit au développement en intégrale de Mehler de la fonction suivante :

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad Comme \quad \int_0^{+\infty} dy \frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(iy)+P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-iy)}{2}\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}=\frac{\pi}{Cosh(\pi\tau)}\left\{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(0)\right\}^2 .$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=2\pi\int_0^{+\infty} d\tau \frac{\tau\, Tanh(\pi\tau)}{Cosh^2(\pi\tau)}\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix)+P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ix)}{2}\left\{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(0)\right\}^2$$

Exemple : développement intégral d'une fonction limite paire bornée sur tout l'intervalle

Ici on donne sans démonstration l'intégrale définie qui conduit au développement en intégrale de Mehler de la fonction suivante et de sa transformée inverse de Mehler-Fock :

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2+a^2}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1+x^2+a^2}}=2\pi\int_0^{+\infty} d\tau \left\{\begin{array}{l}\frac{\tau\, Tanh(\pi\tau)}{Cosh^2(\pi\tau)}P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(0)\times \\ \times\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ia)+P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ia)}{2}\times\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix)+P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ix)}{2}\end{array}\right\}$$

$$\int_0^{+\infty} dy \frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(iy)+P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-iy)}{2}\frac{1}{\sqrt{1+y^2+a^2}}=\frac{\pi}{Cosh(\pi\tau)}\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ia)+P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ia)}{2}P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(0)$$

Des expressions alternatives peuvent être obtenues si l'on tien compte des formules :

$$\Gamma\left(\frac{3}{4}+\frac{i\tau}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}-\frac{i\tau}{2}\right)=\frac{2\pi^2}{Cosh(\pi\tau)\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{i\tau}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}-\frac{i\tau}{2}\right)}$$

$$\Rightarrow P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(0)=\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{3}{4}+\frac{i\tau}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}-\frac{i\tau}{2}\right)}=\frac{Cosh(\pi\tau)\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{i\tau}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}-\frac{i\tau}{2}\right)}{2\pi\sqrt{\pi}} .$$

Remarque : le développement des premières intégrales sur l'argument x, sont en général de convergence très lente, numériquement il faut une borne supérieure d'intégration très grande pour obtenir une bonne approximation numérique. En revanche les intégrales sur l'index τ sont en général très rapide et une borne supérieure d'intégration de τ=20 donne déjà de bon résultat d'approximation.

Avec le changement a->ia, il vient :

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1-a^2}}=2\pi\int_0^{+\infty} d\tau \left\{\begin{array}{l}\frac{\tau\, Tanh(\pi\tau)}{Cosh^2(\pi\tau)}P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(0)\times \\ \times\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(a)+P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-a)}{2}\times\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix)+P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ix)}{2}\end{array}\right\} .$$

$$\int_0^{+\infty} dy \frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(iy)+P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-iy)}{2}\frac{1}{\sqrt{y^2+1-a^2}}=\frac{\pi}{Cosh(\pi\tau)}\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(a)+P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-a)}{2}P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(0)$$

<u>Exemple : développement intégral d'une fonction limite présentant une discontinuité infini</u>

Ici on donne sans démonstration l'intégrale définie qui conduit au développement en intégrale de Mehler de la fonction suivante :

$$f(x)=\begin{cases}\left(a^2-x^2\right)^{-1/2} & |x|<a\\ 0 & |x|>a\end{cases}\Rightarrow f(x)=\pi\int_0^{+\infty}d\tau\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\tau\,Tanh(\pi\tau)}{Cosh(\pi\tau)}\times\dfrac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix)+P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ix)}{2}\times\\ P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(0)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}\left(\sqrt{1+a^2}\right)\end{array}\right\}.$$

$$\Rightarrow\int_0^a dy\,\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(iy)+P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-iy)}{2}\frac{1}{\sqrt{a^2-y^2}}=\frac{\pi}{2}P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(0)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}\left(\sqrt{1+a^2}\right)$$

<u>Dans un article de l'année 1992 uniquement publié en russe de l'auteur A.I.Moshinskii « Some singular integral equations that can be solved by means of integral transformations », plusieurs autres développement sont présentés :</u>

$$f(x)=\frac{x}{x^2+a^2}=\pi\int_0^{+\infty}d\tau\left\{\frac{\tau\,Tanh(\pi\tau)}{Cosh(\pi\tau)}P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(a)\times\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix)-P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ix)}{2i}\right\}$$

$$\Leftrightarrow\int_0^{+\infty}dx\,\frac{x}{x^2+a^2}\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix)-P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ix)}{2i}=-\frac{\pi}{2}P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(a)$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{x}{1+x^2}=\pi\int_0^{+\infty}d\tau\,\frac{\tau\,Tanh(\pi\tau)}{Cosh(\pi\tau)}\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix)-P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ix)}{2i}\quad\Leftrightarrow\int_0^{+\infty}dx\,\frac{x}{1+x^2}\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix)-P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ix)}{2i}=-\frac{\pi}{2}$$

$$f(x)=\frac{a}{x^2+a^2}=\pi\int_0^{+\infty}d\tau\left\{\frac{\tau\,Tanh(\pi\tau)}{Cosh(\pi\tau)}P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(a)\times\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix)+P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ix)}{2}\right\}$$

$$\Leftrightarrow\int_0^{+\infty}dx\,\frac{a}{x^2+a^2}\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix)+P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ix)}{2}=\frac{\pi}{2}P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(a)\qquad.$$

$$f(x)=\frac{1}{1+x^2}=\pi\int_0^{+\infty}d\tau\,\frac{\tau\,Tanh(\pi\tau)}{Cosh(\pi\tau)}\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix)+P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ix)}{2}\quad\Leftrightarrow\int_0^{+\infty}dx\,\frac{1}{1+x^2}\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix)+P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ix)}{2}=\frac{\pi}{2}$$

$$f(x)=\frac{Sin(\nu\ ArcTan(x))}{(1+x^2)^{\frac{\nu}{2}}}=-\frac{1}{2^{\nu-1}(\Gamma(\nu))^2}\int_0^{+\infty}d\tau\left\{\tau\ Tanh(\pi\tau)\Gamma\left(\nu-\frac{1}{2}+i\tau\right)\Gamma\left(\nu-\frac{1}{2}-i\tau\right)\times\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix)-P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ix)}{2i}\right\}$$

$$\Leftrightarrow\int_0^{+\infty}dx\frac{Sin(\nu\ ArcTan(x))}{(1+x^2)^{\frac{\nu}{2}}}\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix)-P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ix)}{2i}=-Cosh(\pi\tau)\frac{\Gamma\left(\nu-\frac{1}{2}+i\tau\right)\Gamma\left(\nu-\frac{1}{2}-i\tau\right)}{2^{\nu-1}(\Gamma(\nu))^2}$$

$$\nu=1\quad Sin(\nu\ ArcTan(x))=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\Rightarrow f(x)=\frac{x}{1+x^2}=-\int_0^{+\infty}d\tau\,\tau\ Tanh(\pi\tau)\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\tau\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-i\tau\right)\times\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix)-P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ix)}{2i}$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\tau\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-i\tau\right)=\frac{\pi}{Cosh(\pi\tau)}\Rightarrow f(x)=\frac{x}{1+x^2}=-\pi\int_0^{+\infty}d\tau\,\tau\frac{Tanh(\pi\tau)}{Cosh(\pi\tau)}\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix)-P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ix)}{2i}$$

$$f(x)=\frac{Cos(\nu\ ArcTan(x))}{(1+x^2)^{\frac{\nu}{2}}}=-\frac{1}{2^{\nu-1}(\Gamma(\nu))^2}\int_0^{+\infty}d\tau\left\{\tau\ Tanh(\pi\tau)\Gamma\left(\nu-\frac{1}{2}+i\tau\right)\Gamma\left(\nu-\frac{1}{2}-i\tau\right)\times\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix)+P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ix)}{2}\right\}$$

$$\Leftrightarrow\int_0^{+\infty}dx\frac{Cos(\nu\ ArcTan(x))}{(1+x^2)^{\frac{\nu}{2}}}\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix)+P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ix)}{2}=Cosh(\pi\tau)\frac{\Gamma\left(\nu-\frac{1}{2}+i\tau\right)\Gamma\left(\nu-\frac{1}{2}-i\tau\right)}{2^{\nu-1}(\Gamma(\nu))^2}$$

$$\nu=1\quad Cos(ArcTan(x))=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\Rightarrow f(x)=\frac{1}{1+x^2}=\int_0^{+\infty}d\tau\,\tau\ Tanh(\pi\tau)\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\tau\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-i\tau\right)\times\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix)+P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ix)}{2}$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\tau\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-i\tau\right)=\frac{\pi}{Cosh(\pi\tau)}\Rightarrow f(x)=\frac{1}{1+x^2}=\pi\int_0^{+\infty}d\tau\,\tau\frac{Tanh(\pi\tau)}{Cosh(\pi\tau)}\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix)+P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ix)}{2}$$

$$f(x)=\frac{ax}{(1+x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}d\tau\frac{\tau\ Tanh(\pi\tau)}{Cosh(\pi\tau)}\Gamma\left(\frac{3}{4}+\frac{i\tau}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}-\frac{i\tau}{2}\right)\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ia)-P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ia)}{2i}\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix)-P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ix)}{2i}$$

$$\int_0^{+\infty}dx\frac{ax}{(1+x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix)-P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ix)}{2i}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{3}{4}+\frac{i\tau}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}-\frac{i\tau}{2}\right)\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ia)-P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ia)}{2i}$$

$$f(x)=\frac{1}{(1+x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}Log\left(\frac{\sqrt{1+x^2+a^2}-x}{\sqrt{1+x^2+a^2}+x}\right)=\frac{4\sqrt{2}}{\pi}\int_0^{+\infty}d\tau\left\{\begin{array}{l}\frac{\tau\ Tanh(\pi\tau)}{Cosh(\pi\tau)}\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{i\tau}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}-\frac{i\tau}{2}\right)\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ia)+P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ia)}{2}\times\\ \times\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix)-P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ix)}{2i}\end{array}\right.$$

$$\int_0^{+\infty}dx\frac{1}{(1+x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}Log\left(\frac{\sqrt{1+x^2+a^2}-x}{\sqrt{1+x^2+a^2}+x}\right)\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix)-P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ix)}{2i}=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{i\tau}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}-\frac{i\tau}{2}\right)\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ia)+P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ia)}{2}$$

.

Exemple : développement intégral d'une fonction limite paire linéaire à support bornée :

$$f(x)=\begin{cases}1-\dfrac{|x|}{a} & |x|<a\\ 0 & |x|>a\end{cases}$$

$$f(x)=2\int_0^{+\infty}d\tau\,\frac{\tau\,Tanh(\pi\tau)}{Cosh(\pi\tau)}\left(\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix)+P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ix)}{2}\int_0^a dy\left(1-\frac{y}{a}\right)\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(iy)+P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-iy)}{2}\right)$$

Pour le calcul des intégrales, on utilise la formule de l'intégrale indéfinie suivante :

$$\int dx\,xP_\nu(x)=\frac{-\{(2\nu-1)P_{\nu-2}(x)-2(2\nu+1)P_\nu(x)(2\nu+3)P_{\nu-2}(x)\}+x(2\nu+3)(2\nu-1)(P_{\nu+1}(x)-P_{\nu-1}(x))}{(2\nu+3)(2\nu+1)(2\nu-1)}$$

$$Or\ \begin{cases}\sqrt{1-x^2}P_\nu^1(x)=\nu(\nu+1)\dfrac{P_{\nu+1}^0(x)-P_{\nu-1}^0(x)}{2\nu+1}\Rightarrow P_{\nu+1}^0(x)-P_{\nu-1}^0(x)=\sqrt{1-x^2}P_\nu^1(x)\dfrac{2\nu+1}{\nu(\nu+1)}\\ (1-x^2)P_\nu^2(x)=(\nu-1)\nu(\nu+1)(\nu+2)\dfrac{(2\nu-1)P_{\nu+2}^0(x)-2(2\nu+1)P_\nu^0(x)+(2\nu+3)P_{\nu-2}^0(x)}{(2\nu-1)(2\nu+1)(2\nu+3)}\end{cases}$$

$$\Rightarrow(2\nu-1)P_{\nu+2}^0(x)-2(2\nu+1)P_\nu^0(x)+(2\nu+3)P_{\nu-2}^0(x)=(1-x^2)P_\nu^2(x)\frac{(2\nu-1)(2\nu+1)(2\nu+3)}{(\nu-1)\nu(\nu+1)(\nu+2)}$$

$$\Rightarrow\int dx\,xP_\nu(x)=\frac{-(1-x^2)P_\nu^2(x)+(\nu-1)(\nu+2)x\sqrt{1-x^2}P_\nu^1(x)}{(\nu-1)\nu(\nu+1)(\nu+2)}$$

$$\Rightarrow\int dx\,xP_\nu(ax)=\frac{1}{a^2}\frac{-(1-a^2x^2)P_\nu^2(ax)+(\nu-1)(\nu+2)ax\sqrt{1-a^2x^2}P_\nu^1(ax)}{(\nu-1)\nu(\nu+1)(\nu+2)}$$

Il vient pour l'intégrale définie avec les fonctions coniques de Mehler, un résultat remarquablement simple :

$$\int_0^a dx\,x\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix)+P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ix)}{2}=4\sqrt{1+a^2}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{4\sqrt{1+a^2}}{(1+4\tau^2)(4+9\tau^2)}\dfrac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^2(ia)+P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^2(-ia)}{2}-\\ -\dfrac{a}{(1+4\tau^2)}\dfrac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^1(ia)-P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^1(-ia)}{2i}\end{array}\right\}-\frac{16}{(1+4\tau^2)(4+9\tau^2)}\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^2(0)}{2}$$

$$Comme\int_0^a dx\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix)+P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ix)}{2}=-\frac{4\sqrt{1+a^2}}{(1+4\tau^2)}\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^1(ia)-P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^1(-ia)}{2i}$$

$$\int_0^a dx\left(1-\frac{x}{a}\right)\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix)+P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ix)}{2}=\frac{16}{a(1+4\tau^2)(4+9\tau^2)}P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^2(0)-\frac{16(1+a^2)}{a(1+4\tau^2)(4+9\tau^2)}\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^2(ia)+P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^2(-ia)}{2}$$

D'autre part il convient de remarquer que :

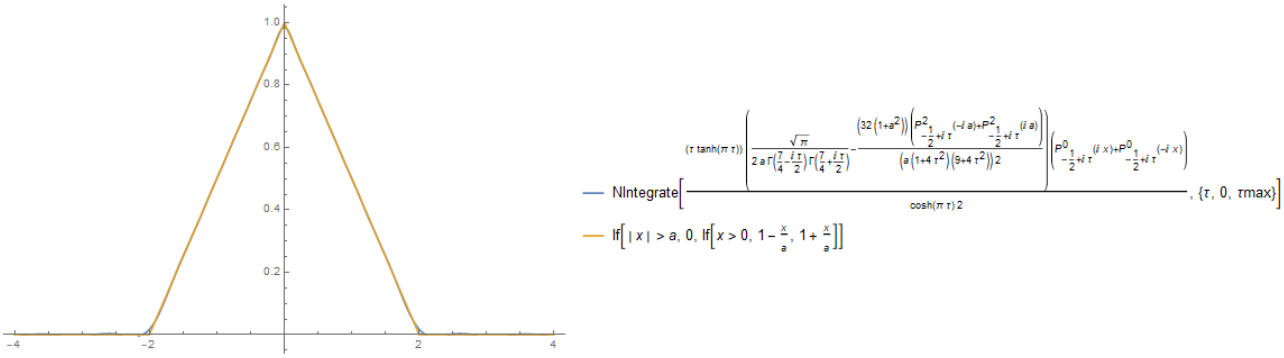
$$P^2_{-\frac{1}{2}+i\tau}(0)=\frac{\sqrt{\pi}\left(1+4\tau^2\right)\left(4+9\tau^2\right)}{64\Gamma\left(\frac{7}{4}-\frac{i\tau}{2}\right)\Gamma\left(\frac{7}{4}+\frac{i\tau}{2}\right)}\Rightarrow\frac{32}{\left(1+4\tau^2\right)\left(4+9\tau^2\right)}P^2_{-\frac{1}{2}+i\tau}(0)=\frac{\sqrt{\pi}}{2\Gamma\left(\frac{7}{4}-\frac{i\tau}{2}\right)\Gamma\left(\frac{7}{4}+\frac{i\tau}{2}\right)}$$

Soit pour la représentation intégrale de la fonction :

$$f(x)=\begin{Bmatrix}1-\frac{|x|}{a} & |x|<a\\ 0 & |x|>a\end{Bmatrix}=\int_0^{+\infty}d\tau\,\frac{\tau\,Tanh(\pi\tau)}{Cosh(\pi\tau)}\left[\left\{\frac{\sqrt{\pi}}{2a\Gamma\left(\frac{7}{4}-\frac{i\tau}{2}\right)\Gamma\left(\frac{7}{4}+\frac{i\tau}{2}\right)}-\frac{32\left(1+a^2\right)}{a\left(1+4\tau^2\right)\left(4+9\tau^2\right)}\frac{P^2_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ia)+P^2_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ia)}{2}\right\}\times\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix)+P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ix)}{2}\right]$$

.

Illustrons par le graphe comparatif de la fonction et de sa représentation intégrale lorsque la limite d'intégration est fixée à τ=20, ce qui correspond déjà à une très bonne convergence vers la fonction étudié.



Exemple : développement intégral d'une fonction limite quadratique à support bornée :

$$f(x)=\begin{cases}1-\dfrac{x^2}{a^2} & |x|<a\\ 0 & |x|>a\end{cases}\qquad ou\qquad f(x)=\begin{cases}\left(1-\dfrac{|x|}{a}\right)^2 & |x|<a\\ 0 & |x|>a\end{cases}$$

$$f(x)=2\int_0^{+\infty}d\tau\,\frac{\tau\,Tanh(\pi\tau)}{Cosh(\pi\tau)}\left(\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix)+P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ix)}{2}\int_0^a dy\left(1-\frac{y^2}{a^2}\right)\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(iy)+P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-iy)}{2}\right).$$

ou

$$f(x)=2\int_0^{+\infty}d\tau\,\frac{\tau\,Tanh(\pi\tau)}{Cosh(\pi\tau)}\left(\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix)+P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ix)}{2}\int_0^a dy\left(1-\frac{y}{a}\right)^2\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(iy)+P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-iy)}{2}\right)$$

On utilise les relations de récurrence suivantes (dont une partie ont été déduites à l'aide de Mathematica) :

$$\begin{cases}xP_\nu^\mu(x)=\dfrac{(\nu-\mu+1)P_{\nu+1}^\mu(x)+(\nu+\mu)P_{\nu-1}^\mu(x)}{(2\nu+1)}\\ \sqrt{1-x^2}\,P_\nu^{\mu+1}(x)=(\nu-\mu+1)P_{\nu+1}^\mu(x)-(\nu+1+\mu)xP_\nu^\mu(x)\end{cases}$$

$$\Rightarrow\sqrt{1-x^2}\,P_\nu^{\mu+1}(x)=\frac{(\nu-\mu)(\nu-\mu+1)P_{\nu+1}^\mu(x)-(\nu+\mu)(\nu+1+\mu)P_{\nu-1}^\mu(x)}{2\nu+1}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{1-x^2}\,P_\nu^1(x)=\nu(\nu+1)\dfrac{P_{\nu+1}^0(x)-P_{\nu-1}^0(x)}{2\nu+1}\\ \sqrt{1-x^2}\,P_\nu^2(x)=\dfrac{\nu(\nu-1)P_{\nu+1}^1(x)-(\nu+1)(\nu+2)P_{\nu-1}^1(x)}{2\nu+1}\\ \sqrt{1-x^2}\,P_\nu^3(x)=\dfrac{(\nu-1)(\nu-2)P_{\nu+1}^2(x)-(\nu+2)(\nu+3)P_{\nu-1}^2(x)}{2\nu+1}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{1-x^2}\,P_\nu^1(x)=\nu(\nu+1)\dfrac{P_{\nu+1}^0(x)-P_{\nu-1}^0(x)}{2\nu+1}\\ (1-x^2)P_\nu^2(x)=(\nu-1)\nu(\nu+1)(\nu+2)\dfrac{(2\nu+3)P_{\nu-2}^0(x)-2(2\nu+1)P_\nu^0(x)+(2\nu-1)P_{\nu+2}^0(x)}{(2\nu-1)(2\nu+1)(2\nu+3)}\\ (1-x^2)^{\frac{3}{2}}P_\nu^3(x)=\dfrac{(\nu-2)(\nu-1)\nu(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)}{(2\nu-3)(2\nu-1)(2\nu+1)(2\nu+3)(2\nu+5)}\left\{\begin{matrix}(2\nu+3)(2\nu+5)P_{\nu-3}^0(x)-3(2\nu+5)(2\nu-1)P_{\nu-1}^0(x)+\\ +3(2\nu+3)(2\nu-3)P_{\nu+1}^0(x)-(2\nu-1)(2\nu-3)P_{\nu+3}^0(x)\end{matrix}\right\}\end{cases}$$

L'application des récurrences précédentes sur l'expression de l'intégrale indéfinie obtenue à l'aide de Mathematica, donne la formule finale :

$$\Rightarrow\int dx\,x^2P_\nu(x)=\frac{2(1-x^2)^{\frac{3}{2}}P_\nu^3(x)-2x(1-x^2)(\nu-2)(\nu+3)P_\nu^2(x)+(\nu-2)(\nu-1)(\nu+2)(\nu+3)x^2\sqrt{1-x^2}\,P_\nu^1(x)}{(\nu-2)(\nu-1)\nu(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)}$$

.

Il vient également pour l'intégrale définie avec les fonctions coniques de Mehler, un résultat « assez simple » :

$$\int_0^a dx\, x^2 \frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix)+P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ix)}{2}=\left\{\begin{array}{l}\dfrac{128\left(1+a^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(1+4\tau^2\right)\left(4+9\tau^2\right)\left(25+4\tau^2\right)}\dfrac{P^3_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ia)-P^3_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ia)}{2i}+\\ +\dfrac{32a\left(1+a^2\right)}{\left(1+4\tau^2\right)\left(4+9\tau^2\right)}\dfrac{P^2_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ia)+P^2_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ia)}{2}\\ -\dfrac{4a^2\sqrt{1+a^2}}{\left(1+4\tau^2\right)}\dfrac{P^1_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ia)-P^1_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ia)}{2i}\end{array}\right\}$$

$$\int_0^a dx\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix)+P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ix)}{2}=-\frac{32\left(1+a^2\right)}{a^2\left(1+4\tau^2\right)\left(4+9\tau^2\right)}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{4\sqrt{1+a^2}}{25+4\tau^2}\dfrac{P^3_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ia)-P^3_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ia)}{2i}+\\ +a\dfrac{P^2_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ia)+P^2_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ia)}{2}\end{array}\right\}.$$

$$\int_0^a dx\left(1-\frac{x}{a}\right)^2\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix)+P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ix)}{2}=\int_0^a dx\left(1+\frac{x^2}{a^2}-2\frac{x}{a}\right)\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix)+P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ix)}{2}=$$

$$=\frac{32}{a\left(1+4\tau^2\right)\left(4+9\tau^2\right)}P^2_{-\frac{1}{2}+i\tau}(0)+\frac{128\left(1+a^2\right)^{\frac{3}{2}}}{a^2\left(1+4\tau^2\right)\left(4+9\tau^2\right)\left(25+4\tau^2\right)}\frac{P^3_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ia)-P^3_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ia)}{2i}$$

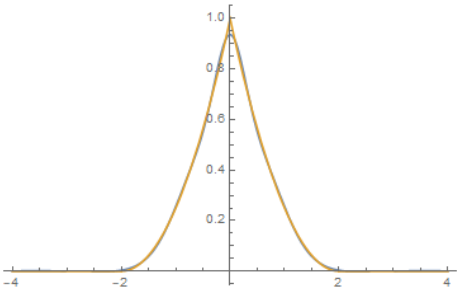
$$=\frac{\sqrt{\pi}}{2a\Gamma\left(\frac{7}{4}-\frac{i\tau}{2}\right)\Gamma\left(\frac{7}{4}+\frac{i\tau}{2}\right)}+\frac{128\left(1+a^2\right)^{\frac{3}{2}}}{a^2\left(1+4\tau^2\right)\left(4+9\tau^2\right)\left(25+4\tau^2\right)}\frac{P^3_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ia)-P^3_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ia)}{2i}$$

Soit pour la représentation intégrale des deux fonctions quadratiques suivantes :

$$f(x)=\left\{\begin{array}{ll}1-\dfrac{x^2}{a^2} & |x|<a\\ 0 & |x|>a\end{array}\right\}=-\frac{64\left(1+a^2\right)}{a^2}\int_0^{+\infty}d\tau\left[\begin{array}{l}\dfrac{\tau\, Tanh(\pi\tau)}{\left(1+4\tau^2\right)\left(4+9\tau^2\right)Cosh(\pi\tau)}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{4\sqrt{1+a^2}}{25+4\tau^2}\dfrac{P^3_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ia)-P^3_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ia)}{2i}+\\ +a\dfrac{P^2_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ia)+P^2_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ia)}{2}\end{array}\right\}\times\\ \times\dfrac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix)+P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ix)}{2}\end{array}\right]$$

$$f(x)=\left\{\begin{array}{ll}\left(1-\dfrac{|x|}{a}\right)^2 & |x|<a\\ 0 & |x|>a\end{array}\right\}=\int_0^{+\infty}d\tau\left[\begin{array}{l}\dfrac{\tau\, Tanh(\pi\tau)}{Cosh(\pi\tau)}\times\dfrac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix)+P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ix)}{2}\times\\ \times\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\sqrt{\pi}}{a\Gamma\left(\frac{7}{4}-\frac{i\tau}{2}\right)\Gamma\left(\frac{7}{4}+\frac{i\tau}{2}\right)}+\dfrac{256\left(1+a^2\right)^{\frac{3}{2}}}{a^2\left(1+4\tau^2\right)\left(4+9\tau^2\right)\left(25+4\tau^2\right)}\times\\ \times\dfrac{P^3_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ia)-P^3_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ia)}{2i}\end{array}\right\}\end{array}\right]$$

Le graphe de la représentation intégrale de la fonction $f(x)=\begin{cases}\left(1-\dfrac{|x|}{a}\right)^2 & |x|<a\\ 0 & |x|>a\end{cases}$ se présente comme suit :

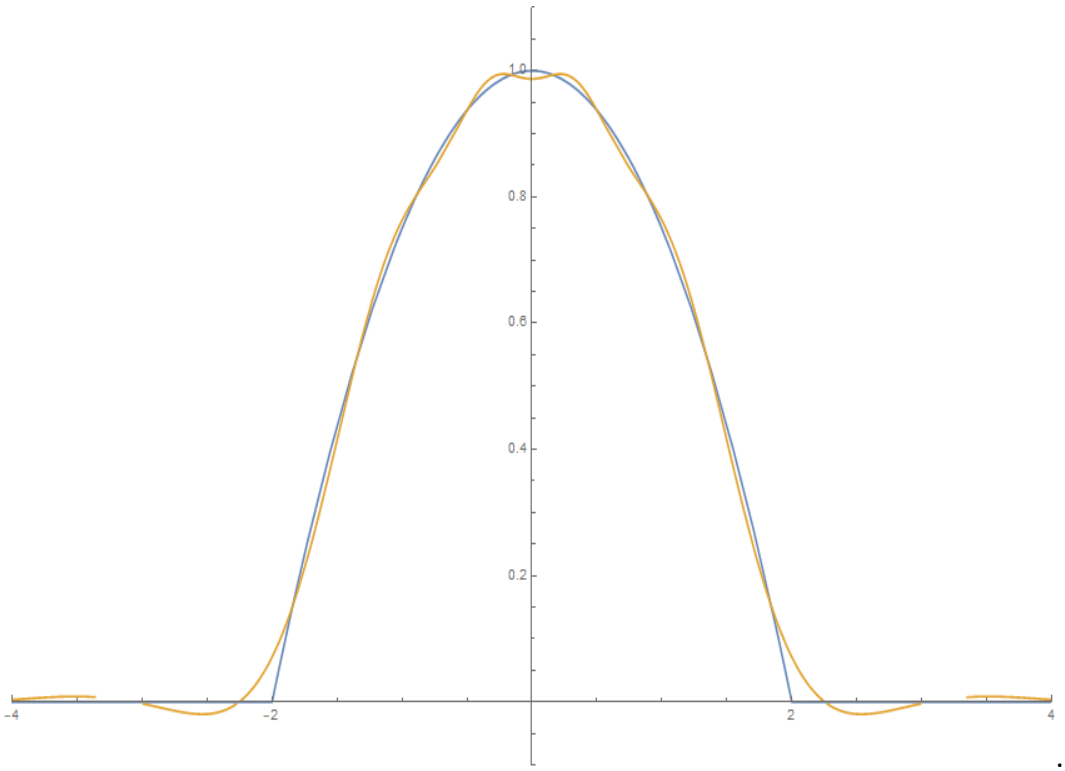


$$\text{NIntegrate}\left[\frac{(\tau\tanh(\pi\tau))\left(\frac{\sqrt{\pi}}{a\,\Gamma\left(\frac{7}{4}-\frac{i\tau}{2}\right)\Gamma\left(\frac{7}{4}+\frac{i\tau}{2}\right)}+\frac{\left(256\left(1+a^2\right)^{3/2}\right)\left(P^3_{-\frac{1}{2}+i\tau}(i\,a)-P^3_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-i\,a)\right)}{\left(a^2\left(1+4\tau^2\right)\left(9+4\tau^2\right)\left(25+4\tau^2\right)\right)(2i)}\right)\left(P^0_{-\frac{1}{2}+i\tau}(i\,x)+P^0_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-i\,x)\right)}{\cosh(\pi\tau)\,2},\{\tau,0,\tau\text{max}\}\right]$$

$$\text{If}\left[|x|>a,0,\text{If}\left[x>0,\left(1-\frac{x}{a}\right)^2,\left(1+\frac{x}{a}\right)^2\right]\right]$$

.

Le graphe de la représentation intégrale de la fonction $f(x)=\begin{cases}1-\dfrac{x^2}{a^2} & |x|<a\\ 0 & |x|>a\end{cases}$ se présente comme suit :



.

Exemple : développement intégral d'une fonction limite cubique à support bornée :

Par la combinaison des relations de récurrence, de la formule de récurrence sur les intégrales indéfinies sur les fonctions de Legendre :

$$\sqrt{1-x^2}\,P_\nu^{\mu+1}(x)=\frac{(\nu-\mu)(\nu-\mu+1)P_{\nu+1}^{\mu}(x)-(\nu+\mu)(\nu+1+\mu)P_{\nu-1}^{\mu}(x)}{2\nu+1}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\int dx\,P_\nu^0(\alpha\,x)=\dfrac{1}{\alpha}\dfrac{P_{\nu+1}(\alpha\,x)-P_{\nu-1}(\alpha\,x)}{2\nu+1}\\ \int dx\,x^p P_\nu^0(\alpha\,x)=\dfrac{1}{\alpha}\left\{x^p\dfrac{P_{\nu+1}(\alpha\,x)-P_{\nu-1}(\alpha\,x)}{2\nu+1}-p\int x^{p-1}\dfrac{P_{\nu+1}(\alpha\,x)-P_{\nu-1}(\alpha\,x)}{2\nu+1}dx\right\}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\nu\to-\frac{1}{2}+i\tau\quad\alpha\to i\quad\int_0^a dx\,x^p\left\{\frac{P_\nu^0(i\,x)+P_\nu^0(-i\,x)}{2}\right\}$$

$$P^0_{-\frac{1}{2}+i\tau}(0)=\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{3}{4}-\frac{i\tau}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}+\frac{i\tau}{2}\right)}\qquad P^1_{-\frac{1}{2}+i\tau}(0)=\frac{\sqrt{\pi}\left(1+4\tau^2\right)}{8\Gamma\left(\frac{5}{4}-\frac{i\tau}{2}\right)\Gamma\left(\frac{5}{4}+\frac{i\tau}{2}\right)}$$

$$P^2_{-\frac{1}{2}+i\tau}(0)=\frac{\sqrt{\pi}\left(1+4\tau^2\right)\left(4+9\tau^2\right)}{64\Gamma\left(\frac{7}{4}-\frac{i\tau}{2}\right)\Gamma\left(\frac{7}{4}+\frac{i\tau}{2}\right)}\qquad P^3_{-\frac{1}{2}+i\tau}(0)=\frac{\sqrt{\pi}\left(1+4\tau^2\right)\left(4+9\tau^2\right)\left(25+4\tau^2\right)}{512\Gamma\left(\frac{9}{4}-\frac{i\tau}{2}\right)\Gamma\left(\frac{9}{4}+\frac{i\tau}{2}\right)}$$

$$P^4_{-\frac{1}{2}+i\tau}(0)=\frac{\sqrt{\pi}\left(1+4\tau^2\right)\left(4+9\tau^2\right)\left(25+4\tau^2\right)}{4096\Gamma\left(\frac{11}{4}-\frac{i\tau}{2}\right)\Gamma\left(\frac{11}{4}+\frac{i\tau}{2}\right)}\qquad P^5_{-\frac{1}{2}+i\tau}(0)=\frac{\sqrt{\pi}\left(1+4\tau^2\right)\left(4+9\tau^2\right)\left(25+4\tau^2\right)\left(81+4\tau^2\right)}{32768\Gamma\left(\frac{13}{4}-\frac{i\tau}{2}\right)\Gamma\left(\frac{13}{4}+\frac{i\tau}{2}\right)}.$$

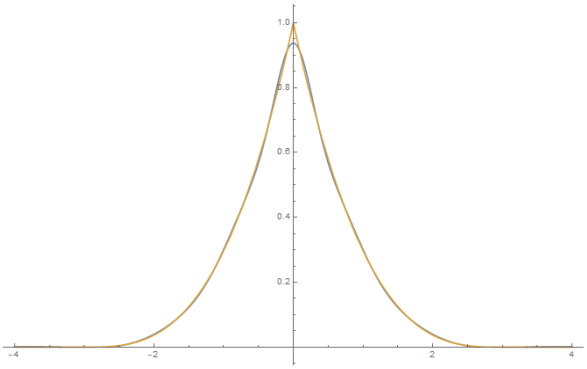
On arrive à calculer à l'aide de Mathematica, les intégrales définies des fonctions puissances entières à support bornée, par exemple :

$$\int_0^a dx\left(1-\frac{x}{a}\right)^3\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix)+P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ix)}{2}=3\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\sqrt{\pi}}{4a\Gamma\left(\frac{7}{4}-\frac{i\tau}{2}\right)\Gamma\left(\frac{7}{4}+\frac{i\tau}{2}\right)}-\dfrac{\sqrt{\pi}}{8a^3\Gamma\left(\frac{11}{4}-\frac{i\tau}{2}\right)\Gamma\left(\frac{11}{4}+\frac{i\tau}{2}\right)}+\\ +\dfrac{512\left(1+a^2\right)^2}{a^3\left(1+4\tau^2\right)\left(4+9\tau^2\right)\left(25+4\tau^2\right)\left(49+4\tau^2\right)}\dfrac{P^4_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ia)+P^4_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ia)}{2}\end{array}\right\}$$

Soit pour la représentation intégrale de la fonction cubique suivante :

$$f(x)=\begin{cases}\left(1-\dfrac{|x|}{a}\right)^3 & |x|<a\\ 0 & |x|>a\end{cases}=3\int_0^{+\infty}d\tau\left[\begin{array}{l}\dfrac{\tau\,Tanh(\pi\tau)}{Cosh(\pi\tau)}\times\dfrac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix)+P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ix)}{2}\times\\ \times\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\sqrt{\pi}}{2a\Gamma\left(\frac{7}{4}-\frac{i\tau}{2}\right)\Gamma\left(\frac{7}{4}+\frac{i\tau}{2}\right)}-\dfrac{\sqrt{\pi}}{4a^3\Gamma\left(\frac{11}{4}-\frac{i\tau}{2}\right)\Gamma\left(\frac{11}{4}+\frac{i\tau}{2}\right)}+\\ +\dfrac{1024\left(1+a^2\right)^2}{a^3\left(1+4\tau^2\right)\left(4+9\tau^2\right)\left(25+4\tau^2\right)\left(49+4\tau^2\right)}\dfrac{P^4_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ia)+P^4_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ia)}{2}\end{array}\right\}\end{array}\right]$$

Le graphe de la représentation intégrale de la fonction $f(x)=\begin{cases}\left(1-\dfrac{|x|}{a}\right)^3 & |x|<a\\ 0 & |x|>a\end{cases}$ se présente comme suit :



$$3\,\text{NIntegrate}\left[\frac{(\tau\tanh(\pi\tau))\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2a\Gamma\left(\frac{7}{4}-\frac{i\tau}{2}\right)\Gamma\left(\frac{7}{4}+\frac{i\tau}{2}\right)}-\frac{\sqrt{\pi}}{4a^3\Gamma\left(\frac{11}{4}-\frac{i\tau}{2}\right)\Gamma\left(\frac{11}{4}+\frac{i\tau}{2}\right)}+\frac{512\left(1+a^2\right)^2\left(P^4_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-i\,a)+P^4_{-\frac{1}{2}+i\tau}(i\,a)\right)}{a^3\left(1+4\tau^2\right)\left(9+4\tau^2\right)\left(25+4\tau^2\right)\left(49+4\tau^2\right)}\right)\left(P^0_{-\frac{1}{2}+i\tau}(i\,x)+P^0_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-i\,x)\right)}{\cosh(\pi\tau)\,2},\{\tau,0,\text{rmax}\}\right]$$

$$\text{If}\left[|x|>a,0,\text{If}\left[x>0,\left(1-\frac{x}{a}\right)^p,\left(1+\frac{x}{a}\right)^p\right]\right]$$

.

<u>Exemple : développement intégral d'une fonction limite quartique à support bornée :</u>

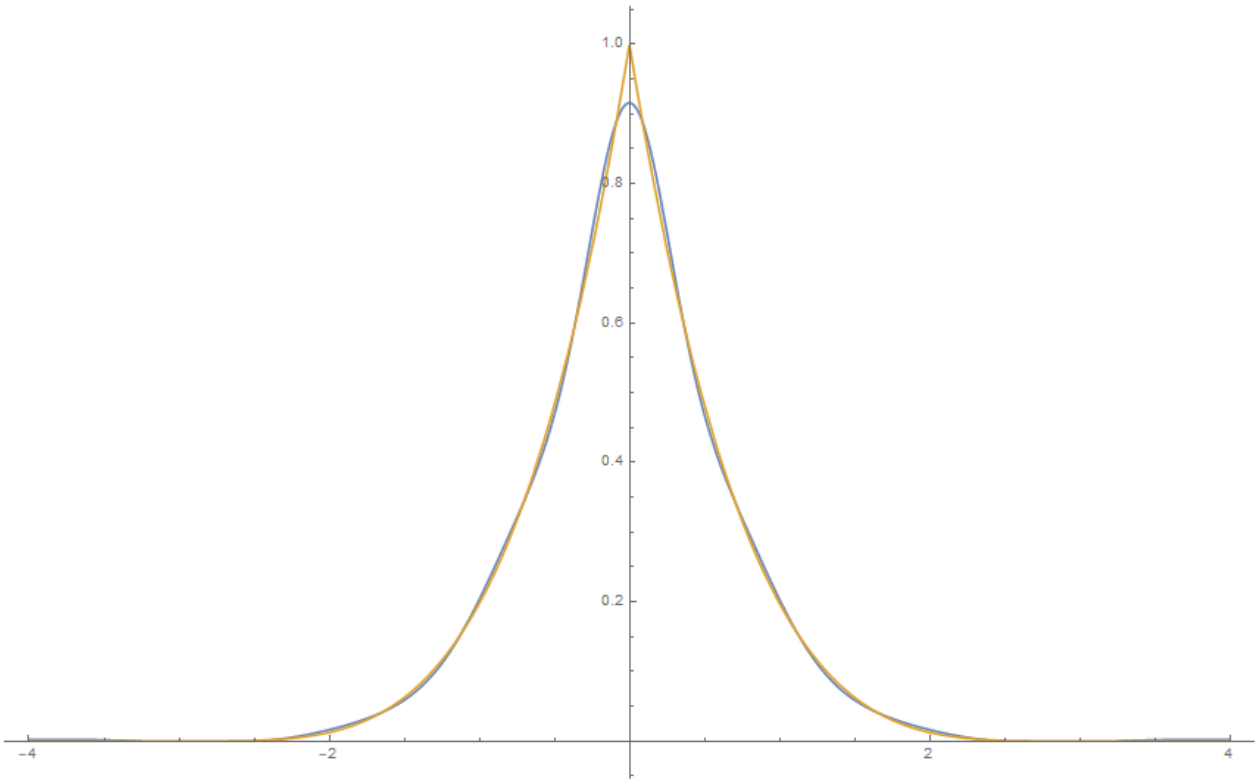
On arrive à calculer à l'aide de Mathematica, les intégrales définies des fonctions puissances entières à support bornée, comme pour une fonction quartique :

$$\int_0^a dx\left(1-\frac{x}{a}\right)^4 \frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix)+P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ix)}{2}=\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\sqrt{\pi}}{a\Gamma\left(\frac{7}{4}-\frac{i\tau}{2}\right)\Gamma\left(\frac{7}{4}+\frac{i\tau}{2}\right)}-\dfrac{3\sqrt{\pi}}{2a^3\Gamma\left(\frac{11}{4}-\frac{i\tau}{2}\right)\Gamma\left(\frac{11}{4}+\frac{i\tau}{2}\right)}+\\ +\dfrac{24576\left(1+a^2\right)^{\frac{5}{2}}}{a^4\left(1+4\tau^2\right)\left(4+9\tau^2\right)\left(25+4\tau^2\right)\left(49+4\tau^2\right)\left(81+4\tau^2\right)}\dfrac{P^5_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ia)-P^5_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ia)}{2i}\end{array}\right\}$$

Soit pour la représentation intégrale de la fonction quartique suivante :

$$f(x)=\left\{\begin{array}{ll}\left(1-\dfrac{|x|}{a}\right)^4 & |x|<a\\ 0 & |x|>a\end{array}\right\}=\int_0^{+\infty}d\tau\left[\begin{array}{l}\dfrac{\tau\,Tanh(\pi\tau)}{Cosh(\pi\tau)}\times\dfrac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix)+P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ix)}{2}\times\\ \times\left\{\begin{array}{l}\dfrac{2\sqrt{\pi}}{a\Gamma\left(\frac{7}{4}-\frac{i\tau}{2}\right)\Gamma\left(\frac{7}{4}+\frac{i\tau}{2}\right)}-\dfrac{3\sqrt{\pi}}{a^3\Gamma\left(\frac{11}{4}-\frac{i\tau}{2}\right)\Gamma\left(\frac{11}{4}+\frac{i\tau}{2}\right)}+\\ +\dfrac{3\times 2^{14}\left(1+a^2\right)^{\frac{5}{2}}}{a^4\left(1+4\tau^2\right)\left(4+9\tau^2\right)\left(25+4\tau^2\right)\left(49+4\tau^2\right)\left(81+4\tau^2\right)}\dfrac{P^5_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ia)-P^5_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ia)}{2i}\end{array}\right\}\end{array}\right]$$

Le graphe de la représentation intégrale de la fonction $f(x)=\begin{cases}\left(1-\dfrac{|x|}{a}\right)^4 & |x|<a\\ 0 & |x|>a\end{cases}$ se présente comme suit :



$$\text{NIntegrate}\left[\frac{(\tau\tanh(\pi\tau))\left(\frac{2\sqrt{\pi}}{a\,\Gamma\left(\frac{7}{4}-\frac{i\tau}{2}\right)\Gamma\left(\frac{7}{4}+\frac{i\tau}{2}\right)}-\frac{3\sqrt{\pi}}{a^3\,\Gamma\left(\frac{11}{4}-\frac{i\tau}{2}\right)\Gamma\left(\frac{11}{4}+\frac{i\tau}{2}\right)}-\frac{24576\,i\left(1+a^2\right)^{5/2}\left(P^5_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-i\,a)-P^5_{-\frac{1}{2}+i\tau}(i\,a)\right)}{a^4\left(1+4\tau^2\right)\left(9+4\tau^2\right)\left(25+4\tau^2\right)\left(49+4\tau^2\right)\left(81+4\tau^2\right)}\right)\left(P^0_{-\frac{1}{2}+i\tau}(i\,x)+P^0_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-i\,x)\right)}{\cosh(\pi\tau)\,2},\{\tau,0,\tau\max\}\right]$$

$$\text{If}\left[|x|>a,0,\text{If}\left[x>0,\left(1-\frac{x}{a}\right)^4,\left(1+\frac{x}{a}\right)^4\right]\right]$$

Représentations intégrales de fonctions impaires, de puissances successives

Toujours à partir de Mathematica, j'ai établi les représentations intégrales de ces fonctions :

La fonction linéaire impaire :

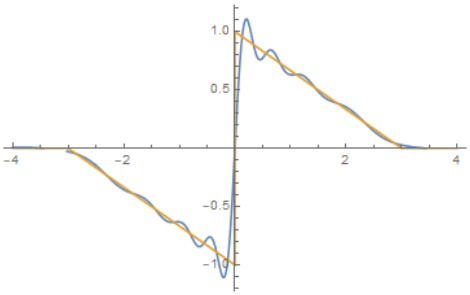
$$f(x)=\begin{cases}1-\dfrac{x}{a} & x\in[0,a] \quad -\left(1+\dfrac{x}{a}\right) \quad x\in[-a,0]\\ 0 & |x|>a\end{cases}$$

sa représentation intégrale

$$\int_0^a dx\, f(x)\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix)-P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ix)}{2i}=\left\{-\frac{\sqrt{\pi}}{2\Gamma\left(\frac{5}{4}-\frac{i\tau}{2}\right)\Gamma\left(\frac{5}{4}+\frac{i\tau}{2}\right)}-\frac{16\left(1+a^2\right)}{a\left(1+4\tau^2\right)\left(4+9\tau^2\right)}\frac{P^2_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ia)-P^2_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ia)}{2i}\right\}$$

$$f(x)=\int_0^{+\infty}d\tau\left[\begin{array}{l}\dfrac{\tau\, Tanh(\pi\tau)}{Cosh(\pi\tau)}\times\dfrac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix)-P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ix)}{2i}\times\\ \times\left\{-\dfrac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{5}{4}-\frac{i\tau}{2}\right)\Gamma\left(\frac{5}{4}+\frac{i\tau}{2}\right)}-\dfrac{32\left(1+a^2\right)}{a\left(1+4\tau^2\right)\left(4+9\tau^2\right)}\dfrac{P^2_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ia)-P^2_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ia)}{2i}\right\}\end{array}\right]$$

Les graphes comparés



$$\text{NIntegrate}\left[\frac{(\tau\tanh(\pi\tau))\left(-\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{5}{4}-\frac{i\tau}{2}\right)\Gamma\left(\frac{5}{4}+\frac{i\tau}{2}\right)}-\frac{\left(32\left(1+a^2\right)\right)\left(P^2_{-\frac{1}{2}+i\tau}(i\,a)-P^2_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-i\,a)\right)}{\left(a\left(1+4\tau^2\right)\left(9+4\tau^2\right)\right)(2i)}\right)\left(P^0_{-\frac{1}{2}+i\tau}(i\,x)-P^0_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-i\,x)\right)}{\cosh(\pi\tau)\,(2i)},\{\tau,0,\tau\max\}\right]$$

$$\text{If}\left[|x|>a,0,\text{If}\left[x>0,\left(1-\frac{x}{a}\right)^p,-\left(1+\frac{x}{a}\right)^p\right]\right]$$

La fonction quadratique impaire :

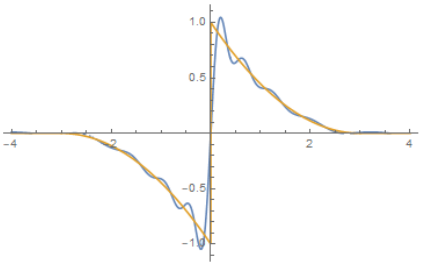
$$f(x)=\begin{cases}\left(1-\dfrac{x}{a}\right)^2 & x\in[0,a] \quad -\left(1+\dfrac{x}{a}\right)^2 \quad x\in[-a,0]\\ 0 & |x|>a\end{cases}$$

sa représentation intégrale

$$\int_0^a dx\, f(x)\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix)-P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ix)}{2i}=\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\sqrt{\pi}}{4a^2\Gamma\left(\frac{9}{4}-\frac{i\tau}{2}\right)\Gamma\left(\frac{9}{4}+\frac{i\tau}{2}\right)}-\dfrac{\sqrt{\pi}}{2\Gamma\left(\frac{5}{4}-\frac{i\tau}{2}\right)\Gamma\left(\frac{5}{4}+\frac{i\tau}{2}\right)}+\\ -\dfrac{128\left(1+a^2\right)^{\frac{3}{2}}}{a^2\left(1+4\tau^2\right)\left(4+9\tau^2\right)\left(25+4\tau^2\right)}\dfrac{P^3_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ia)+P^3_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ia)}{2}\end{array}\right\}$$

$$f(x)=\int_0^{+\infty}d\tau\left[\begin{array}{l}\dfrac{\tau\, Tanh(\pi\tau)}{Cosh(\pi\tau)}\times\dfrac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix)-P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ix)}{2i}\times\\ \times\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\sqrt{\pi}}{2a^2\Gamma\left(\frac{9}{4}-\frac{i\tau}{2}\right)\Gamma\left(\frac{9}{4}+\frac{i\tau}{2}\right)}-\dfrac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{5}{4}-\frac{i\tau}{2}\right)\Gamma\left(\frac{5}{4}+\frac{i\tau}{2}\right)}+\\ -\dfrac{256\left(1+a^2\right)^{\frac{3}{2}}}{a^2\left(1+4\tau^2\right)\left(4+9\tau^2\right)\left(25+4\tau^2\right)}\end{array}\right\}\end{array}\right]$$

Les graphes comparés



$$\text{NIntegrate}\left[\frac{(\tau\tanh(\pi\tau))\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2a^2\Gamma\left(\frac{9}{4}-\frac{i\tau}{2}\right)\Gamma\left(\frac{9}{4}+\frac{i\tau}{2}\right)}-\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{5}{4}-\frac{i\tau}{2}\right)\Gamma\left(\frac{5}{4}+\frac{i\tau}{2}\right)}-\frac{\left(256\left(1+a^2\right)^{3/2}\right)\left(P^3_{-\frac{1}{2}+i\tau}(i\,a)+P^3_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-i\,a)\right)}{\left(a^2\left(1+4\tau^2\right)\left(9+4\tau^2\right)\left(25+4\tau^2\right)\right)2}\right)\left(P^0_{-\frac{1}{2}+i\tau}(i\,x)-P^0_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-i\,x)\right)}{\cosh(\pi\tau)(2i)},\{\tau,0,\tau\max\}\right]$$

$$\text{If}\left[|x|>a,0,\text{If}\left[x>0,\left(1-\frac{x}{a}\right)^p,-\left(1+\frac{x}{a}\right)^p\right]\right]$$

La fonction cubique impaire :

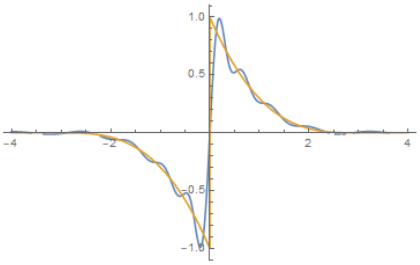
$$f(x)=\left\{\begin{array}{ll}\left(1-\dfrac{x}{a}\right)^3 & x\in[0,a] \quad -\left(1+\dfrac{x}{a}\right)^3 \quad x\in[-a,0]\\ 0 & |x|>a\end{array}\right\}$$

sa représentation intégrale

$$\int_0^a dx\, f(x)\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix)-P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ix)}{2i}=\left\{\begin{array}{l}\dfrac{3\sqrt{\pi}}{4a^2\Gamma\left(\frac{9}{4}-\frac{i\tau}{2}\right)\Gamma\left(\frac{9}{4}+\frac{i\tau}{2}\right)}-\dfrac{\sqrt{\pi}}{2\Gamma\left(\frac{5}{4}-\frac{i\tau}{2}\right)\Gamma\left(\frac{5}{4}+\frac{i\tau}{2}\right)}+\\ +\dfrac{2\times 768\left(1+a^2\right)^2}{a^3\left(1+4\tau^2\right)\left(4+9\tau^2\right)\left(25+4\tau^2\right)\left(49+4\tau^2\right)}\dfrac{P^4_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ia)-P^4_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ia)}{2i}\end{array}\right\}$$

$$f(x)=\int_0^{+\infty}d\tau\left[\begin{array}{l}\dfrac{\tau\, Tanh(\pi\tau)}{Cosh(\pi\tau)}\times\dfrac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix)-P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ix)}{2i}\times\\ \times\left\{\begin{array}{l}\dfrac{3\sqrt{\pi}}{2a^2\Gamma\left(\frac{9}{4}-\frac{i\tau}{2}\right)\Gamma\left(\frac{9}{4}+\frac{i\tau}{2}\right)}-\dfrac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{5}{4}-\frac{i\tau}{2}\right)\Gamma\left(\frac{5}{4}+\frac{i\tau}{2}\right)}+\\ +\dfrac{4\times 768\left(1+a^2\right)^2}{a^3\left(1+4\tau^2\right)\left(4+9\tau^2\right)\left(25+4\tau^2\right)\left(49+4\tau^2\right)}\dfrac{P^4_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ia)-P^4_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ia)}{2i}\end{array}\right\}\end{array}\right]$$

Les graphes comparés



$$\text{NIntegrate}\left[\frac{(\tau\tanh(\pi\tau))\left(\frac{3\sqrt{\pi}}{2a^2\Gamma\left(\frac{9}{4}-\frac{i\tau}{2}\right)\Gamma\left(\frac{9}{4}+\frac{i\tau}{2}\right)}-\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{5}{4}-\frac{i\tau}{2}\right)\Gamma\left(\frac{5}{4}+\frac{i\tau}{2}\right)}+\frac{\left(4\times 768\left(1+a^2\right)^2\right)\left(P^4_{-\frac{1}{2}+i\tau}(i\,a)-P^4_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-i\,a)\right)}{\left(a^3\left(1+4\tau^2\right)\left(9+4\tau^2\right)\left(25+4\tau^2\right)\left(49+4\tau^2\right)\right)(2i)}\right)\left(P^0_{-\frac{1}{2}+i\tau}(i\,x)-P^0_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-i\,x)\right)}{\cosh(\pi\tau)\,(2i)},\{\tau,0,\text{rmax}\}\right]$$

$$\text{If}\left[|x|>a,0,\text{If}\left[x>0,\left(1-\frac{x}{a}\right)^p,-\left(1+\frac{x}{a}\right)^p\right]\right]$$

La fonction quartique impaire :

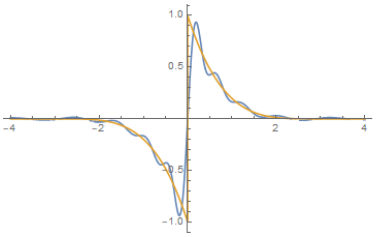
$$f(x)=\begin{cases}\left(1-\dfrac{x}{a}\right)^4 & x\in[0,a] \quad -\left(1+\dfrac{x}{a}\right)^4 \quad x\in[-a,0]\\ 0 & |x|>a\end{cases}$$

sa représentation intégrale

$$\int_0^a dx\, f(x)\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix)-P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ix)}{2i}=\left\{\begin{array}{l}\dfrac{3\sqrt{\pi}}{2a^2\Gamma\left(\frac{9}{4}-\frac{i\tau}{2}\right)\Gamma\left(\frac{9}{4}+\frac{i\tau}{2}\right)}-\dfrac{\sqrt{\pi}}{2\Gamma\left(\frac{5}{4}-\frac{i\tau}{2}\right)\Gamma\left(\frac{5}{4}+\frac{i\tau}{2}\right)}-\dfrac{3\sqrt{\pi}}{4a^4\Gamma\left(\frac{13}{4}-\frac{i\tau}{2}\right)\Gamma\left(\frac{13}{4}+\frac{i\tau}{2}\right)}\\ +\dfrac{24576\left(1+a^2\right)^{\frac{5}{2}}}{a^4\left(1+4\tau^2\right)\left(4+9\tau^2\right)\left(25+4\tau^2\right)\left(49+4\tau^2\right)\left(81+4\tau^2\right)}\dfrac{P^5_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ia)+P^5_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ia)}{2}\end{array}\right\}$$

$$f(x)=\int_0^{+\infty}d\tau\left[\begin{array}{l}\dfrac{\tau\, Tanh(\pi\tau)}{Cosh(\pi\tau)}\times\dfrac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix)-P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ix)}{2i}\times\\ \times\left\{\begin{array}{l}\dfrac{3\sqrt{\pi}}{a^2\Gamma\left(\frac{9}{4}-\frac{i\tau}{2}\right)\Gamma\left(\frac{9}{4}+\frac{i\tau}{2}\right)}-\dfrac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{5}{4}-\frac{i\tau}{2}\right)\Gamma\left(\frac{5}{4}+\frac{i\tau}{2}\right)}-\dfrac{3\sqrt{\pi}}{2a^4\Gamma\left(\frac{13}{4}-\frac{i\tau}{2}\right)\Gamma\left(\frac{13}{4}+\frac{i\tau}{2}\right)}\\ +\dfrac{49152\left(1+a^2\right)^{\frac{5}{2}}}{a^4\left(1+4\tau^2\right)\left(4+9\tau^2\right)\left(25+4\tau^2\right)\left(49+4\tau^2\right)\left(81+4\tau^2\right)}\dfrac{P^5_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ia)+P^5_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ia)}{2}\end{array}\right\}\end{array}\right]$$

Les graphes comparés



— $\text{NIntegrate}\left[\dfrac{(\tau\tanh(\pi\tau))\left(\dfrac{3\sqrt{\pi}}{a^2\Gamma\left(\frac{9}{4}-\frac{i\tau}{2}\right)\Gamma\left(\frac{9}{4}+\frac{i\tau}{2}\right)}-\dfrac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{5}{4}-\frac{i\tau}{2}\right)\Gamma\left(\frac{5}{4}+\frac{i\tau}{2}\right)}-\dfrac{3\sqrt{\pi}}{2a^4\Gamma\left(\frac{13}{4}-\frac{i\tau}{2}\right)\Gamma\left(\frac{13}{4}+\frac{i\tau}{2}\right)}+\dfrac{(49152(1+a^2)^{5/2})\left(P^5_{-\frac{1}{2}+i\tau}(i\,a)+P^5_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-i\,a)\right)}{a^4(1+4\tau^2)(9+4\tau^2)(25+4\tau^2)(49+4\tau^2)(81+4\tau^2))2}\right)\left(P^0_{-\frac{1}{2}+i\tau}(i\,x)-P^0_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-i\,x)\right)}{\cosh(\pi\tau)(2i)},\{\tau,0,\tau\text{max}\}\right]$

— $\text{If}\left[|x|>a,0,\text{If}\left[x>0,\left(1-\frac{x}{a}\right)^p,-\left(1+\frac{x}{a}\right)^p\right]\right]$

Applications de la transformée intégrale modifiée de Mehler-Fock à des problèmes aux limites sur des hyperboloïdes à une nappe

Exemple : problème aux limites sur l'hyperboloïde avec une fonction limite en créneau

D'après la formule d'intégration d'une fonction paire :

$$f(x)=2\int_0^{+\infty}d\tau\,\frac{\tau\,Tanh(\pi\tau)}{Cosh(\pi\tau)}\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix)+P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ix)}{2}\int_0^{+\infty}dy\,f(y)\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(iy)+P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-iy)}{2}$$

$$\Leftrightarrow f(x)=2\int_0^{+\infty}d\tau\,\frac{\tau\,Tanh(\pi\tau)}{Cosh(\pi\tau)}F(\tau)\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix)+P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ix)}{2}\qquad F(\tau)=\int_0^{+\infty}dy\,f(y)\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(iy)+P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-iy)}{2}$$

Sachant que le développement intégral s'écrit :

$$f(x)=\begin{cases}1 & |x|<a\\ 0 & |x|>a\end{cases}=-8\sqrt{a^2+1}\int_0^{+\infty}d\tau\,\frac{\tau\,Tanh(\pi\tau)}{Cosh(\pi\tau)}\frac{1}{1+4\tau^2}\frac{P^1_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ia)-P^1_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ia)}{2i}\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix)+P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ix)}{2}$$

$$F(\tau)=-\frac{4\sqrt{a^2+1}}{1+4\tau^2}\frac{P^1_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ia)-P^1_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ia)}{2i}\Rightarrow f(0)=-8\sqrt{a^2+1}\int_0^{+\infty}d\tau\,\frac{\tau\,Tanh(\pi\tau)}{Cosh(\pi\tau)}\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(0)}{1+4\tau^2}\frac{P^1_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ia)-P^1_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ia)}{2i}$$

La solution du problème de Dirichlet est à rechercher sous la forme :

$$T(\eta,\vartheta)=2\int_0^{+\infty}d\tau\,\frac{\tau\,Tanh(\pi\tau)}{Cosh(\pi\tau)}F(\tau)\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(iSinh(\eta))+P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-iSinh(\eta))}{2}\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\vartheta))}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\vartheta_0))}$$

$$T(\eta,\vartheta)=-8\sqrt{a^2+1}\int_0^{+\infty}d\tau\,\frac{\tau\,Tanh(\pi\tau)}{(1+4\tau^2)Cosh(\pi\tau)}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{P^1_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ia)-P^1_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ia)}{2i}\times\\ \times\dfrac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(iSinh(\eta))+P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-iSinh(\eta))}{2}\dfrac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\vartheta))}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\vartheta_0))}\end{array}\right\}.$$

Le cas limite $\vartheta_0=\pi/2$ donne le profil sur l'axe z (soit $\vartheta=0$) :

$$T(\eta,0)=-8\sqrt{a^2+1}\int_0^{+\infty}d\tau\,\frac{\tau\,Tanh(\pi\tau)}{(1+4\tau^2)Cosh(\pi\tau)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(0)}\frac{P^1_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ia)-P^1_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ia)}{2i}\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(iSinh(\eta))+P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-iSinh(\eta))}{2}$$

Là encore prenons la valeur de la solution pour z=0 (soit $\eta=0$) :

$$T(0,0)=-8\sqrt{a^2+1}\int_0^{+\infty}d\tau\,\frac{\tau\,Tanh(\pi\tau)}{(1+4\tau^2)Cosh(\pi\tau)}\frac{P^1_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ia)-P^1_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ia)}{2i}$$

Traçons le profil en coordonnées cartésienne, en supposant le disque limite de rayon c=a_{min} et le le cercle maximal de rayon a=a_{max}. Les formules de correspondance sont les suivantes :

$$z = cSinh(\eta)Cos(\theta) \Rightarrow axe\ z \to \theta = 0 \Rightarrow z = cSinh(\eta)$$

$$\Rightarrow Sinh(\eta) = \frac{z}{c} = \frac{z}{a_{\min}}$$

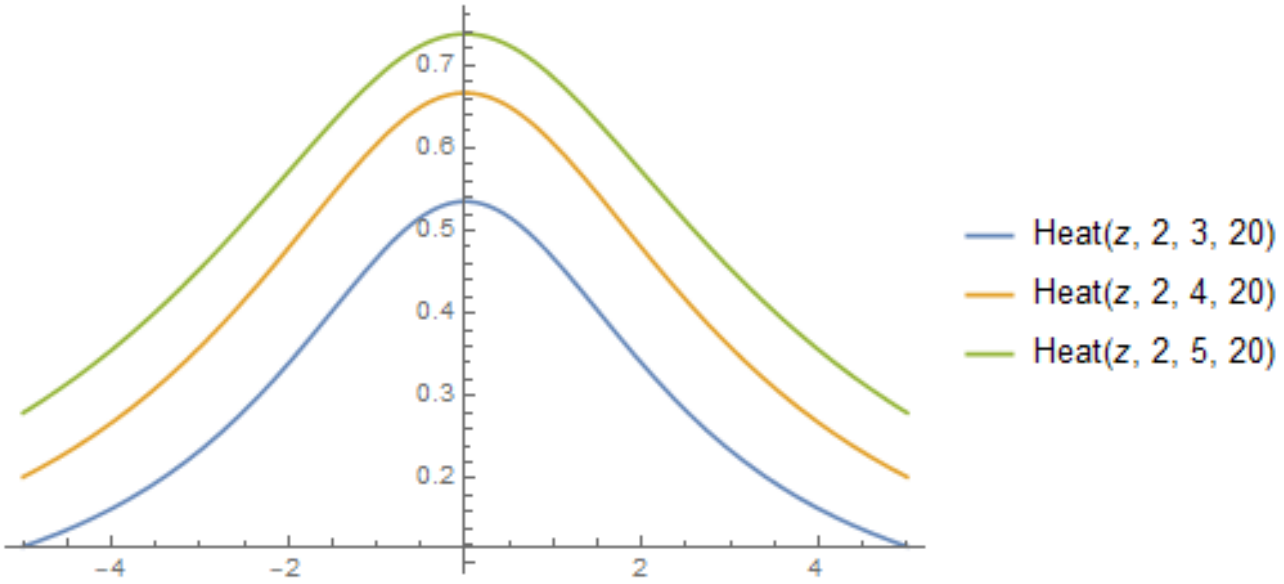
$$Cercle\ \ a_{\max} \Rightarrow a_{\max} = cCosh(l_\eta) \Rightarrow Cosh(a) = \frac{a_{\max}}{a_{\min}} \Rightarrow a = Sinh(l_\eta) = \frac{\sqrt{a_{\max}{}^2 - a_{\min}{}^2}}{a_{\min}}$$

Le profil en z est donc le suivant :

$$P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{3}{4}-\frac{i\tau}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}+\frac{i\tau}{2}\right)}$$

$$T(z) = -\frac{8}{\sqrt{\pi}}\frac{a_{\max}}{a_{\min}}\int_0^{+\infty} d\tau\ \frac{\tau\, Tanh(\pi\tau)\Gamma\left(\frac{3}{4}-\frac{i\tau}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}+\frac{i\tau}{2}\right)}{(1+4\tau^2)Cosh(\pi\tau)}\left\{\frac{P^1_{-\frac{1}{2}+i\tau}\left(i\frac{\sqrt{a_{\max}{}^2-a_{\min}{}^2}}{a_{\min}}\right)-P^1_{-\frac{1}{2}+i\tau}\left(-i\frac{\sqrt{a_{\max}{}^2-a_{\min}{}^2}}{a_{\min}}\right)}{2i}\times\right.$$
$$\left.\times\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}\left(i\frac{z}{a_{\min}}\right)+P_{-\frac{1}{2}+i\tau}\left(-i\frac{z}{a_{\min}}\right)}{2}\right\}$$

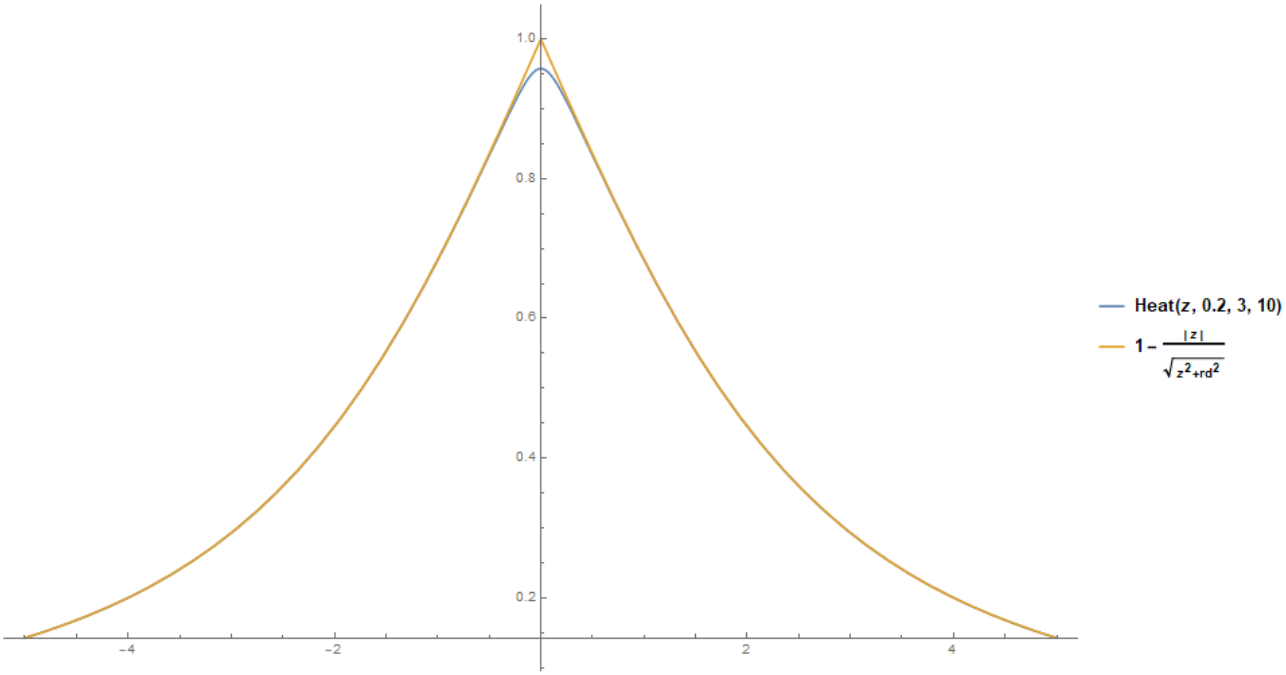
Cela donne par exemple les profils successifs avec des valeurs différentes des rayons (les deux paramètres) :



.

Lorsque le rayon minimum tend vers zéro alors la solution tend bien vers le profil connue :

$$T(z) = 1 - \frac{|z|}{\sqrt{a_{\max}{}^2 + z^2}}.$$



Exemple : problème d'électrostatique, soit une charge placée en x=y=z=0, induisant des charges sur un hyperboloïde parfaitement conducteur placée au potentiel nul.

Le potentiel crée par une charge placée à l'origine est le suivant :

$$T_q(\eta,\vartheta)=\frac{T_0}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \Leftarrow \begin{cases} x = c\,Cosh(\eta)\,Sin(\vartheta)Cos(\varphi) \\ y = c\,Cosh(\eta)\,Sin(\vartheta)Sin(\varphi) \\ z = c\,Sinh(\eta)\,Cos(\vartheta) \end{cases}$$

$$T_q(\eta,\vartheta)=\frac{T_0}{\sqrt{c^2\,Cosh^2(\eta)\,Sin^2(\vartheta)+c^2\,Sinh^2(\eta)\,Cos^2(\vartheta)}}=\frac{T_0}{c\sqrt{Cosh^2(\eta)\,Sin^2(\vartheta)+Sinh^2(\eta)\,Cos^2(\vartheta)}}$$

$$T_q(\eta,\vartheta)=\frac{T_0}{c\sqrt{Sinh^2(\eta)+Sin^2(\vartheta)}}=\frac{T_0}{c\sqrt{Cosh^2(\eta)-Cos^2(\vartheta)}}$$

La solution du problème se décompose sous la forme : $T(\eta,\vartheta)=T_q(\eta,\vartheta)-T_s(\eta,\vartheta)$, Ts étant solution du problème aux limites de Dirichlet :

$$T(\eta,\vartheta_0)=T_q(\eta,\vartheta_0)-T_s(\eta,\vartheta_0)=0 \Rightarrow T_s(\eta,\vartheta_0)=T_q(\eta,\vartheta_0)=\frac{T_0}{c\sqrt{Cosh^2(\eta)-Cos^2(\vartheta_0)}}$$

Il convient donc de rechercher le développement intégral de la fonction :

$$f(\eta)=\frac{T_0}{c\sqrt{Cosh^2(\eta)-Cos^2(\vartheta_0)}}=\frac{T_0}{c\sqrt{Sinh^2(\eta)+Sin^2(\vartheta_0)}}$$

D'après la formule d'intégration d'une fonction paire :

$$f(x)=2\int_0^{+\infty}d\tau\,\frac{\tau\,Tanh(\pi\tau)}{Cosh(\pi\tau)}\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix)+P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ix)}{2}\int_0^{+\infty}dy\,f(y)\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(iy)+P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-iy)}{2}$$

$$\Leftrightarrow f(x)=2\int_0^{+\infty}d\tau\,\frac{\tau\,Tanh(\pi\tau)}{Cosh(\pi\tau)}F(\tau)\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix)+P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ix)}{2} \qquad F(\tau)=\int_0^{+\infty}dy\,f(y)\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(iy)+P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-iy)}{2}$$

Il vient selon une formule de transformée de Mehler-Fock précédemment donnée:

$$F(\tau)=\frac{T_0}{c}\int_0^{+\infty}dy\,\frac{1}{\sqrt{Sinh^2(\eta)+Sin^2(\vartheta_0)}}\,\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(iy)+P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-iy)}{2}$$

$$Or\ \frac{1}{\sqrt{Sinh^2(\eta)+Sin^2(\vartheta_0)}}=\frac{1}{\sqrt{Sinh^2(\eta)+1-Cos^2(\vartheta_0)}}=$$

$$=\pi\int_0^{+\infty}d\tau\left\{\frac{\tau\,Tanh(\pi\tau)}{Cosh^2(\pi\tau)}P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(0)\left(P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\vartheta_0))+P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-Cos(\vartheta_0))\right)\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(iSinh(\eta))+P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-iSinh(\eta))}{2}\right\}$$

$$\Rightarrow F(\tau)=\frac{T_0}{c}\,\frac{\pi\,P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(0)}{Cosh(\pi\tau)}\,\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\vartheta_0))+P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-Cos(\vartheta_0))}{2}$$

La solution intermédiaire devient alors :

$$T_s(\eta,\vartheta)=2\int_0^{+\infty}d\tau\,\frac{\tau\,Tanh(\pi\tau)}{Cosh(\pi\tau)}F(\tau)\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(iSinh(\eta))+P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-iSinh(\eta))}{2}\,\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\vartheta))}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\vartheta_0))}$$

$$=\pi\frac{T_0}{c}\int_0^{+\infty}d\tau\,\frac{\tau\,Tanh(\pi\tau)}{Cosh^2(\pi\tau)}\left\{\begin{array}{l}P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(0)\left(P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\vartheta_0))+P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-Cos(\vartheta_0))\right)\times\\ \times\dfrac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(iSinh(\eta))+P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-iSinh(\eta))}{2}\,\dfrac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\vartheta))}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\vartheta_0))}\end{array}\right\}$$

La solution complète s'écrit donc :

$$T(\eta,\vartheta)=\frac{T_0}{c\sqrt{Sinh^2(\eta)+Sin^2(\vartheta)}}-$$

$$-\pi\frac{T_0}{c}\int_0^{+\infty}d\tau\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\tau\,Tanh(\pi\tau)}{Cosh^2(\pi\tau)}P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(0)\left(P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\vartheta_0))+P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-Cos(\vartheta_0))\right)\times\\ \times\dfrac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(iSinh(\eta))+P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-iSinh(\eta))}{2}\dfrac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\vartheta))}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\vartheta_0))}\end{array}\right\}$$

$$De\ plus\ \frac{1}{\sqrt{Sinh^2(\eta)+Sin^2(\vartheta)}}=\pi\int_0^{+\infty}d\tau\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\tau\,Tanh(\pi\tau)}{Cosh^2(\pi\tau)}P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(0)\left(P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\vartheta))+P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-Cos(\vartheta))\right)\times\\ \times\dfrac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(iSinh(\eta))+P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-iSinh(\eta))}{2}\end{array}\right\}$$

voir formule précédemment donnée

$$\Rightarrow T(\eta,\vartheta)=\frac{T_0}{c}\pi\int_0^{+\infty}d\tau\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\tau\,Tanh(\pi\tau)}{Cosh^2(\pi\tau)}P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(0)\left(P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\vartheta))+P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-Cos(\vartheta))\right)\times\\ \times\dfrac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(iSinh(\eta))+P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-iSinh(\eta))}{2}\end{array}\right\}-$$

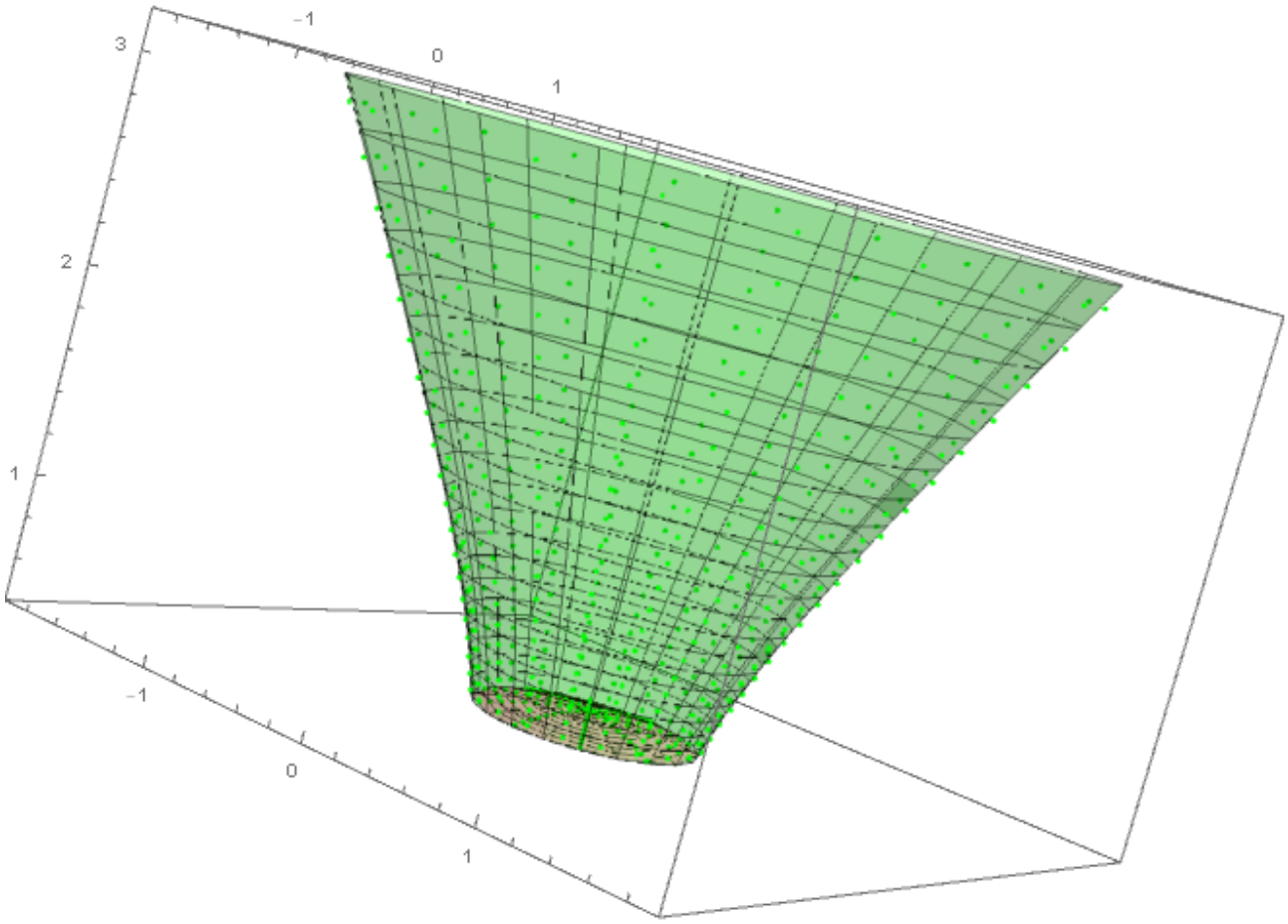
$$-\pi\frac{T_0}{c}\int_0^{+\infty}d\tau\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\tau\,Tanh(\pi\tau)}{Cosh^2(\pi\tau)}P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(0)\left(P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\vartheta_0))+P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-Cos(\vartheta_0))\right)\times\\ \times\dfrac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(iSinh(\eta))+P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-iSinh(\eta))}{2}\dfrac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\vartheta))}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\vartheta_0))}\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow T(\eta,\vartheta)=\frac{T_0}{c}\pi\int_0^{+\infty}d\tau\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\tau\,Tanh(\pi\tau)}{Cosh^2(\pi\tau)}\dfrac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(0)}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\vartheta_0))}\left[\begin{array}{l}\left(P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\vartheta))+P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-Cos(\vartheta))\right)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\vartheta_0))-\\ -\left(P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\vartheta_0))+P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-Cos(\vartheta_0))\right)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\vartheta))\end{array}\right]\times\\ \times\dfrac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(iSinh(\eta))+P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-iSinh(\eta))}{2}\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow T(\eta,\vartheta)=\frac{T_0}{c}\pi\int_0^{+\infty}d\tau\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\tau\,Tanh(\pi\tau)}{Cosh^2(\pi\tau)}\dfrac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(0)}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\vartheta_0))}\dfrac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(iSinh(\eta))+P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-iSinh(\eta))}{2}\times\\ \times\left[P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-Cos(\vartheta))P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\vartheta_0))-P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-Cos(\vartheta_0))P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\vartheta))\right]\end{array}\right\}$$

.

Maintenant nous allons donner sans démonstration des résultats de développements et de transformations intégrales qui s'adapte à des problèmes aux limites de Dirichlet, Neumann et Robin sur l'hyperboloïde à une nappe dans la dimension radiale, les conditions aux limites restent de Dirichlet sur la surface de l'hyperboloïde. Ces résultats proviennent d'un article en russe de 1989 du même auteur A.I.Moshinskii, « Some expansions of arbitrary functions in integrals with respect to spherical functions ». On illustre par la figure suivante, le type d'objet géométrique sur lequel porte le problème aux limites :



Il s'agit d'un hyperboloïde à une nappe tronqué à sa base. Le fond n'est plat que lorsque la troncature est réalisée pour η=0 (un demi hyperboloïde à une nappe).

Transformation intégrale modifiée de Mehler-Fock, pour le problème aux limites de Dirichlet sur [y, +∞] homogène en x=y

Toute fonction f(x), x€[y,+∞] peut se représenter sous la forme d'une double intégrale sur tout point sans discontinuité de valeurs :

$$\textit{Définissons}\quad G(\nu,x,y)=i\left\{P_{-\frac{1}{2}+\nu}(ix)P_{-\frac{1}{2}+\nu}(-iy)-P_{-\frac{1}{2}+\nu}(-ix)P_{-\frac{1}{2}+\nu}(iy)\right\}\Rightarrow G(\nu,x,y)\big|_{x=y}=0$$

$$G(i\tau,x,y)=i\left\{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-iy)-P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ix)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(iy)\right\}$$

$$f(\eta)=\frac{\pi^2}{4}\int_0^{+\infty}d\tau\,\frac{\tau\,Sinh(\pi\tau)}{Cosh^3(\pi\tau)}\frac{G(i\tau,x,y)}{iQ_{-\frac{1}{2}+i\tau}(iy)Q_{-\frac{1}{2}-i\tau}(iy)}\int_y^{+\infty}d\varsigma\,f(\varsigma)G(i\tau,\varsigma,y)$$

Sous les conditions suivantes des fonctions f(η) :

- la fonction f(x) doit être continue par morceau, et bornée dans chaque sous-intervalle [x1,x2] de l'intervalle [-∞,+∞]

- l'intégrale suivante doit être définie : $\int_a^{+\infty}dx\,|f(x)|(x)^{-\frac{1}{2}}Log(x)$ *.*

quelque soit la valeur a > 0 pris dans l'intervalle d'intégration.

On peut transformer le noyau sachant que : (voir propriétés des fonctions coniques de Mehler)

$$Q_\nu(ix)=\frac{\pi}{2Sin(\pi\nu)}\left(e^{-i\pi\nu}P_\nu(ix)-P_\nu(-ix)\right)\Rightarrow Q_{\nu-\frac{1}{2}}(ix)=\frac{\pi}{2Cos(\pi\nu)}\left(P_{\nu-\frac{1}{2}}(-ix)-e^{-i\pi\left(\nu-\frac{1}{2}\right)}P_{\nu-\frac{1}{2}}(ix)\right)$$

$$\textit{De plus}\begin{cases}Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix)=\dfrac{\pi}{2Cosh(\tau\pi)}\left(-ie^{\pi\tau}P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix)+P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ix)\right)\\ Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ix)=ie^{-\pi\tau}Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix)\end{cases}$$

Il vient alors pour le noyau :

$$G(\nu,x,y)=i\left\{P_{-\frac{1}{2}+\nu}(ix)P_{-\frac{1}{2}+\nu}(-iy)-P_{-\frac{1}{2}+\nu}(-ix)P_{-\frac{1}{2}+\nu}(iy)\right\}$$

$$\Rightarrow G(\nu,x,y)=2i\frac{Cos(\pi\nu)}{\pi}\left(P_{-\frac{1}{2}+\nu}(ix)Q_{-\frac{1}{2}+\nu}(iy)-Q_{-\frac{1}{2}+\nu}(ix)P_{-\frac{1}{2}+\nu}(iy)\right)$$

$$G(i\tau,x,y)=i\left\{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-iy)-P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ix)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(iy)\right\}$$

$$\Rightarrow G(i\tau,x,y)=2i\frac{Cosh(\pi\tau)}{\pi}\left(P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix)Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(iy)-Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(iy)\right)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}Posons\quad H(i\tau,x,y)=i\left\{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix)Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(iy)-Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(iy)\right\}\\ f(\eta)=\int_0^{+\infty}d\tau\,\frac{\tau\,Sinh(\pi\tau)}{Cosh(\pi\tau)}\frac{H(i\tau,x,y)}{iQ_{-\frac{1}{2}+i\tau}(iy)Q_{-\frac{1}{2}-i\tau}(iy)}\int_y^{+\infty}d\varsigma\,f(\varsigma)H(i\tau,\varsigma,y)\end{cases}$$

Démontrons que cette expression est réelle, dont ici nous devons considérer les fonctions de Legendre comme étant de type 3 puisque les arguments sont imaginaire et bien en dehors de la coupure [-∞,+1]. Nous avons :

$$G(\tau,x,y)=i\left(P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-iy)-P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ix)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(iy)\right)$$

$$\overline{G(\tau,x,y)}=-i\left(\overline{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix)}\,\overline{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-iy)}-\overline{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ix)}\,\overline{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(iy)}\right)$$

$$=-i\left(P_{-\frac{1}{2}-i\tau}(-ix)P_{-\frac{1}{2}-i\tau}(iy)-P_{-\frac{1}{2}-i\tau}(ix)P_{-\frac{1}{2}-i\tau}(-iy)\right)$$

$$Or\quad P_{-\frac{1}{2}-i\tau}(ix)=P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix)\Rightarrow\overline{G(\tau,x,y)}=i\left(P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-iy)-P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ix)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(iy)\right)$$

$$\Rightarrow\overline{G(\tau,x,y)}=G(\tau,x,y)\Rightarrow G(\tau,x,y)\in\mathbf{R}$$

De plus pour la fonction de Legendre de deuxième espèce de type 3, sur C-[-∞,+1], on a :

$$\begin{cases}Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix)=\dfrac{\pi}{2Cosh(\pi\tau)}\left(-ie^{\pi\tau}P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix)+P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ix)\right)\\ Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ix)=ie^{-\pi\tau}Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix)=\dfrac{\pi}{2Cosh(\pi\tau)}\left(P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix)+ie^{-\pi\tau}P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ix)\right)\qquad x>0\\ Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ix)=\dfrac{\pi}{2Cosh(\pi\tau)}\left(ie^{-\pi\tau}P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ix)+P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix)\right)\end{cases}$$

$$\Rightarrow G(\tau,x,y)=i\left(P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-iy)-P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ix)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(iy)\right)$$

$$\Rightarrow G(\tau,x,y)=\frac{2iCosh(\pi\tau)}{\pi}\left(P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix)Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(iy)-Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(iy)\right)$$

Remarque : Il s'avère la valeur du noyau G tel que définit ne dépend en définitive pas du type 2 ou 3 de la fonction de Legendre de deuxième espèce. La valeur est identique.

Et l'expression au dénominateur est également réelle :

$$\overline{Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix)Q_{-\frac{1}{2}-i\tau}(ix)} = \overline{Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix)}\,\overline{Q_{-\frac{1}{2}-i\tau}(ix)} = Q_{-\frac{1}{2}-i\tau}(-ix)Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ix)$$

$$Comme \quad Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ix) = ie^{-\pi\tau}Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix) \quad et \quad Q_{-\frac{1}{2}-i\tau}(-ix) = ie^{\pi\tau}Q_{-\frac{1}{2}-i\tau}(ix)$$

$$\overline{Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix)Q_{-\frac{1}{2}-i\tau}(ix)} = ie^{-\pi\tau}ie^{\pi\tau}Q_{-\frac{1}{2}-i\tau}(-ix)Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix) = -Q_{-\frac{1}{2}-i\tau}(-ix)Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix)$$

$$\Rightarrow Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix)Q_{-\frac{1}{2}-i\tau}(ix) \in i\mathbf{R}$$

$$\Rightarrow iQ_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix)Q_{-\frac{1}{2}-i\tau}(ix) \in \mathbf{R}$$

L'application de ce développement intégral à la solution du problème aux limites, conduit au résultat suivant :

$$T(\eta,\vartheta)\big|_{\vartheta=\vartheta_0} = f(\eta) \qquad T(\eta,\vartheta)\big|_{\eta=l_\eta} = 0$$

$$H(i\tau, Sinh(\eta), Sinh(l_\eta)) = i\left\{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(iSinh(\eta))Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(iSinh(l_\eta)) - Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(iSinh(\eta))P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(iSinh(l_\eta))\right\}$$

$$F(\tau) = \int_y^{+\infty} d\varsigma\, f(\varsigma)H(i\tau,\varsigma,y)$$

$$T(\eta,\vartheta) = \int_0^{+\infty} d\tau\, \frac{\tau\, Sinh(\pi\tau)}{Cosh(\pi\tau)} \frac{H(i\tau, Sinh(\eta), Sinh(l_\eta))}{iQ_{-\frac{1}{2}+i\tau}(iSinh(l_\eta))Q_{-\frac{1}{2}-i\tau}(iSinh(l_\eta))} F(\tau) \frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\vartheta))}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\vartheta_0))}$$

Transformation intégrale modifiée de Mehler-Fock, pour le problème aux limites de Neumann sur [y,+∞] homogène en x=y, et de Dirichlet sur la surface de l'hyperboloïde à une nappe

Toute fonction f(x), x€[y,+∞] peut se représenter sous la forme d'une double intégrale sur tout point sans discontinuité de valeurs :

$$\textit{Définissons} \quad H(\nu,x,y)=i\left\{P_{-\frac{1}{2}+\nu}(ix)Q'_{-\frac{1}{2}+\nu}(iy)-P'_{-\frac{1}{2}+\nu}(iy)Q_{-\frac{1}{2}+\nu}(ix)\right\}\Rightarrow \left.\frac{dH(\nu,x,y)}{dx}\right|_{x=y}=0$$

$$\Rightarrow H(i\tau,x,y)=i\left\{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix)Q'_{-\frac{1}{2}+i\tau}(iy)-P'_{-\frac{1}{2}+i\tau}(iy)Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix)\right\} \quad .$$

$$f(\eta)=\int_0^{+\infty}d\tau\,\frac{\tau\,Sinh(\pi\tau)}{Cosh^3(\pi\tau)}\frac{H(i\tau,x,y)}{iQ'_{-\frac{1}{2}+i\tau}(iy)Q'_{-\frac{1}{2}-i\tau}(iy)}\int_y^{+\infty}d\varsigma\,f(\varsigma)H(i\tau,\varsigma,y)$$

Sous les conditions suivantes des fonctions f(η) :

- la fonction f(x) doit être continue par morceau, et bornée dans chaque sous-intervalle [x1,x2] de l'intervalle [-∞,+∞]

- l'intégrale suivante doit être définie : $\int_a^{+\infty}dx\,|f(x)|(x)^{-\frac{1}{2}}Log(x)\cdot$

quelque soit la valeur a > 0 pris dans l'intervalle d'intégration.

L'application de ce développement intégral à la solution du problème aux limites, conduit au résultat suivant :

$$T(\eta,\vartheta)\big|_{\vartheta=\vartheta_0}=f(\eta) \qquad \left.\frac{\partial T(\eta,\vartheta)}{\partial\eta}\right|_{\eta=l_\eta}=0$$

$$H(i\tau,Sinh(\eta),Sinh(l_\eta))=i\left\{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(iSinh(\eta))Q'_{-\frac{1}{2}+i\tau}(iSinh(l_\eta))-Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(iSinh(\eta))P'_{-\frac{1}{2}+i\tau}(iSinh(l_\eta))\right\}$$

$$F(\tau)=\int_y^{+\infty}d\varsigma\,f(\varsigma)H(i\tau,\varsigma,y)$$

$$T(\eta,\vartheta)=\int_0^{+\infty}d\tau\,\frac{\tau\,Sinh(\pi\tau)}{Cosh^3(\pi\tau)}\frac{H(i\tau,Sinh(\eta),Sinh(l_\eta))}{iQ'_{-\frac{1}{2}+i\tau}(iSinh(l_\eta))Q'_{-\frac{1}{2}-i\tau}(iSinh(l_\eta))}F(\tau)\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\vartheta))}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\vartheta_0))}$$

L'expression du noyau est bien réelle car elle représente la dérivée première par rapport à y du noyau : $\Psi(i\tau,x,y)=i\left\{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix)Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(iy)-Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(iy)\right\}$. *Il reste à démontrer que l'expression* $iQ'_{-\frac{1}{2}+i\tau}(iy)Q'_{-\frac{1}{2}-i\tau}(iy)$ *est elle-même bien réelle.*

Reprenons l'expression suivante :

$$A(x,y)=iQ_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix)Q_{-\frac{1}{2}-i\tau}(iy)$$

$$\overline{A(x,y)}=-i\overline{Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix)}\,\overline{Q_{-\frac{1}{2}-i\tau}(iy)}=-iQ_{-\frac{1}{2}-i\tau}(-ix)Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-iy)$$

$$Comme\quad Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ix)=ie^{-\pi\tau}Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix)\quad et\quad Q_{-\frac{1}{2}-i\tau}(-iy)=ie^{\pi\tau}Q_{-\frac{1}{2}-i\tau}(iy)$$

$$\overline{A(x,y)}=-iie^{-\pi\tau}ie^{\pi\tau}Q_{-\frac{1}{2}-i\tau}(-ix)Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(iy)=iQ_{-\frac{1}{2}-i\tau}(-ix)Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(iy)=A(y,x)$$

$$\Rightarrow\overline{A(x,y)}=A(y,x)\Rightarrow\frac{\overline{\partial^2A(x,y)}}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2A(y,x)}{\partial x\partial y}\Rightarrow\left.\frac{\overline{\partial^2A(x,y)}}{\partial x\partial y}\right|_{x=y}=\left.\frac{\partial^2A(y,x)}{\partial x\partial y}\right|_{x=y}$$

Il vient donc pour x=y :

$$\frac{\partial^2A(y,x)}{\partial x\partial y}=-iQ'_{-\frac{1}{2}+i\tau}(iy)Q'_{-\frac{1}{2}-i\tau}(ix)\Rightarrow\left.\frac{\partial^2A(y,x)}{\partial x\partial y}\right|_{x=y}=\left.\frac{\partial^2A(x,y)}{\partial x\partial y}\right|_{x=y}=-iQ'_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix)Q'_{-\frac{1}{2}-i\tau}(ix)$$

$$\Rightarrow iQ'_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix)Q'_{-\frac{1}{2}-i\tau}(ix)\in\mathbf{R}$$

.

L'expression est donc bien réelle.

<u>Transformation intégrale modifiée de Mehler-Fock, pour le problème aux limites de Robin sur [0,+∞] homogène en x=0, et de Dirichlet sur la surface de l'hyperboloïde à une nappe</u>

Toute fonction f(x), x€[y,+∞] peut se représenter sous la forme d'une double intégrale sur tout point sans discontinuité de valeurs :

.

Sous les conditions suivantes des fonctions f(η) :

- la fonction f(x) doit être continue par morceau, et bornée dans chaque sous-intervalle [x1,x2] de l'intervalle [-∞,+∞]

- l'intégrale suivante doit être définie : $\int_a^{+\infty} dx\,|f(x)|(x)^{-\frac{1}{2}} Log(x)\cdot$

quelque soit la valeur a > 0 pris dans l'intervalle d'intégration.

Si les conditions aux limites se présentent sous la forme :

$$\alpha \left.\frac{dF(\nu,x)}{dx}\right|_{x=0} - \beta F(\nu,x)\Big|_{x=0} = 0 \Rightarrow h = \frac{\beta}{\alpha} \qquad \underline{h>0 \Rightarrow \beta > 0 \quad \alpha \geq 0}$$

$$\begin{cases} F(i\tau,x) = \beta P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(0)\dfrac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix) - P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ix)}{2i} - \alpha P'_{-\frac{1}{2}+i\tau}(0)\dfrac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix) + P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ix)}{2} \\ f(\eta) = 2\displaystyle\int_0^{+\infty} d\tau \frac{\tau\, Tanh(\pi\tau)}{Cosh(\pi\tau)} \frac{F(i\tau,x)}{\left\{\alpha^2 \left|P'_{-\frac{1}{2}+i\tau}(0)\right|^2 + \beta^2 \left|P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(0)\right|^2 + \frac{2}{\pi}\alpha\beta\right\}} \int_0^{+\infty} d\varsigma\, f(\varsigma) F(i\tau,\varsigma) \end{cases}.$$

$$\left.\begin{matrix} \alpha = 0 \\ \beta = 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} F(i\tau,x) = \dfrac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix) - P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ix)}{2i} \\ f(\eta) = 2\displaystyle\int_0^{+\infty} d\tau \frac{\tau\, Tanh(\pi\tau)}{Cosh(\pi\tau)} F(i\tau,x) \int_0^{+\infty} d\varsigma\, f(\varsigma) F(i\tau,\varsigma) \end{cases}$$

Et l'on retrouve dans le cas α=0, β=1, le développement intégral du problème de Dirichlet pour une fonction limite impaire.

On remarque que par construction le noyau est bien une expression réelle.

Il est également à remarquer que pour la transformation de Mehler-Fock modifiée liée au problème aux limites sur l'hyperboloïde à une nappe, si la fonction limite est paire en x (x=Sinh(η)) et continue et dérivable en tout support bornée contenant l'origine alors sa dérivée première sur l'argument x est une fonction impaire, qui doit s'annuler en x=0. En d'autre terme le noyau de la représentation intégrale d'une fonction paire, soit :

$$K(\nu,x)=\frac{P_{-\frac{1}{2}+\nu}(ix)+P_{-\frac{1}{2}+\nu}(-ix)}{2}\Rightarrow\left.\frac{dF(\nu,x)}{dx}\right|_{x=0}=0.$$

Ce qui signifie que la représentation intégral du problème de Dirichlet pour une fonction limite paire est apte à résoudre des problèmes sur le demi-hyperboloïde à une nappe avec une condition de Neumann homogène à la base.

Cela correspond exactement au cas α=1, β=0 appliqué à la formule précédente et l'on retrouve bien le développement intégral du problème de Dirichlet pour une fonction limite paire.

$$\left.\begin{array}{l}\alpha=1\\ \beta=0\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}F(i\tau,x)=\dfrac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix)+P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ix)}{2}\\ f(\eta)=2\displaystyle\int_0^{+\infty}d\tau\,\frac{\tau\,Tanh(\pi\tau)}{Cosh(\pi\tau)}F(i\tau,x)\int_0^{+\infty}d\varsigma\,f(\varsigma)F(i\tau,\varsigma)\end{array}\right..$$

L'application de ce développement intégral à la solution du problème aux limites, conduit au résultat suivant :

$$T(\eta,\vartheta)\big|_{\vartheta=\vartheta_0}=f(\eta)\qquad\alpha\frac{\partial T(\eta,\vartheta)}{\partial\eta}-\beta\,T(\eta,\vartheta)\Big|_{\eta=l_\eta}=0\qquad F(\tau)=\int_0^{+\infty}d\varsigma\,f(\varsigma)H(i\tau,\varsigma,y)$$

$$H(i\tau,Sinh(\eta))=\beta\,P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(0)\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(iSinh(\eta))-P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-iSinh(\eta))}{2i}-\alpha\,P'_{-\frac{1}{2}+i\tau}(0)\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(iSinh(\eta))+P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-iSinh(\eta))}{2}$$

$$T(\eta,\vartheta)=2\int_0^{+\infty}d\tau\,\frac{\tau\,Tanh(\pi\tau)}{Cosh(\pi\tau)}\frac{H(i\tau,Sinh(\eta),Sinh(l_\eta))}{\left\{\alpha^2\left|P'_{-\frac{1}{2}+i\tau}(0)\right|^2+\beta^2\left|P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(0)\right|^2+\frac{2}{\pi}\alpha\beta\right\}}F(\tau)\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\vartheta))}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cos(\vartheta_0))}$$

.

Quelques propriétés des fonctions coniques de Mehler

Dans la suite de l'exposé, on ne fait pas de distinguo de notation entre les fonctions lorsqu'elles sont définis entre [-1,+1], [1,+∞] ou bien [-i ∞,+i ∞] (argument purement imaginaire), comme parfois on peut le voir dans la littérature mathématique. En revanche il peut arriver que les propriétés des fonctions diffèrent selon l'intervalle sur lesquels elles sont définis, ce qui est souvent le cas pour les fonctions de Legendre et donc les fonctions coniques de Mehler à partir desquelles elles sont construites.

Fonctions coniques de Mehler de première et deuxième espèce, avec un argument purement réel allant de [-1,+1], aussi appelé intervalle de coupure, fonctions intervenant sur des problèmes aux limites de cône sphérique

Voir l'ouvrage « W.Magnus.F.Oberhettinger.R.P.Soni-Formulas and Theorems for the Special Functions of Mathematical Physics », section 4.3, page 166.

On rappelle que les fonctions de Legendre de première et deuxième espèce sont reliées par des formules de liaison dont voici quelques unes :

$Pour\ x \in [-1,+1]$

$$\forall \nu \in \mathbf{C} \quad \begin{cases} P_\nu(x) = -\dfrac{2}{\pi\, Sin(\nu\,\pi)}\left(Cos(\nu\,\pi)Q_\nu(x) + Q_\nu(-x)\right) \\ Q_\nu(x) = \dfrac{\pi}{2Sin(\nu\,\pi)}\left(Cos(\nu\,\pi)P_\nu(x) - P_\nu(-x)\right) \end{cases}$$

$$\forall \nu \in \mathbf{C}, \mu \in \mathbf{R} \quad \begin{cases} P_\nu^\mu(x) = -\dfrac{2}{\pi\, Sin((\nu+\mu)\pi)}\left(Cos((\nu+\mu)\pi)Q_\nu^\mu(x) + Q_\nu^\mu(-x)\right) \\ Q_\nu^\mu(x) = \dfrac{\pi}{2Sin((\nu+\mu)\pi)}\left(Cos((\nu+\mu)\pi)P_\nu^\mu(x) - P_\nu^\mu(-x)\right) \end{cases}$$

$$\forall \nu \in \mathbf{C}, \mu \in \mathbf{R} \quad \begin{cases} Q_\nu^\mu(x) + Q_\nu^\mu(-x) = -\dfrac{\pi}{2}Tan\left(\dfrac{\pi}{2}(\nu+\mu)\pi\right)\left(P_\nu^\mu(x) + P_\nu^\mu(-x)\right) \\ Q_\nu^\mu(x) - Q_\nu^\mu(-x) = \dfrac{\pi}{2}Cotan\left(\dfrac{\pi}{2}(\nu+\mu)\pi\right)\left(P_\nu^\mu(x) - P_\nu^\mu(-x)\right) \end{cases}$$

$Pour\ x \in [-1,+1]$

$$\forall \nu \in \mathbf{C}, \mu \in \mathbf{R} \quad P_\nu^\mu(x) = P_{-\nu-1}^\mu(x)$$

Lorsque v=-1/2+iτ , il vient pour les fonctions coniques de Mehler :

$$Pour\ x \in [-1,+1] \quad P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x) = -\frac{2}{\pi\, Sin\left(\left(-\frac{1}{2}+i\tau\right)\pi\right)}\left(Cos\left(\left(-\frac{1}{2}+i\tau\right)\pi\right)Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)+Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-x)\right)$$

$$Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x) = \frac{\pi}{2Sin\left(\left(-\frac{1}{2}+i\tau\right)\pi\right)}\left(Cos\left(\left(-\frac{1}{2}+i\tau\right)\pi\right)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)-P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-x)\right)$$

$$e^{\frac{i}{2}\pi} = i \quad e^{-\frac{i}{2}\pi} = -i \Rightarrow Cos\left(\left(-\frac{1}{2}+i\tau\right)\pi\right) = \frac{e^{-\tau\pi-\frac{i}{2}\pi}+e^{\tau\pi+\frac{i}{2}\pi}}{2} = i\frac{-e^{-\tau\pi}+e^{\tau\pi}}{2} = i\ Sinh(\tau\pi)$$

$$Sin\left(\left(-\frac{1}{2}+i\tau\right)\pi\right) = \frac{e^{-\tau\pi-\frac{i}{2}\pi}-e^{\tau\pi+\frac{i}{2}\pi}}{2i} = -i\frac{e^{-\tau\pi}+e^{\tau\pi}}{2i} = -Cosh(\tau\pi)$$

$$P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x) = \frac{2}{\pi\ Cosh(\tau\pi)}\left(i\ Sinh(\tau\pi)Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)+Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-x)\right)$$

$$Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x) = \frac{\pi}{2\ Cosh(\tau\pi)}\left(P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-x)-i\ Sinh(\tau\pi)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)\right)$$

.

Lorsque v=-1/2+iτ , il vient pour la fonction conique modifiée de première espèce de Mehler :
$Pour\ x \in [-1,+1]$

$$P^{\mu}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x) = -\frac{2}{\pi\, Sin\left(\left(-\frac{1}{2}+i\tau+\mu\right)\pi\right)}\left(Cos\left(\left(-\frac{1}{2}+i\tau+\mu\right)\pi\right)Q^{\mu}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)+Q^{\mu}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-x)\right)$$

$$Cos\left(\left(-\frac{1}{2}+i\tau\right)\pi\right) = i\, Sinh(\tau\pi) \quad Sin\left(\left(-\frac{1}{2}+i\tau\right)\pi\right) = -Cosh(\tau\pi)$$

$$Sin\left(\left(-\frac{1}{2}+i\tau+\mu\right)\pi\right) = -Cosh(\tau\pi)Cos(\mu\pi)+i\, Sinh(\tau\pi)Sin(\mu\pi)$$

$$Cos\left(\left(-\frac{1}{2}+i\tau+\mu\right)\pi\right) = Cosh(\tau\pi)Sin(\mu\pi)+i\, Sinh(\tau\pi)Cos(\mu\pi)$$

$$\frac{1}{-Cosh(\tau\pi)Cos(\mu\pi)+i\, Sinh(\tau\pi)Sin(\mu\pi)} = -\frac{Cosh(\tau\pi)Cos(\mu\pi)+i\, Sinh(\tau\pi)Sin(\mu\pi)}{Cosh^2(\tau\pi)Cos^2(\mu\pi)+Sinh^2(\tau\pi)Sin^2(\mu\pi)}$$

$$Cosh^2(\tau\pi)Cos^2(\mu\pi)+Sinh^2(\tau\pi)Sin^2(\mu\pi) = Cosh^2(\tau\pi)-Sin^2(\mu\pi)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{-Cosh(\tau\pi)Sin(\mu\pi)+i\, Sinh(\tau\pi)Cos(\mu\pi)} = -\frac{Cosh(\tau\pi)Cos(\mu\pi)+i\, Sinh(\tau\pi)Sin(\mu\pi)}{Cosh^2(\tau\pi)-Sin^2(\mu\pi)}$$

$$(Cosh(\tau\pi)Sin(\mu\pi)+i\, Sinh(\tau\pi)Cos(\mu\pi))(Cosh(\tau\pi)Cos(\mu\pi)+i\, Sinh(\tau\pi)Sin(\mu\pi)) =$$
$$= Sin(\mu\pi)Cos(\mu\pi)+iSinh(\tau\pi)Cosh(\tau\pi)$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{Sin\left(\left(-\frac{1}{2}+i\tau+\mu\right)\pi\right)} = \frac{Cosh(\tau\pi)Cos(\mu\pi)+i\, Sinh(\tau\pi)Sin(\mu\pi)}{Cosh^2(\tau\pi)-Sin^2(\mu\pi)}$$

$$\Rightarrow -\frac{Cos\left(\left(-\frac{1}{2}+i\tau+\mu\right)\pi\right)}{Sin\left(\left(-\frac{1}{2}+i\tau+\mu\right)\pi\right)} = \frac{Sin(\mu\pi)Cos(\mu\pi)+iSinh(\tau\pi)Cosh(\tau\pi)}{Cosh^2(\tau\pi)-Sin^2(\mu\pi)}$$

$$\Rightarrow P^{\mu}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x) = \frac{2}{\pi}\frac{\left(\begin{array}{l}(Sin(\mu\pi)Cos(\mu\pi)+iSinh(\tau\pi)Cosh(\tau\pi))Q^{\mu}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)+\\ +(Cosh(\tau\pi)Cos(\mu\pi)+i\, Sinh(\tau\pi)Sin(\mu\pi))Q^{\mu}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-x)\end{array}\right)}{Cosh^2(\tau\pi)-Sin^2(\mu\pi)}$$

En posant μ=0, on retrouve la formule de connexion pour la fonction conique de première espèce :

$$P^{0}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x) = \frac{2}{\pi}\frac{\left(iSinh(\tau\pi)Cosh(\tau\pi)Q^{0}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)+Cosh(\tau\pi)Q^{0}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-x)\right)}{Cosh^2(\tau\pi)}$$

$$P^{0}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x) = \frac{2}{\pi Cosh(\tau\pi)}\left(iSinh(\tau\pi)Q^{0}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)+Q^{0}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-x)\right)$$

Et celle de deuxième espèce :

$Pour\ x \in [-1,+1]$

$$Q^{\mu}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x) = \frac{\pi}{2Sin\left(\left(-\frac{1}{2}+i\tau+\mu\right)\pi\right)}\left(Cos\left(\left(-\frac{1}{2}+i\tau+\mu\right)\pi\right)P^{\mu}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x) - P^{\mu}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-x)\right)$$

$$-\frac{1}{Sin\left(\left(-\frac{1}{2}+i\tau+\mu\right)\pi\right)} = \frac{Cosh(\tau\pi)Cos(\mu\pi) + i\ Sinh(\tau\pi)Sin(\mu\pi)}{Cosh^2(\tau\pi) - Sin^2(\mu\pi)}$$

$$\frac{Cos\left(\left(-\frac{1}{2}+i\tau+\mu\right)\pi\right)}{Sin\left(\left(-\frac{1}{2}+i\tau+\mu\right)\pi\right)} = -\frac{Sin(\mu\pi)Cos(\mu\pi) + iSinh(\tau\pi)Cosh(\tau\pi)}{Cosh^2(\tau\pi) - Sin^2(\mu\pi)}$$

$$Q^{\mu}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x) = \frac{\pi}{2}\frac{\left(\begin{array}{l} -\left(Sin(\mu\pi)Cos(\mu\pi) + iSinh(\tau\pi)Cosh(\tau\pi)\right)P^{\mu}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x) + \\ +\left(Cosh(\tau\pi)Cos(\mu\pi) + i\ Sinh(\tau\pi)Sin(\mu\pi)\right)P^{\mu}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-x) \end{array}\right)}{Cosh^2(\tau\pi) - Sin^2(\mu\pi)}$$

En posant μ=0, on retrouve la formule de connexion pour la fonction conique de deuxième espèce :

$$Q^{0}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x) = \frac{\pi}{2Cosh(\tau\pi)}\left(-iSinh(\tau\pi)P^{0}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x) + P^{0}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-x)\right)$$

D'autres formules de liaison ne sont applicables que sur l'intervalle [-1,+1]

$x \in [-1,1] \quad \forall \mu \in \mathbf{R} \quad \forall \nu \in \mathbf{C}$

$$\pi\ Cos(\nu\pi)Cos(\mu\pi)P^{\mu}_{\nu}(x) = Sin((\nu+\mu)\pi)Q^{\mu}_{\nu}(x) - Sin((\nu-\mu)\pi)Q^{\mu}_{-\nu-1}(x)$$

$$\pi\ P_{\nu}(x) = Tan(\nu\pi)\left(Q_{\nu}(x) - Q_{-\nu-1}(x)\right)$$

$$\pi\ P_{\nu}(-x) = -Sin(\nu\pi)\left(Q_{\nu}(x) + Q_{-\nu-1}(x)\right)$$

Appliquée aux fonctions coniques de Mehler, il vient

$$\pi\ Cos(\nu\pi)Cos(\mu\pi)P^{\mu}_{\nu}(x) = Sin((\nu+\mu)\pi)Q^{\mu}_{\nu}(x) - Sin((\nu-\mu)\pi)Q^{\mu}_{-\nu-1}(x)$$

$$\nu = -\frac{1}{2}+i\tau \quad \mu = 0 \Rightarrow \pi\ i\ Sinh(\tau\pi)P^{0}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x) = -Cosh(\tau\pi)\left(Q^{0}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x) - Q^{0}_{-\frac{1}{2}-i\tau}(x)\right)$$

$$\Rightarrow P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x) = i\frac{Cotanh(\tau\pi)}{\pi}\left(Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x) - Q_{-\frac{1}{2}-i\tau}(x)\right)$$

$$\pi\ P_{\nu}(-x) = -Sin(\nu\pi)\left(Q_{\nu}(x) + Q_{-\nu-1}(x)\right) \Rightarrow P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-x) = \frac{Cosh(\tau\pi)}{\pi}\left(Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x) + Q_{-\frac{1}{2}-i\tau}(x)\right)$$

$$\nu = -\frac{1}{2}+i\tau \quad \mu \neq 0$$

$$Sin\left(\left(-\frac{1}{2}+i\tau+\mu\right)\pi\right) = -Cosh(\tau\pi)Cos(\mu\pi) + i\ Sinh(\tau\pi)Sin(\mu\pi) = -\frac{1}{2}\left(e^{\tau\pi}e^{-i\mu\pi} + e^{-\tau\pi}e^{i\mu\pi}\right)$$

$$Sin\left(\left(-\frac{1}{2}+i\tau-\mu\right)\pi\right) = -Cosh(\tau\pi)Cos(\mu\pi) - i\ Sinh(\tau\pi)Sin(\mu\pi) = -\frac{1}{2}\left(e^{\tau\pi}e^{i\mu\pi} + e^{-\tau\pi}e^{-i\mu\pi}\right)$$

$$\Rightarrow \pi\ i\ Sinh(\tau\pi)Cos(\mu\pi)P^{\mu}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x) = -\frac{1}{2}\left\{\left(e^{\tau\pi}e^{-i\mu\pi} + e^{-\tau\pi}e^{i\mu\pi}\right)Q^{\mu}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x) - \left(e^{\tau\pi}e^{i\mu\pi} + e^{-\tau\pi}e^{-i\mu\pi}\right)Q^{\mu}_{-\frac{1}{2}-i\tau}(x)\right\}$$

Il est facile de démontrer la valeur réelle de la fonction de première espèce, en utilisant la propriété miroir des fonctions de Legendre modifiées, en précisant que l'ordre μ est réel :

$$\left.\begin{array}{l} P_{\bar{\nu}}^{\mu}(\bar{z}) = \overline{P_{\nu}^{\mu}(z)} \\ P_{-\nu}^{\mu}(z) = P_{\nu-1}^{\mu}(z) \end{array}\right\} \Rightarrow \nu = -\frac{1}{2} + i\tau \rightarrow \bar{\nu} = -\frac{1}{2} - i\tau = -\left(\frac{1}{2} + i\tau\right) = -(\nu+1)$$

$$\overline{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{\mu}(x)} = P_{-\frac{1}{2}-i\tau}^{\mu}(x) = P_{\nu+1-1}^{\mu}(x) = P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{\mu}(x) \Rightarrow P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{\mu}(x) \quad réel$$

Rien qu'en utilisant les formules de liaisons, il est clair que le calcul de la fonction de Legendre de deuxième espèce (modifiée ou non) donne un résultat imaginaire.

Dans un premier temps, ne prenons que les fonctions coniques de Mehler, non modifiées. Il faut alors choisir une valeur réelle pour une fonction de deuxième espèce. Certains ont choisit cette dernière fonction, en prenant comme valeur à définir sa partie réelle. En effet à partir de la formule de liaison :

$$Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x) = \frac{\pi}{2\,Cosh(\tau\pi)}\left(P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-x) - i\,Sinh(\tau\pi) P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)\right)$$

Il vient :

$$\hat{Q}_{-\frac{1}{2}+i\nu}(x) = Re\left(Q_{-\frac{1}{2}+i\nu}(x)\right) = \frac{\pi}{2\,Cosh(\nu\pi)} P_{-\frac{1}{2}+i\nu}(-x)$$

$$\mathrm{Im}\left(Q_{-\frac{1}{2}+i\nu}(x)\right) = -\frac{\pi\,Sinh(\nu\pi)}{2\,Cosh(\nu\pi)} P_{-\frac{1}{2}+i\nu}(x)$$

Il est alors clair que la partie imaginaire étant proportionnelle à la fonction de première espèce, les deux fonctions choisis ne forment pas un système indépendant.

Pour la fonction conique modifiée de Mehler de deuxième espèce, on réalise la même manipulation en prenant la partie réelle, à partir de la formule de connexion :

$$Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{\mu}(x) = \frac{\pi}{2}\frac{\left(\begin{array}{l} -\left(Sin(\mu\pi)Cos(\mu\pi) + iSinh(\tau\pi)Cosh(\tau\pi)\right)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{\mu}(x) + \\ +\left(Cosh(\tau\pi)Cos(\mu\pi) + i\,Sinh(\tau\pi)Sin(\mu\pi)\right)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{\mu}(-x) \end{array}\right)}{Cosh^2(\tau\pi) - Sin^2(\mu\pi)}.$$

Il vient :

$$\mathrm{Re}\left(Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{\mu}(x)\right) = \frac{\pi}{2}\frac{\left(-Sin(\mu\pi)Cos(\mu\pi)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{\mu}(x) + Cosh(\tau\pi)Cos(\mu\pi)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{\mu}(-x)\right)}{Cosh^2(\tau\pi) - Sin^2(\mu\pi)}$$

$$\mathrm{Im}\left(Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{\mu}(x)\right) = \frac{\pi}{2}\frac{Sinh(\tau\pi)\left(-Cosh(\tau\pi)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{\mu}(x) + Sin(\mu\pi)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{\mu}(-x)\right)}{Cosh^2(\tau\pi) - Sin^2(\mu\pi)}$$

Mais cette fois-ci, la partie imaginaire n'est pas directement proportionnelle à la fonction de première espèce, elle est donc aussi un choix possible.

Dans un article de T.M.Dunster, « Conical functions with one or both parameters large », Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, 119A, 311-327, 1991, il est fait le choix de prendre comme fonction indépendante de deuxième espèce la fonction suivante :

$$\hat{Q}^{\mu}_{-\frac{1}{2}+i\tau} = \mathrm{Re}\left(e^{-\mu\pi i} Q^{\mu}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)\right) + \frac{\pi}{2} Sin(\mu\pi) P^{\mu}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)$$

Dans ce cas la formule de connexion avec les fonction coniques de première espèce est la suivante :

$$Q^{\mu}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x) = \frac{\pi}{2} \frac{\left(\begin{array}{l} -\left(Sin(\mu\pi)Cos(\mu\pi) + iSinh(\tau\pi)Cosh(\tau\pi)\right)P^{\mu}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x) + \\ +\left(Cosh(\tau\pi)Cos(\mu\pi) + i\ Sinh(\tau\pi)Sin(\mu\pi)\right)P^{\mu}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-x) \end{array}\right)}{Cosh^2(\tau\pi) - Sin^2(\mu\pi)}$$

$$\left(Cos(\mu\pi) - i\ Sin(\mu\pi)\right)\left(Sin(\mu\pi)Cos(\mu\pi) + iSinh(\tau\pi)Cosh(\tau\pi)\right) =$$
$$= Sin(\mu\pi)\left(Cos^2(\mu\pi) + Sinh(\tau\pi)Cosh(\tau\pi)\right) + iCos(\mu\pi)\left(Sinh(\tau\pi)Cosh(\tau\pi) - Sin^2(\mu\pi)\right)$$
$$\left(Cos(\mu\pi) - i\ Sin(\mu\pi)\right)\left(Cosh(\tau\pi)Cos(\mu\pi) + i\ Sinh(\tau\pi)Sin(\mu\pi)\right) =$$
$$= Cos^2(\mu\pi)Cosh(\tau\pi) + Sin^2(\mu\pi)Sinh(\tau\pi) + iSin(\mu\pi)\left(Sinh(\tau\pi)Cos(\mu\pi) - Cosh(\tau\pi)Cos(\mu\pi)\right)$$

$$\mathrm{Re}\left(e^{-\mu\pi i} Q^{\mu}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)\right) = \frac{\pi}{2} \frac{\left(\begin{array}{l} -Sin(\mu\pi)\left(Cos^2(\mu\pi) + Sinh(\tau\pi)Cosh(\tau\pi)\right)P^{\mu}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x) + \\ +\left(Cos^2(\mu\pi)Cosh(\tau\pi) + Sin^2(\mu\pi)Sinh(\tau\pi)\right)P^{\mu}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-x) \end{array}\right)}{Cosh^2(\tau\pi) - Sin^2(\mu\pi)}$$

Ce qui donne l'expression qui suit :

$$\Rightarrow \hat{Q}^{\mu}_{-\frac{1}{2}+i\tau} = \mathrm{Re}\left(e^{-\mu\pi i} Q^{\mu}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)\right) + \frac{\pi}{2} Sin(\mu\pi) P^{\mu}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x) =$$

$$= \frac{\pi}{2} \frac{\left(\begin{array}{l} -Sin(\mu\pi)\left(Cos^2(\mu\pi) + Sinh(\tau\pi)Cosh(\tau\pi)\right)P^{\mu}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x) + Sin(\mu\pi)\left(Cosh^2(\tau\pi) - Sin^2(\mu\pi)\right) \\ +\left(Cos^2(\mu\pi)Cosh(\tau\pi) + Sin^2(\mu\pi)Sinh(\tau\pi)\right)P^{\mu}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-x) \end{array}\right)}{Cosh^2(\tau\pi) - Sin^2(\mu\pi)}$$

$$= \frac{\pi}{2} \frac{\left(\begin{array}{l} Sin(\mu\pi)\left(Cosh^2(\tau\pi) - Sin^2(\mu\pi) - Cos^2(\mu\pi) - Sinh(\tau\pi)Cosh(\tau\pi)\right)P^{\mu}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x) + \\ +\left(e^{-\tau\pi}Cos^2(\mu\pi) + Sinh(\tau\pi)\right)P^{\mu}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-x) \end{array}\right)}{Cosh^2(\tau\pi) - Sin^2(\mu\pi)}$$

$$= \frac{\pi}{2} \frac{\left(Sin(\mu\pi)Sinh(\tau\pi)\left(Sinh(\tau\pi) - Cosh(\tau\pi)\right)P^{\mu}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x) + \left(e^{-\tau\pi}Cos^2(\mu\pi) + Sinh(\tau\pi)\right)P^{\mu}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-x)\right)}{Cosh^2(\tau\pi) - Sin^2(\mu\pi)}$$

$$\hat{Q}^{\mu}_{-\frac{1}{2}+i\tau} = \frac{\pi}{2} \frac{\left(-e^{-\tau\pi}Sin(\mu\pi)Sinh(\tau\pi)P^{\mu}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x) + \left(e^{-\tau\pi}Cos^2(\mu\pi) + Sinh(\tau\pi)\right)P^{\mu}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-x)\right)}{Cosh^2(\tau\pi) - Sin^2(\mu\pi)}$$

Ce qui est la formule donnée dans l'ouvrage « NIST handbook of Mathematical Functions, Legendre and Related Functions, 14.20, Conical (or Mehler) Functions » en changeant μ->-μ :

$$\hat{Q}^{-\mu}_{-\frac{1}{2}+i\tau} = \mathrm{Re}\left(e^{\mu\pi i}Q^{-\mu}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)\right) - \frac{\pi}{2}Sin(\mu\pi)P^{-\mu}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x) =$$

$$\hat{Q}^{-\mu}_{-\frac{1}{2}+i\tau} = \frac{\pi}{2}\frac{\left(e^{-\tau\pi}Sin(\mu\pi)Sinh(\tau\pi)P^{-\mu}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x) + \left(e^{-\tau\pi}Cos^2(\mu\pi) + Sinh(\tau\pi)\right)P^{-\mu}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-x)\right)}{Cosh^2(\tau\pi) - Sin^2(\mu\pi)}.$$

On note également le choix :

$$Q^{\mu}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x) = \frac{\pi}{2}\frac{\left(\begin{array}{l}-\left(Sin(\mu\pi)Cos(\mu\pi) + iSinh(\tau\pi)Cosh(\tau\pi)\right)P^{\mu}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x) + \\ +\left(Cosh(\tau\pi)Cos(\mu\pi) + i\ Sinh(\tau\pi)Sin(\mu\pi)\right)P^{\mu}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-x)\end{array}\right)}{Cosh^2(\tau\pi) - Sin^2(\mu\pi)}$$

$$\widetilde{Q}^{\mu}_{-\frac{1}{2}+i\tau} = \mathrm{Re}\left(Q^{\mu}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)\right)$$

$$\Rightarrow \widetilde{Q}^{\mu}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x) = \frac{\pi}{2}\frac{\left(-Sin(\mu\pi)Cos(\mu\pi)P^{\mu}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x) + Cosh(\tau\pi)Cos(\mu\pi)P^{\mu}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-x)\right)}{Cosh^2(\tau\pi) - Sin^2(\mu\pi)}.$$

Au passage les deux choix sont identiques avec les fonctions coniques de Mehler

$$\hat{Q}^{0}_{-\frac{1}{2}+i\tau} = \widetilde{Q}^{0}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x) = \mathrm{Re}\left(Q^{0}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)\right) = \frac{\pi}{2}\frac{P^{\mu}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-x)}{Cosh(\tau\pi)}.$$

Les Wronskiens des fonctions coniques de Mehler de première et deuxième espèce sur l'intervalle [-1,+1] choisis sont les suivants :

$$W\left\{P_\nu^\mu(x),P_\nu^\mu(-x)\right\}=\frac{2}{\Gamma(-\nu-\mu)\Gamma(\nu-\mu+1)(1-x^2)}\qquad W\left\{P_\nu^\mu(x),Q_\nu^\mu(x)\right\}=\frac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma(\nu-\mu+1)(1-x^2)}$$

$$\Rightarrow W\left\{P^\mu_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x),P^\mu_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-x)\right\}=\frac{2}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu-i\tau\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu+i\tau\right)(1-x^2)}$$

On sait que $F(\tau)=\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu-i\tau\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu+i\tau\right)$ *est à valeur réelle* $=\left|\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu-i\tau\right)\right|^2$

$$W\left\{P^\mu_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x),\hat{Q}^\mu_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)\right\}=\frac{\pi\left(e^{-\tau\pi}Cos^2(\mu\pi)+Sinh(\tau\pi)\right)}{\left(Cosh^2(\tau\pi)-Sin^2(\mu\pi)\right)\left|\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu-i\tau\right)\right|^2(1-x^2)}$$

$$W\left\{P^\mu_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x),\widetilde{Q}^\mu_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)\right\}=\frac{\pi\,Cosh(\tau\pi)Cos(\mu\pi)}{\left(Cosh^2(\tau\pi)-Sin^2(\mu\pi)\right)\left|\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu-i\tau\right)\right|^2(1-x^2)}$$

Puisque $\overline{F(\bar{\tau})}=F(\tau)=F(\bar{\tau})=\overline{F(\tau)}$ *par construction et propriété du miroir*

$$\Rightarrow W\left\{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x),P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-x)\right\}=\frac{2}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-i\tau\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\tau\right)(1-x^2)}\Leftarrow\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\tau\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-i\tau\right)=\left|\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu-i\tau\right)\right|^2=\frac{\pi}{Cosh(\pi\tau)}$$

$$\Rightarrow W\left\{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x),P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-x)\right\}=\frac{2Cosh(\pi\tau)}{\pi(1-x^2)}$$

$$W\left\{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x),\hat{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)\right\}=W\left\{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x),\widetilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)\right\}=W\left\{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x),Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)\right\}=\frac{1}{(1-x^2)}$$

.

Fonctions coniques de Mehler de première et deuxième espèce, avec un argument purement réel allant de [1,+∞], fonctions intervenant sur des problèmes aux limites sur des hyperboloïdes à deux nappes (iso-surfaces du système sphéroïdal allongé ou prolat)

Voir l'ouvrage « W.Magnus.F.Oberhettinger.R.P.Soni-Formulas and Theorems for the Special Functions of Mathematical Physics », section 4.2, page 164.

Sur l'intervalle [1,+∞), on ne va utiliser qu'une unique formule de liaison pour les fonctions coniques de Mehler, elle ne concerne plus la détermination des valeurs des fonctions pour des arguments inverses, puisque l'intervalle est uniquement positif. Il s'agit donc plutôt de relier les fonctions de première et deuxième espèce.

$$Pour\ x \in [+1,+\infty]$$
$$\forall \mu \in \mathbf{R} \quad \forall \nu \in \mathbf{C} \quad P_\nu^\mu(x) = P_{-\nu-1}^\mu(x)$$
$$Pour\ \ x \in [+1,+\infty]$$
$$P_\nu^{-\mu}(x) = \frac{e^{-\mu\pi i}}{Cos(\nu\pi)\Gamma(\nu+\mu+1)\Gamma(\mu-\nu)}\left(Q_{-\nu-1}^\mu(x) - Q_\nu^\mu(x)\right)$$
$$\nu = -\frac{1}{2} + i\tau \Rightarrow P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{-\mu}(x) = \frac{e^{-\mu\pi i}}{i\ Sinh(\tau\pi)\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}-i\tau\right)\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}+i\tau\right)}\left(Q_{-\frac{1}{2}-i\tau}^\mu(x) - Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}^\mu(x)\right)$$
$$\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}-i\tau\right)\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}+i\tau\right) = \left|\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}-i\tau\right)\right|^2$$
$$\Rightarrow P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{-\mu}(x) = \frac{ie^{-\mu\pi i}}{Sinh(\tau\pi)\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}+i\tau\right)\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}+i\tau\right)}\left(Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}^\mu(x) - Q_{-\frac{1}{2}-i\tau}^\mu(x)\right)$$
$$\Gamma(-\nu)\Gamma(\nu+1) = -\frac{\pi}{Sin(\nu\pi)} \Rightarrow \Gamma\left(\frac{1}{2}-i\tau\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\tau\right) = \left|\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\tau\right)\right|^2 = -\frac{\pi}{Sin\left(\left(-\frac{1}{2}+i\tau\right)\pi\right)} = \frac{\pi}{Cosh(\tau\pi)}$$
$$\Rightarrow P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{0}(x) = \frac{i}{Sinh(\tau\pi)\left|\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\tau\right)\right|^2}\left(Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}^0(x) - Q_{-\frac{1}{2}-i\tau}^0(x)\right) = \frac{iCotanh(\tau\pi)}{\pi}\left(Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}^0(x) - Q_{-\frac{1}{2}-i\tau}^0(x)\right)$$

Les valeurs des fonctions coniques de première espèce sont réelles en appliquant la formule miroir et la première formule de liaison sur les fonctions de première espèce

$$\left.\begin{array}{l} P_{\bar\nu}^\mu(x) = \overline{P_\nu^\mu(x)} \\ P_\nu^\mu(x) = P_{-\nu-1}^\mu(x) \end{array}\right\} \Rightarrow P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^\mu(x) = \overline{P_{-\frac{1}{2}-i\tau}^\mu(x)} = P_{-\frac{1}{2}-i\tau}^\mu(x) = \overline{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^\mu(x)}$$
$$\Rightarrow P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^\mu(x) \quad \textit{à valeur réelle}$$

La fonction conique de deuxième espèce quant à elle est à valeur imaginaire et sa partie imaginaire est proportionnelle à la fonction de première espèce :

$x \in [1,+\infty)$

$$P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x) = \frac{iCotanh(\tau\pi)}{\pi}\left(Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x) - Q_{-\frac{1}{2}-i\tau}(x)\right)$$

Propriété miroir de Q

$$Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x) = \overline{Q_{-\frac{1}{2}-i\tau}(x)} \Leftrightarrow Q_{-\frac{1}{2}-i\tau}(x) = \overline{Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)}$$

$$\Rightarrow P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x) = \frac{iCotanh(\tau\pi)}{\pi}\left(Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x) - \overline{Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)}\right) = -\frac{2Cotanh(\tau\pi)}{\pi}\mathrm{Im}\left(Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)\right)$$

$$\Rightarrow \mathrm{Im}\left(Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)\right) = -\frac{\pi}{2}Tanh(\tau\pi)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)$$

Donc comme auparavant dans l'intervalle [-1,+1] et pour des arguments réels, le choix d'une fonction indépendante de deuxième espèce, se réalise par exemple à partir de la partie réelle de de la fonction conique de deuxième espèce.

Certains auteurs comme par exemple dans l'article A.F.Ulitko « On a generalization of the integral transformation of Mehler-Fock », SOVIET APPLIED MECHANICS, Prikladnaya Mekhmnika, Vot. 3, No. 5, pp. 45-49, 1967», est introduit les deux fonctions de première et deuxième espèce :

$x = Cosh(\eta) \quad \eta \in [0,+\infty) \Rightarrow x \in [1,+\infty)$

$$P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x) = i\frac{Cotanh(\pi\tau)}{\pi}\left(Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x) - Q_{-\frac{1}{2}-i\tau}(x)\right) \qquad L_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x) = \frac{Cosh(\pi\tau)}{\pi}\left(Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x) + Q_{-\frac{1}{2}-i\tau}(x)\right)$$

Que l'on relie immédiatement aux parties réelles et imaginaires des fonctions coniques de deuxième espèce, et qui démontre que les deux fonctions introduites sont bien à valeur réelle.

$$L_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x) = \frac{Cosh(\pi\tau)}{\pi}\left(Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x) + Q_{-\frac{1}{2}-i\tau}(x)\right) = \frac{2Cosh(\pi\tau)}{\pi}\mathrm{Re}\left(Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)\right)$$

$$\Rightarrow Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x) = \frac{\pi}{2Cosh(\pi\tau)}\left\{L_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x) - iSinh(\pi\tau)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)\right\}$$

$$\mathrm{Re}\left(Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)\right) = \frac{\pi}{2Cosh(\pi\tau)}L_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x) \quad et \quad \mathrm{Im}\left(Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)\right) = -\frac{\pi}{2}Tanh(\tau\pi)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)$$

.

Les Wronskiens de ces diverses solutions sont :

$$x \in [1,+\infty], \forall \mu \in \mathbf{R} \quad \forall \nu \in \mathbf{C} \quad W\left\{P_\nu^\mu(x), Q_\nu^\mu(x)\right\} = -e^{\mu\pi i}\frac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma(\nu-\mu+1)(x^2-1)}$$

$$\Rightarrow W\left\{P^0_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x), Q^0_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)\right\} = \frac{1}{(1-x^2)} \Rightarrow W\left\{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x), L_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)\right\} = \frac{2Cosh(\pi\tau)}{\pi(1-x^2)}$$

.

Sur une définition différente des fonctions de Legendre associées définie sur l'intervalle [1,+∞) entre les ouvrages « W.Magnus.F.Oberhettinger.R.P.Soni-Formulas and Theorems for the Special Functions of Mathematical Physics », section 4.2, page 164. et « NIST handbook of Mathematical Functions, Legendre and Related Functions, page 362, (connection formulas 14.9.12 et 14.9.15)

Dans le présent document, on utilise la définition des fonctions de Legendre associées de deuxième espèce donnée par W.Magnus et F.Oberhettinger, et notamment les formules de connexion suivantes :

$$\begin{cases} P_\nu^\mu(x) = P_{-1-\nu}^\mu(x) \quad P_\nu^{-\mu}(x) = P_{-1-\nu}^{-\mu}(x) \\ P_\nu^{-\mu}(x) = \dfrac{e^{-i\mu\pi}}{Cos(\nu\pi)\Gamma(\nu+\mu+1)\Gamma(\mu-\nu)}\left(Q_{-\nu-1}^\mu(x) - Q_\nu^\mu(x)\right) \\ \Rightarrow Q_{-\nu-1}^\mu(x) - Q_\nu^\mu(x) = Cos(\nu\pi)e^{i\mu\pi}\Gamma(\nu+\mu+1)\Gamma(\mu-\nu)P_\nu^{-\mu}(x) \\ P_\nu^{-\mu}(x) = \dfrac{\Gamma(\nu-\mu+1)}{\Gamma(\nu+\mu+1)}\left\{P_\nu^\mu(x) - \dfrac{2}{\pi}e^{-i\mu\pi}Sin(\mu\pi)Q_\nu^\mu(x)\right\} \quad \mu \in \mathbf{R} \end{cases}.$$

Pour ce qui est des formules de connexion donnée dans l'ouvrage « NIST handbook of Mathematical Functions, Legendre and Related Functions », les voici, avec une notation spécifique mise en script gras:

$$\begin{cases} Cos(\nu\pi)P_\nu^{-\mu}(x) = \dfrac{\boldsymbol{Q}_{\nu-1}^\mu(x)}{\Gamma(\nu+\mu+1)} - \dfrac{\boldsymbol{Q}_\nu^\mu(x)}{\Gamma(\mu-\nu)} \\ \dfrac{2}{\pi}Sin(\mu\pi)\boldsymbol{Q}_\nu^\mu(x) = \dfrac{P_\nu^\mu(x)}{\Gamma(\nu+\mu+1)} - \dfrac{P_\nu^\mu(x)}{\Gamma(\nu-\mu+1)} \end{cases}.$$

Le lien entre les deux fonctions est d'ailleurs donné dans *« NIST handbook of Mathematical Functions, Legendre and Related Functions » à la page 354 formule 14.3.10, comme suit :*

$$\boldsymbol{Q}_\nu^\mu(x) = \frac{e^{-i\mu\pi}}{\Gamma(\nu+\mu+1)}Q_\nu^\mu(x) \quad \boldsymbol{Q}_{\nu-1}^\mu(x) = \frac{e^{-i\mu\pi}}{\Gamma(\mu-\nu)}Q_{-\nu-1}^\mu(x)$$

$$\Rightarrow P_\nu^{-\mu}(x) = \frac{e^{-i\mu\pi}}{Cos(\nu\pi)\Gamma(\nu+\mu+1)\Gamma(\mu-\nu)}\left(Q_{-\nu-1}^\mu(x) - Q_\nu^\mu(x)\right) = \frac{1}{Cos(\nu\pi)}\left(\frac{\boldsymbol{Q}_{\nu-1}^\mu(x)}{\Gamma(\nu+\mu+1)} - \frac{\boldsymbol{Q}_\nu^\mu(x)}{\Gamma(\mu-\nu)}\right)$$

$$P_\nu^{-\mu}(x) = \frac{\Gamma(\nu-\mu+1)}{\Gamma(\nu+\mu+1)}P_\nu^\mu(x) - \frac{2}{\pi}Sin(\mu\pi)\Gamma(\nu-\mu+1)\frac{e^{-i\mu\pi}}{\Gamma(\nu+\mu+1)}Q_\nu^\mu(x)$$

$$\Rightarrow \frac{P_\nu^{-\mu}(x)}{\Gamma(\nu-\mu+1)} = \frac{P_\nu^\mu(x)}{\Gamma(\nu+\mu+1)} - \frac{2}{\pi}Sin(\mu\pi)\boldsymbol{Q}_\nu^\mu(x)$$

$$\Rightarrow \frac{2}{\pi}Sin(\mu\pi)\boldsymbol{Q}_\nu^\mu(x) = \frac{P_\nu^\mu(x)}{\Gamma(\nu+\mu+1)} - \frac{P_\nu^{-\mu}(x)}{\Gamma(\nu-\mu+1)}$$

On peut donc voir comment se forme les deux versions des formules de connexion pour les fonctions de deuxième espèce.

Remarque : dans « NIST handbook of Mathematical Functions, Legendre and Related Functions », il aurait été plus opportun de choisir un autre symbole pour les fonctions hors de la coupure [-1,+1] comme le font W.Magnus et F.Oberhettinger en notation gothique (ici en script gras ne trouvant pas de fonte gothique disponible!).

Fonctions coniques de Mehler de première et deuxième espèce, avec un argument purement imaginaire allant de [-i ∞,+i ∞], fonctions intervenant sur des problèmes aux limites sur des hyperboloïdes à une nappe (iso-surfaces du système sphéroïdal aplati ou oblat)

(Voir les ouvrages « W.Magnus.F.Oberhettinger.R.P.Soni-Formulas and Theorems for the Special Functions of Mathematical Physics », section 4.2, page 164, ainsi que M.Abramovitz.I.A.Stegun-Handbook of Mathematical Functions, chapitre 8 Legendre Functions). La formule de connexion a lieu pour z=i x, x €[-i ∞,+i ∞] sur les fonctions de Legendre de première et deuxième espèce comme suit :

$$Pour\ z \in \mathbf{C}-[-\infty,+1]$$

$$\forall \mu \in \mathbf{R} \quad \forall \nu \in \mathbf{C} \quad P_\nu^\mu(z) = P_{-\nu-1}^\mu(z)$$

$$Pour \quad z \in \mathbf{C}-[-\infty,+1] \qquad P_\nu^{-\mu}(z) = \frac{e^{-\mu\pi i}}{Cos(\nu\pi)\Gamma(\nu+\mu+1)\Gamma(\mu-\nu)}\left(Q_{-\nu-1}^\mu(z) - Q_\nu^\mu(z)\right)$$

$$\nu = -\frac{1}{2}+i\tau \Rightarrow \begin{cases} P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{-\mu}(z) = \dfrac{ie^{-\mu\pi i}}{Sinh(\tau\pi)\left|\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}+i\tau\right)\right|^2}\left(Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}^\mu(z) - Q_{-\frac{1}{2}-i\tau}^\mu(z)\right) \\ P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{0}(z) = \dfrac{iCotanh(\tau\pi)}{\pi}\left(Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}^0(z) - Q_{-\frac{1}{2}-i\tau}^0(z)\right) \end{cases}$$

$$z = i\,x \Rightarrow \begin{cases} P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{-\mu}(i\,x) = \dfrac{ie^{-\mu\pi i}}{Sinh(\tau\pi)\left|\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}+i\tau\right)\right|^2}\left(Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}^\mu(i\,x) - Q_{-\frac{1}{2}-i\tau}^\mu(i\,x)\right) \\ P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{0}(i\,x) = \dfrac{iCotanh(\tau\pi)}{\pi}\left(Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}^0(i\,x) - Q_{-\frac{1}{2}-i\tau}^0(i\,x)\right) \end{cases}$$

Il s'ensuit les expressions suivantes, en introduisant la propriété miroir :

$$P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(i\,x) = \frac{iCotanh(\tau\pi)}{\pi}\left(Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(i\,x) - Q_{-\frac{1}{2}-i\tau}(i\,x)\right)$$

$$P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-i\,x) = \overline{P_{-\frac{1}{2}-i\tau}(i\,x)} = \overline{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(i\,x)} \qquad P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(i\,x) = \overline{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-i\,x)}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Re}\left(P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(i\,x)\right) = \mathrm{Re}\left(P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-i\,x)\right) = \mathrm{Re}\left(P_{-\frac{1}{2}-i\tau}(i\,x)\right) = \mathrm{Re}\left(P_{-\frac{1}{2}-i\tau}(-i\,x)\right)$$

$$Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-i\,x) = \overline{Q_{-\frac{1}{2}-i\tau}(i\,x)} \quad Q_{-\frac{1}{2}-i\tau}(-i\,x) = \overline{Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(i\,x)} \Rightarrow \mathrm{Im}\left(Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-i\,x)\right) = -\mathrm{Im}\left(Q_{-\frac{1}{2}-i\tau}(i\,x)\right)$$

$$\mathrm{Re}\left(P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(i\,x)\right) = \frac{1}{2}\left(P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(i\,x) + P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-i\,x)\right) = \frac{iCotanh(\tau\pi)}{2\pi}\left(Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(i\,x) - Q_{-\frac{1}{2}-i\tau}(i\,x) + Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-i\,x) - Q_{-\frac{1}{2}-i\tau}(-i\,x)\right)$$

$$\mathrm{Re}\left(P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(i\,x)\right) = \begin{cases} -\dfrac{Cotanh(\tau\pi)}{\pi}\left(\mathrm{Im}\left(Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(i\,x)\right) - \mathrm{Im}\left(Q_{-\frac{1}{2}-i\tau}(i\,x)\right)\right) \\ -\dfrac{Cotanh(\tau\pi)}{\pi}\left(\mathrm{Im}\left(Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(i\,x) + Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-i\,x)\right)\right) \end{cases}$$

$$\mathrm{Im}\left(P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(i\,x)\right) = \frac{1}{2i}\left(P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(i\,x) - P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-i\,x)\right) = \frac{iCotanh(\tau\pi)}{2i\pi}\left(Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(i\,x) + Q_{-\frac{1}{2}-i\tau}(-i\,x) - \left(Q_{-\frac{1}{2}-i\tau}(i\,x) + Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-i\,x)\right)\right)$$

$$\mathrm{Im}\left(P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(i\,x)\right) = \begin{cases} \dfrac{Cotanh(\tau\pi)}{\pi}\left(\mathrm{Re}\left(Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(i\,x) - Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-i\,x)\right)\right) \\ \dfrac{Cotanh(\tau\pi)}{\pi}\left(\mathrm{Re}\left(Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(i\,x)\right) - \mathrm{Re}\left(Q_{-\frac{1}{2}-i\tau}(i\,x)\right)\right) \end{cases}$$

.

Il s'ensuit les relations entre les combinaisons linéaire suivantes :

$$\mathrm{Re}\left(P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix)\right)=-\frac{Cotanh(\tau\pi)}{\pi}\mathrm{Im}\left(Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix)+Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ix)\right)$$

$$\mathrm{Re}\left(P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ix)\right)=-\frac{Cotanh(\tau\pi)}{\pi}\mathrm{Im}\left(Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ix)+Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix)\right)$$

$$\Rightarrow \mathrm{Re}\left(\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix)+P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ix)}{2}\right)=-\frac{Cotanh(\tau\pi)}{\pi}\mathrm{Im}\left(Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix)+Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ix)\right)$$

$$\mathrm{Im}\left(P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix)\right)=\frac{Cotanh(\tau\pi)}{\pi}\mathrm{Re}\left(Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix)-Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ix)\right)$$

$$\mathrm{Im}\left(P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ix)\right)=\frac{Cotanh(\tau\pi)}{\pi}\mathrm{Re}\left(Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ix)-Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix)\right)$$

$$\Rightarrow \mathrm{Re}\left(\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix)-P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ix)}{2i}\right)=\mathrm{Im}\left(\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix)-P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ix)}{2}\right)=\frac{Cotanh(\tau\pi)}{\pi}\mathrm{Re}\left(Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix)-Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ix)\right)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix)+P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ix)}{2}=-\dfrac{Cotanh(\tau\pi)}{\pi}\mathrm{Im}\left(Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix)+Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ix)\right)\\[2ex]\dfrac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix)-P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ix)}{2i}=\dfrac{Cotanh(\tau\pi)}{\pi}\mathrm{Re}\left(Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix)-Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ix)\right)\end{cases}$$

Les fonctions coniques de première espèce d'argument purement imaginaires opposées, ainsi que la fonction de deuxième espèce d'argument purement imaginaire forment une système de fonctions indépendantes deux à deux :

$$P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix),P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ix),Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix)$$

Ces deux fonctions sont néanmoins à valeur imaginaire, aussi il est peut être utile de bénéficier d'un système de fonctions à valeur réelle. C'est la raison pour laquelle dans certains articles il est introduit les fonctions suivantes qui sont à valeur réelle :

$$F_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)=\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix)+P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ix)}{2}\qquad G_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)=\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix)-P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ix)}{2i}$$

Il suffit d'utiliser la propriété miroir des fonctions coniques de première espèce pour le démontrer, on établit également le lien avec les fonctions de deuxième espèce :

$$Propriété\ Miroir\ P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ix)=\overline{P_{-\frac{1}{2}-i\tau}(ix)}=\overline{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix)}$$

$$F_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)=\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix)+P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ix)}{2}=\mathrm{Re}\left(P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix)\right)\Rightarrow F_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)\quad valeur\ réelle$$

$$G_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)=\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix)-P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ix)}{2i}=\mathrm{Im}\left(P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix)\right)\Rightarrow G_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)\quad valeur\ réelle$$

Une liaison de ces deux fonctions F et G peut être réalisé avec les fonctions de deuxième espèce, comme suit :

$$F_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)=-\frac{Cotanh(\tau\pi)}{\pi}\mathrm{Im}\left(Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(i\,x)+Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-i\,x)\right)\qquad G_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)=\frac{Cotanh(\tau\pi)}{\pi}\mathrm{Re}\left(Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(i\,x)-Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-i\,x)\right)$$

Pour parfaire les relations de liaisons on introduit les formules suivantes également données dans les deux ouvrages en référence :

$$Pour\quad z\in\mathbf{C}-[-\infty,+1]$$

$$\begin{cases} Si\quad \mathrm{Im}(z)>0\quad Q_\nu^\mu(z)=\dfrac{\pi\,e^{\mu\pi i}}{2Sin(\pi(\nu+\mu))}\left(e^{-i\pi\nu}P_\nu^\mu(z)-P_\nu^\mu(-z)\right)\\ Si\quad \mathrm{Im}(z)<0\quad Q_\nu^\mu(z)=\dfrac{\pi\,e^{\mu\pi i}}{2Sin(\pi(\nu+\mu))}\left(e^{+i\pi\nu}P_\nu^\mu(z)-P_\nu^\mu(-z)\right)\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} Si\quad \mathrm{Im}(z)>0\quad Q_\nu^0(z)=\dfrac{\pi}{2Sin(\pi\nu)}\left(e^{-i\pi\nu}P_\nu^0(z)-P_\nu^0(-z)\right)\\ Si\quad \mathrm{Im}(z)<0\quad Q_\nu^0(z)=\dfrac{\pi}{2Sin(\pi\nu)}\left(e^{+i\pi\nu}P_\nu^0(z)-P_\nu^0(-z)\right)\end{cases}$$

$$\begin{cases} Si\quad \mathrm{Im}(z)>0\quad Q_\nu^\mu(-z)=-e^{i\pi\nu}Q_\nu^\mu(z)\\ Si\quad \mathrm{Im}(z)<0\quad Q_\nu^\mu(-z)=-e^{-i\pi\nu}Q_\nu^\mu(z)\end{cases}\Rightarrow x\in[0,+\infty]\quad z=i\,x\quad Q_\nu^\mu(-i\,x)=-e^{i\pi\nu}Q_\nu^\mu(i\,x)$$

$$x\in[0,+\infty]\quad z=i\,x\Rightarrow Q_\nu(i\,x)=\frac{\pi}{2Sin(\pi\nu)}\left(e^{-i\pi\nu}P_\nu(i\,x)-P_\nu(-i\,x)\right)$$

En utilisant ces formules pour les fonctions coniques, il vient :

$$\nu=-\frac{1}{2}+i\tau\Rightarrow\begin{cases} Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(i\,x)=\dfrac{\pi}{2Cosh(\tau\pi)}\left(-ie^{\pi\tau}P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(i\,x)+P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-i\,x)\right)\\ Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-i\,x)=ie^{-\pi\tau}Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(i\,x)\end{cases}$$

Et l'on peut relier les fonctions F et G aux fonctions de première et deuxième espèce comme suit :

$$\begin{cases} Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(i\,x) = \dfrac{\pi}{2Cosh(\tau\pi)}\left(-ie^{\pi\tau}P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(i\,x) + P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-i\,x)\right) \\ Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-i\,x) = ie^{-\pi\tau}Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(i\,x) \end{cases}$$

$$F_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x) = -\frac{Cotanh(\tau\pi)}{\pi}\,\mathrm{Im}\left(\left(1+ie^{-\pi\tau}\right)Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(i\,x)\right)$$

$$G_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x) = \frac{Cotanh(\tau\pi)}{\pi}\,\mathrm{Re}\left(\left(1-ie^{-\pi\tau}\right)Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(i\,x)\right)$$

$$\mathrm{Im}\left(\left(1+ie^{-\pi\tau}\right)Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(i\,x)\right) = \mathrm{Im}\left(Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(i\,x)\right) + \mathrm{Im}\left(ie^{-\pi\tau}Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(i\,x)\right) = \mathrm{Im}\left(Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(i\,x)\right) + e^{-\pi\tau}\,\mathrm{Re}\left(Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(i\,x)\right)$$

$$\mathrm{Re}\left(\left(1-ie^{-\pi\tau}\right)Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(i\,x)\right) = \mathrm{Re}\left(Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(i\,x)\right) - \mathrm{Re}\left(ie^{-\pi\tau}Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(i\,x)\right) = \mathrm{Re}\left(Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(i\,x)\right) + e^{-\pi\tau}\,\mathrm{Im}\left(Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(i\,x)\right)$$

$$\begin{cases} \mathrm{Im}\left(Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(i\,x)\right) + e^{-\pi\tau}\,\mathrm{Re}\left(Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(i\,x)\right) = -\dfrac{\pi}{Cotanh(\tau\pi)}F_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x) & (1) \\ e^{+\pi\tau}\,\mathrm{Im}\left(Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(i\,x)\right) + \mathrm{Re}\left(Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(i\,x)\right) = -\dfrac{\pi\,e^{+\pi\tau}}{Cotanh(\tau\pi)}F_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x) & (2) \\ \mathrm{Re}\left(Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(i\,x)\right) + e^{-\pi\tau}\,\mathrm{Im}\left(Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(i\,x)\right) = \dfrac{\pi}{Cotanh(\tau\pi)}G_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x) & (3) \\ e^{+\pi\tau}\,\mathrm{Re}\left(Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(i\,x)\right) + \mathrm{Im}\left(Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(i\,x)\right) = \dfrac{\pi\,e^{+\pi\tau}}{Cotanh(\tau\pi)}G_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x) & (4) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (4)-(1) \Rightarrow \mathrm{Re}\left(Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(i\,x)\right) = \dfrac{\pi}{2Cosh(\tau\pi)}\left(e^{+\pi\tau}G_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x) + F_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)\right) \\ (2)-(3) \Rightarrow \mathrm{Im}\left(Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(i\,x)\right) = -\dfrac{\pi}{2Cosh(\tau\pi)}\left(e^{+\pi\tau}F_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x) + G_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix) = \mathrm{Re}\left(Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(i\,x)\right) + i\,\mathrm{Im}\left(Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(i\,x)\right)$$

$$\Rightarrow Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix) = \frac{\pi}{2Cosh(\tau\pi)}\left(\left(e^{+\pi\tau}G_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x) + F_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)\right) - i\left(e^{+\pi\tau}F_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x) + G_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)\right)\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix) = \dfrac{\pi}{2Cosh(\tau\pi)}\left(\left(1-ie^{+\pi\tau}\right)F_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x) + \left(e^{+\pi\tau}-i\right)G_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)\right) \\ P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix) = F_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x) + iG_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x) \\ P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ix) = F_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x) - iG_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x) \end{cases}$$

.

Les Wronskiens des diverses fonctions introduites sont les suivants :

$$W\left\{P^{\mu}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix),Q^{\mu}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix)\right\}=ie^{\mu\pi i}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\tau+\mu\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\tau-\mu\right)\left(1+x^2\right)}\quad W\left\{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix),Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix)\right\}=\frac{i}{\left(1+x^2\right)}$$

$$W\left\{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix),P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ix)\right\}=\frac{2iCosh(\pi\tau)}{\pi\left(1+x^2\right)}$$

$$W\left\{F_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x),G_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)\right\}=\frac{1}{4i}W\left\{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix)+P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ix),P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix)-P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ix)\right\}$$

$$=\frac{1}{4i}\left[W\left\{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ix),P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix)\right\}-W\left\{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix),P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ix)\right\}\right]=\frac{1}{2i}W\left\{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ix),P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix)\right\}$$

$$\Rightarrow W\left\{F_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x),G_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)\right\}=-\frac{Cosh(\pi\tau)}{\pi\left(1+x^2\right)}\neq 0$$

.

Fonctions de Legendre de première et deuxième espèce, d'ordre réel, avec un argument purement imaginaire allant de [-i ∞,+i ∞], fonctions intervenant sur des problèmes aux limites sur des hyperboloïdes à une nappe (iso-surfaces du système sphéroïdal aplati ou oblat)

(Voir les ouvrages « W.Magnus.F.Oberhettinger.R.P.Soni-Formulas and Theorems for the Special Functions of Mathematical Physics », section 4.2, page 164, ainsi que M.Abramovitz.I.A.Stegun-Handbook of Mathematical Functions, chapitre 8 Legendre Functions)

La formule de connexion a lieu pour z=i x, x €[-i ∞,+i ∞] sur les fonctions de Legendre de première et deuxième espèce comme suit :

$$Pour\ z \in \mathbf{C} - [-\infty,+1]$$

$$\forall \mu \in \mathbf{R} \quad \forall \nu \in \mathbf{C} \quad P_\nu^\mu(z) = P_{-\nu-1}^\mu(z)$$

$$Pour \quad z \in \mathbf{C} - [-\infty,+1] \qquad P_\nu^{-\mu}(z) = \frac{e^{-\mu\pi i}}{Cos(\nu\pi)\Gamma(\nu+\mu+1)\Gamma(\mu-\nu)}\left(Q_{-\nu-1}^\mu(z) - Q_\nu^\mu(z)\right)$$

$$\mu = 0 \Rightarrow P_\nu^0(z) = \frac{1}{Cos(\nu\pi)\Gamma(\nu+1)\Gamma(-\nu)}\left(Q_{-\nu-1}^0(z) - Q_\nu^0(z)\right)$$

$$\Gamma(\nu+1)\Gamma(-\nu) = -\frac{\pi}{Sin(\nu\pi)} \Rightarrow P_\nu(z) = -\frac{Tan(\nu\pi)}{\pi}\left(Q_{-\nu-1}(z) - Q_\nu(z)\right)$$

$$z = i\,x \Rightarrow P_\nu(i\,x) = \frac{Tan(\nu\pi)}{\pi}\left(Q_\nu(i\,x) - Q_{-\nu-1}(i\,x)\right)$$

Pour parfaire les relations de liaisons on introduit les formules suivantes également données dans les deux ouvrages en référence :

$$Pour \quad z \in \mathbf{C} - [-\infty,+1] \qquad \begin{cases} Si \quad \mathrm{Im}(z) > 0 \quad Q_\nu^\mu(z) = \dfrac{\pi\, e^{\mu\pi i}}{2Sin(\pi(\nu+\mu))}\left(e^{-i\pi\nu} P_\nu^\mu(z) - P_\nu^\mu(-z)\right) \\ Si \quad \mathrm{Im}(z) < 0 \quad Q_\nu^\mu(z) = \dfrac{\pi\, e^{\mu\pi i}}{2Sin(\pi(\nu+\mu))}\left(e^{+i\pi\nu} P_\nu^\mu(z) - P_\nu^\mu(-z)\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Si \quad \mathrm{Im}(z) > 0 \quad Q_\nu^0(z) = \dfrac{\pi}{2Sin(\pi\nu)}\left(e^{-i\pi\nu} P_\nu^0(z) - P_\nu^0(-z)\right) \\ Si \quad \mathrm{Im}(z) < 0 \quad Q_\nu^0(z) = \dfrac{\pi}{2Sin(\pi\nu)}\left(e^{+i\pi\nu} P_\nu^0(z) - P_\nu^0(-z)\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} Si \quad \mathrm{Im}(z) > 0 \quad Q_\nu^\mu(-z) = -e^{i\pi\nu} Q_\nu^\mu(z) \\ Si \quad \mathrm{Im}(z) < 0 \quad Q_\nu^\mu(-z) = -e^{-i\pi\nu} Q_\nu^\mu(z) \end{cases}$$

$$x \in [0,+\infty] \quad z = i\,x \Rightarrow \begin{cases} Q_\nu(i\,x) = \dfrac{\pi}{2Sin(\pi\nu)}\left(e^{-i\pi\nu} P_\nu(i\,x) - P_\nu(-i\,x)\right) \\ Q_\nu(-i\,x) = -e^{i\pi\nu} Q_\nu(i\,x) \end{cases}$$

Les fonctions coniques de première espèce d'argument purement imaginaires opposées, ainsi que la fonction de deuxième espèce d'argument purement imaginaire forment une système de fonctions indépendantes deux à deux : $P_\nu(ix), P_\nu(-ix), Q_\nu(ix)$. *Ces deux fonctions sont néanmoins à valeur imaginaire, aussi il est peut être utile de bénéficier d'un système de fonctions à valeur réelle.*

C'est la raison pour laquelle on peut introduire les fonctions suivantes qui sont à valeur réelle :

$$F_\nu(x)=\frac{P_\nu(ix)+P_\nu(-ix)}{2}\quad G_\nu(x)=\frac{P_\nu(ix)-P_\nu(-ix)}{2i}$$

Il suffit d'utiliser la propriété miroir des fonctions coniques de première espèce pour le démontrer :

$$\textit{Propriété Miroir } P_\nu(-ix)=\overline{P_\nu(ix)}\Rightarrow\begin{cases}F_\nu(x)=\dfrac{P_\nu(ix)+P_\nu(-ix)}{2}=\mathrm{Re}(P_\nu(ix))\Rightarrow F_\nu(x)\quad \textit{valeur réelle}\\ G_\nu(x)=\dfrac{P_\nu(ix)-P_\nu(-ix)}{2i}=\mathrm{Im}(P_\nu(ix))\Rightarrow G_\nu(x)\quad \textit{valeur réelle}\end{cases}$$

$$\Rightarrow P_\nu(ix)=F_\nu(x)+i\,G_\nu(x)\quad P_\nu(-ix)=F_\nu(x)-i\,G_\nu(x)$$

On établit également le lien des deux fonctions F et G avec les fonctions de deuxième espèce :

$$Q_\nu(i\,x)=\frac{\pi}{2Sin(\pi\nu)}\left(e^{-i\pi\nu}(F_\nu(x)+iG_\nu(x))-(F_\nu(x)-iG_\nu(x))\right)$$

$$\Rightarrow Q_\nu(i\,x)=\frac{\pi}{2Sin(\pi\nu)}\left((e^{-i\pi\nu}-1)F_\nu(x)+i(e^{-i\pi\nu}+1)G_\nu(x)\right)$$

Les Wronskiens des diverses fonctions introduites sont les suivants :

$$W\left\{P_\nu^\mu(ix),Q^\mu_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix)\right\}=ie^{\mu\pi i}\frac{\Gamma(\nu+1+\mu)}{\Gamma(\nu+1-\mu)(1+x^2)}\quad W\{P_\nu(ix),Q_\nu(ix)\}=\frac{i}{(1+x^2)}$$

$$W\{P_\nu(ix),P_\nu(-ix)\}=\frac{2i}{\Gamma(-\nu)\Gamma(\nu+1)(1+x^2)}=-\frac{2i\,Sin(\pi\,\nu)}{\pi(1+x^2)}$$

$$W\left\{F_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x),G_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)\right\}=\frac{1}{4i}W\left\{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix)+P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ix),P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix)-P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ix)\right\}$$

$$=\frac{1}{4i}\left[W\left\{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ix),P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix)\right\}-W\left\{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix),P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ix)\right\}\right]=\frac{1}{2i}W\left\{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-ix),P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ix)\right\}$$

$$\Rightarrow W\left\{F_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x),G_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)\right\}=-\frac{Cosh(\pi\tau)}{\pi(1+x^2)}\neq 0$$

Développement en série et dérivées paramétriques de la fonction conique de Mehler de première espèce

Le développement en série de la fonction de Legendre suivant est également utilisé pour obtenir celui des diverses dérivées paramétriques :

$$P_\nu(z)=\sum_{n=0}^{n=+\infty}\frac{\Gamma(\nu+1+n)\Gamma(n-\nu)}{\Gamma(-\nu)\Gamma(\nu+1)(n!)^2}\left(\frac{1-z}{2}\right)^n=-\frac{Sin(\nu\,\pi)}{\pi}\sum_{n=0}^{n=+\infty}\frac{\Gamma(\nu+1+n)\Gamma(n-\nu)}{(n!)^2}\left(\frac{1-z}{2}\right)^n$$

$$\frac{\partial P_\nu(z)}{\partial\nu}=-\frac{Sin(\nu\,\pi)}{\pi}\sum_{n=1}^{n=+\infty}\frac{\Gamma(\nu+1+n)\Gamma(n-\nu)}{(n!)^2}\{\psi(\nu+1+n)-\psi(\nu+1-n)\}\left(\frac{1-z}{2}\right)^n$$

$$\frac{\partial^2 P_\nu(z)}{\partial z\partial\nu}=\frac{Sin(\nu\,\pi)}{2\pi}\sum_{n=1}^{n=+\infty}n\frac{\Gamma(\nu+1+n)\Gamma(n-\nu)}{(n!)^2}\{\psi(\nu+1+n)-\psi(\nu+1-n)\}\left(\frac{1-z}{2}\right)^{n-1}$$

Ces développements en série sont valables autant dans l'intervalle [-1,+1], que sur l'intervalle [1,+∞]. Appliquées ces formules sur les fonctions coniques de Mehler, il vient :

$$\nu=-\frac{1}{2}+i\,\tau\Rightarrow\frac{\partial P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(z)}{\partial\nu}=-i\frac{\partial P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(z)}{\partial\tau}\Rightarrow\frac{\partial P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(z)}{\partial\tau}=i\frac{\partial P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(z)}{\partial\nu}\quad et\quad\frac{\partial^2 P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(z)}{\partial z\partial\tau}=i\frac{\partial^2 P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(z)}{\partial z\partial\nu}$$

$$P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(z)=\frac{Cosh(\pi\,\tau)}{\pi}\sum_{n=0}^{n=+\infty}\frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}+i\,\tau\right)\Gamma\left(n+\frac{1}{2}-i\,\tau\right)}{(n!)^2}\left(\frac{1-z}{2}\right)^n=\frac{Cosh(\pi\,\tau)}{\pi}\sum_{n=0}^{n=+\infty}\frac{\left|\Gamma\left(n+\frac{1}{2}+i\,\tau\right)\right|^2}{(n!)^2}\left(\frac{1-z}{2}\right)^n$$

$$\frac{\partial P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(z)}{\partial\tau}=i\frac{Cosh(\pi\,\tau)}{\pi}\sum_{n=1}^{n=+\infty}\frac{\left|\Gamma\left(n+\frac{1}{2}+i\,\tau\right)\right|^2}{(n!)^2}\left\{\psi\left(\frac{1}{2}+i\,\tau+n\right)-\psi\left(\frac{1}{2}+i\,\tau-n\right)\right\}\left(\frac{1-z}{2}\right)^n$$

$$\frac{\partial^2 P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(z)}{\partial z\partial\tau}=-i\frac{Cosh(\pi\,\tau)}{2\pi}\sum_{n=1}^{n=+\infty}n\frac{\left|\Gamma\left(n+\frac{1}{2}+i\,\tau\right)\right|^2}{(n!)^2}\left\{\psi\left(\frac{1}{2}+i\,\tau+n\right)-\psi\left(\frac{1}{2}+i\,\tau-n\right)\right\}\left(\frac{1-z}{2}\right)^{n-1}$$

Développement en série et dérivées paramétriques de la fonction conique de Mehler de deuxième espèce

Pour les fonctions Q de Legendre, on développe les dérivées premières du paramètre réel v selon les deux formules suivantes :

$$(F1)\Rightarrow\left(\begin{array}{l}\dfrac{\partial Q_\nu(z)}{\partial\nu}=\pi\dfrac{Cos(\pi\nu)}{Sin(\pi\nu)}Q_\nu(z)-\psi^{(1)}(\nu+1)P_\nu(z)-\\ -\dfrac{Sin(\pi\nu)}{\pi}\displaystyle\sum_{n=0}^{n=\infty}\dfrac{\Gamma(n-\nu)\Gamma(n+\nu+1)}{(n!)^2}\left(\dfrac{1}{2}Log\left(\dfrac{1+z}{1-z}\right)+\psi(n+1)-\psi(\nu+1)\right)\left(\psi(n+\nu+1)-\psi(n-\nu)\right)\left(\dfrac{1-z}{2}\right)^n\end{array}\right.$$

$$(F2)\Rightarrow\left(\begin{array}{l}A_\nu(z)=Sin(\pi\nu)\displaystyle\sum_{n=0}^{n=\infty}\dfrac{\Gamma(n-\nu)\Gamma(n+\nu+1)}{\Gamma(n+1)\,n!}\left(\psi(n+\nu+1)-\psi(n-\nu)\right)\left(\dfrac{1-z}{2}\right)^n\\ \dfrac{\partial Q_\nu(z)}{\partial\nu}=-\dfrac{\pi^2}{2}P_\nu(z)-\dfrac{Cos(\pi\nu)}{2Sin(\pi\nu)}A_\nu(z)+\dfrac{1}{2Sin(\pi\nu)}A_\nu(-z)\end{array}\right.$$

$\forall\,\nu>0\in\Re\,,\nu\notin\mathbf{Z}\quad tel\ que\left|\dfrac{1-z}{2}\right|<1$

où $(\alpha)_n$ *est le symbole de Pochhammer* $(\alpha)_n=\alpha\,(\alpha+1)\,\cdots(\alpha+n\text{-}1)=\dfrac{\Gamma(\alpha+\mathrm{n})}{\Gamma(\alpha)}$ $\Gamma(l)$ *fonction Gamma*

$\psi(\alpha)$ *fonction Digamma dérivée logarithmique de la fonction Gamma* $\Leftarrow\psi(\alpha)=\dfrac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}$

$\psi^{(1)}(\alpha)$ *dérivée première de la fonction Digamma*

Cela donne pour les fonctions coniques, les deux formules suivantes :

$$\nu=-\frac{1}{2}+i\tau\qquad\frac{\partial Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(z)}{\partial\tau}=i\frac{\partial Q_\nu(z)}{\partial\nu}\qquad Cos(\pi\nu)=iSinh(\pi\tau)\qquad Sin(\pi\nu)=-Cosh(\pi\tau)$$

$$(F1)\Rightarrow\left(\frac{\partial Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(z)}{\partial\tau}=\left\{\begin{array}{l}\pi\dfrac{Sinh(\pi\tau)}{Cosh(\pi\tau)}Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(z)-i\psi^{(1)}\left(\dfrac{1}{2}+i\tau\right)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(z)+\\ +i\dfrac{Cosh(\pi\tau)}{\pi}\displaystyle\sum_{n=0}^{n=\infty}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}-i\tau\right)\Gamma\left(n+\frac{1}{2}+i\tau\right)}{(n!)^2}\left(\dfrac{1}{2}Log\left(\dfrac{1+z}{1-z}\right)+\psi(n+1)-\psi\left(\dfrac{1}{2}+i\tau\right)\right)\times\\ \times\left(\psi\left(n+\dfrac{1}{2}+i\tau\right)-\psi\left(n+\dfrac{1}{2}-i\tau\right)\right)\left(\dfrac{1-z}{2}\right)^n\end{array}\right.\end{array}\right.\right)$$

$$(F2)\Rightarrow\left(\begin{array}{l}A_\tau(z)=Cosh(\pi\tau)\displaystyle\sum_{n=0}^{n=\infty}\dfrac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}-i\tau\right)\Gamma\left(n+\frac{1}{2}+i\tau\right)}{(n!)^2}\left(\psi\left(n+\dfrac{1}{2}-i\tau\right)-\psi\left(n+\dfrac{1}{2}+i\tau\right)\right)\left(\dfrac{1-z}{2}\right)^n\\ \dfrac{\partial Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(z)}{\partial\tau}=-\left\{\dfrac{Sinh(\pi\tau)}{2Cosh(\pi\tau)}A_\tau(z)+i\dfrac{1}{2Cosh(\pi\tau)}A_\tau(-z)+i\dfrac{\pi^2}{2}P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(z)\right\}\end{array}\right.$$

.

Combinaison réelle de fonctions de Legendre utilisée dans les problèmes aux limites axi-symétrique sur l'hyperboloïde à deux nappes

Démontrons la réalité de la combinaison suivante : $Q_\nu(x_0)P_\nu(x)-Q_\nu(x)P_\nu(x_0) \quad pour \quad \nu=-\frac{1}{2}+i\tau$ ·

Soit :

$$\begin{cases} P_\nu(x)=P_{-1-\nu}(x) \quad \Gamma(\nu+1)\Gamma(-\nu)=-\dfrac{\pi}{Sin(\nu\pi)} \\ P_\nu(x)=-\dfrac{Tan(\nu\pi)}{\pi}(Q_{-1-\nu}(x)-Q_\nu(x)) \end{cases}$$

$$P_\nu(x)=P_{-1-\nu}(x)=P_{\bar{\nu}}(x)=\overline{P_\nu(x)}\Rightarrow P_\nu(x) \quad réel$$

$$\begin{cases} Tan((\nu+1)\pi)=Tan(\nu\pi) \\ Tan(\nu\pi)=\overline{Tan(\bar{\nu}\pi)}=-\overline{Tan((\nu+1)\pi)}=-\overline{Tan(\nu\pi)}\Rightarrow Tan(\nu\pi)\in\mathbf{C} \\ Cos(\nu\pi)=\overline{Cos(\bar{\nu}\pi)}=\overline{Cos((\nu+1)\pi)}=-\overline{Cos(\nu\pi)}\in\mathbf{C} \\ Sin(\nu\pi)=\overline{Sin(\bar{\nu}\pi)}=-\overline{Sin((\nu+1)\pi)}=\overline{Sin(\nu\pi)}\in\mathbf{R} \end{cases}$$

$$Q_{-1-\nu}(x)-Q_\nu(x)=-P_\nu(x)\frac{\pi}{Tan(\nu\pi)}\Rightarrow Q_{-1-\nu}(x)-Q_\nu(x) \quad imaginaire$$

$$Q_\nu(x_0)P_\nu(x)-Q_\nu(x)P_\nu(x_0) \quad tq \quad \nu=-\frac{1}{2}+i\tau \quad soit \quad \bar{\nu}=-\frac{1}{2}-i\tau=-\nu-1$$

$$Miroir\ Q_\nu(x)=\overline{Q_{\bar{\nu}}(x)}=\overline{Q_{-1-\nu}(x)}\Rightarrow\overline{Q_\nu(x)}=Q_{-1-\nu}(x)$$

$$z=Q_\nu(x_0)P_\nu(x)-Q_\nu(x)P_\nu(x_0)\Rightarrow\bar{z}=\overline{Q_\nu(x_0)}P_\nu(x)-\overline{Q_\nu(x)}P_\nu(x_0)=Q_{-1-\nu}(x_0)P_\nu(x)-Q_{-1-\nu}(x)P_\nu(x_0)$$
$$=(Q_{-1-\nu}(x_0)-Q_\nu(x_0))P_\nu(x)-(Q_{-1-\nu}(x)-Q_\nu(x))P_\nu(x_0)+Q_\nu(x_0)P_\nu(x)-Q_\nu(x)P_\nu(x_0)$$
$$=Q_\nu(x_0)P_\nu(x)-Q_\nu(x)P_\nu(x_0)$$

$$Car \quad (Q_{-1-\nu}(x_0)-Q_\nu(x_0))P_\nu(x)-(Q_{-1-\nu}(x)-Q_\nu(x))P_\nu(x_0)=(P_\nu(x)P_\nu(x_0)-P_\nu(x)P_\nu(x_0))\frac{\pi}{Tan(\nu\pi)}=0$$
.

Combinaison réelle de fonctions de Legendre utilisée dans les problèmes aux limites axi-symétrique avec dépendance azimutale sur l'hyperboloïde à deux nappes

Démontrons la réalité de la combinaison suivante :

$$e^{-i\mu\pi}\frac{Q_\nu^\mu(x_0)P_\nu^\mu(x)-Q_\nu^\mu(x)P_\nu^\mu(x_0)}{Sin(\pi(\nu-\mu))}\quad pour\quad \nu=-\frac{1}{2}+i\tau\cdot\ Soit$$

$$\begin{cases}P_\nu^\mu(x)=P_{-1-\nu}^\mu(x)\quad P_\nu^{-\mu}(x)=P_{-1-\nu}^{-\mu}(x)\quad De\ plus\quad \nu=-\frac{1}{2}+i\tau\quad soit\quad \overline{\nu}=-\frac{1}{2}-i\tau=-\nu-1\\ P_\nu^{-\mu}(x)=\frac{e^{-i\mu\pi}}{Cos(\nu\pi)\Gamma(\nu+\mu+1)\Gamma(\mu-\nu)}\left(Q_{-\nu-1}^\mu(x)-Q_\nu^\mu(x)\right)\quad Cos\left(\pi\left(-\frac{1}{2}+i\tau\right)\right)=Sin(i\pi\tau)=iSinh(\pi\tau)\\ \Rightarrow P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{-\mu}(x)=\frac{ie^{-i\mu\pi}}{Sinh(\pi\tau)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\mu+i\tau\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\mu-i\tau\right)}\left(Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}^\mu(x)-Q_{-\frac{1}{2}-i\tau}^\mu(x)\right)\\ \Rightarrow Q_{-\nu-1}^\mu(x)-Q_\nu^\mu(x)=Cos(\nu\pi)e^{i\mu\pi}\Gamma(\nu+\mu+1)\Gamma(\mu-\nu)P_\nu^{-\mu}(x)\\ P_\nu^{-\mu}(x)=\frac{\Gamma(\nu-\mu+1)}{\Gamma(\nu+\mu+1)}\left\{P_\nu^\mu(x)-\frac{2}{\pi}e^{-i\mu\pi}Sin(\mu\pi)Q_\nu^\mu(x)\right\}\quad \mu\in\mathbf{R}\quad i\mathbf{R}=\{z\ /\ z=ix\quad x\in\mathbf{R}\}\end{cases}$$

$$Et\quad \Gamma(\mu+\nu+1)\Gamma(\mu-\nu)=\overline{\Gamma(\mu+\overline{\nu}+1)}\,\overline{\Gamma(\mu-\overline{\nu})}=\overline{\Gamma(\mu-\nu)}\,\overline{\Gamma(\mu+\nu+1)}\Rightarrow\Gamma(\mu+\nu+1)\Gamma(\mu-\nu)\in\mathbf{R}$$

$$P_\nu^\mu(x)=P_{-1-\nu}^\mu(x)=P_{\overline{\nu}}^\mu(x)=\overline{P_\nu^\mu(x)}\Rightarrow\begin{Bmatrix}P_\nu^\mu(x)\\ P_\nu^{-\mu}(x)\end{Bmatrix}\in\mathbf{R}\quad et\quad \overline{Q_\nu^\mu(x)}=e^{-2i\mu\pi}Q_{-\nu-1}^\mu(x)$$

$$Cos(\nu\pi)\in i\mathbf{R}\Rightarrow Cos(\nu\pi)\Gamma(\nu+\mu+1)\Gamma(\mu-\nu)P_\nu^{-\mu}(x)=e^{i\mu\pi}\left(Q_{-\nu-1}^\mu(x)-Q_\nu^\mu(x)\right)\in i\mathbf{R}$$

$$\overline{Q_\nu^\mu(x_0)P_\nu^\mu(x)-Q_\nu^\mu(x)P_\nu^\mu(x_0)}=e^{-2i\mu\pi}\left(Q_{-1-\nu}^\mu(x_0)P_\nu^\mu(x)-Q_{-1-\nu}^\mu(x)P_\nu^\mu(x_0)\right)=$$

$$=e^{-2i\mu\pi}\left(\left(Q_{-1-\nu}^\mu(x_0)-Q_\nu^\mu(x_0)\right)P_\nu^\mu(x)-\left(Q_{-1-\nu}^\mu(x)-Q_\nu^\mu(x)\right)P_\nu^\mu(x_0)+Q_\nu^\mu(x_0)P_\nu^\mu(x)-Q_\nu^\mu(x)P_\nu^\mu(x_0)\right)$$

$$=Cos(\nu\pi)e^{-i\mu\pi}\Gamma(\nu+\mu+1)\Gamma(\mu-\nu)\left(P_\nu^{-\mu}(x_0)P_\nu^\mu(x)-P_\nu^{-\mu}(x)P_\nu^\mu(x_0)\right)+e^{-2i\mu\pi}\left(Q_\nu^\mu(x_0)P_\nu^\mu(x)-Q_\nu^\mu(x)P_\nu^\mu(x_0)\right)$$

$$P_\nu^{-\mu}(x_0)P_\nu^\mu(x)-P_\nu^{-\mu}(x)P_\nu^\mu(x_0)=-\frac{2}{\pi}e^{-i\mu\pi}\frac{\Gamma(\nu-\mu+1)}{\Gamma(\nu+\mu+1)}Sin(\mu\pi)\left(Q_\nu^\mu(x_0)P_\nu^\mu(x)-Q_\nu^\mu(x)P_\nu^\mu(x_0)\right)$$

$$\Rightarrow\overline{Q_\nu^\mu(x_0)P_\nu^\mu(x)-Q_\nu^\mu(x)P_\nu^\mu(x_0)}=e^{-2i\mu\pi}\left(Q_\nu^\mu(x_0)P_\nu^\mu(x)-Q_\nu^\mu(x)P_\nu^\mu(x_0)\right)\left\{1-\frac{2}{\pi}\Gamma(\nu-\mu+1)\Gamma(\mu-\nu)Sin(\mu\pi)Cos(\nu\pi)\right\}$$

$$Or\ \Gamma(\nu-\mu+1)\Gamma(\mu-\nu)=\frac{\pi}{Sin(\pi(\mu-\nu))}\quad Sin(\pi(\mu-\nu))=Sin(\mu\pi)Cos(\nu\pi)-Cos(\mu\pi)Sin(\nu\pi)$$

$$\Rightarrow\overline{Q_\nu^\mu(x_0)P_\nu^\mu(x)-Q_\nu^\mu(x)P_\nu^\mu(x_0)}=e^{-2i\mu\pi}\left(Q_\nu^\mu(x_0)P_\nu^\mu(x)-Q_\nu^\mu(x)P_\nu^\mu(x_0)\right)\left\{\frac{Sin(\pi(\mu-\nu))-2Sin(\mu\pi)Cos(\nu\pi)}{Sin(\pi(\mu-\nu))}\right\}$$

$$=-e^{-2i\mu\pi}\left(Q_\nu^\mu(x_0)P_\nu^\mu(x)-Q_\nu^\mu(x)P_\nu^\mu(x_0)\right)\left\{\frac{Cos(\mu\pi)Sin(\nu\pi)+Sin(\mu\pi)Cos(\nu\pi)}{Sin(\pi(\mu-\nu))}\right\}$$

$$\Rightarrow\overline{Q_\nu^\mu(x_0)P_\nu^\mu(x)-Q_\nu^\mu(x)P_\nu^\mu(x_0)}=e^{-2i\mu\pi}\frac{Sin(\pi(\nu+\mu))}{Sin(\pi(\nu-\mu))}\left(Q_\nu^\mu(x_0)P_\nu^\mu(x)-Q_\nu^\mu(x)P_\nu^\mu(x_0)\right)$$

$$\overline{Sin(\pi(\nu+\mu))}=Sin(\pi(\overline{\nu}+\mu))=Sin(\pi(\mu-1-\nu))=-Sin(\pi(\mu-\nu))=Sin(\pi(\nu-\mu))$$

$$\Rightarrow\overline{\left(e^{-i\mu\pi}\left(Q_\nu^\mu(x_0)P_\nu^\mu(x)-Q_\nu^\mu(x)P_\nu^\mu(x_0)\right)\right)}=\frac{\overline{(Sin(\pi(\nu-\mu)))}}{Sin(\pi(\nu-\mu))}e^{-i\mu\pi}\left(Q_\nu^\mu(x_0)P_\nu^\mu(x)-Q_\nu^\mu(x)P_\nu^\mu(x_0)\right)$$

$$\Rightarrow\overline{\left(e^{-i\mu\pi}\frac{Q_\nu^\mu(x_0)P_\nu^\mu(x)-Q_\nu^\mu(x)P_\nu^\mu(x_0)}{Sin(\pi(\nu-\mu))}\right)}=e^{-i\mu\pi}\frac{Q_\nu^\mu(x_0)P_\nu^\mu(x)-Q_\nu^\mu(x)P_\nu^\mu(x_0)}{Sin(\pi(\nu-\mu))}\Rightarrow e^{-i\mu\pi}\frac{Q_\nu^\mu(x_0)P_\nu^\mu(x)-Q_\nu^\mu(x)P_\nu^\mu(x_0)}{Sin(\pi(\nu-\mu))}\in\mathbf{R}$$

.

Si l'expression suivante est réelle :

$$e^{-i\mu\pi}\,\frac{Q_\nu^\mu(x_0)P_\nu^\mu(x)-Q_\nu^\mu(x)P_\nu^\mu(x_0)}{Sin(\pi(\nu-\mu))}\quad pour\quad \nu=-\frac{1}{2}+i\tau$$

Alors la dérivée en x l'est également, et il en est de même pour les combinaison linéaires le l'expression et de sa dérivée première.